

Werk

Titel: Quelques problèmes de classes caractéristiques secondaires

Autor: Lehmann, Daniel

Jahr: 1972

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320387429_0006|log15

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

QUELQUES PROBLÈMES DE CLASSES CARACTÉRISTIQUES SECONDAIRES

par

Daniel L. EHMAN

Les techniques récemment utilisées par Bott et Haefliger [1] [2], pour étudier les invariants des feuilletages de codimension q (le cas $q=1$ avait été étudié par Godbillon-Vey [3] au préalable) se généralisent à d'autres situations géométriques que celles des Γ -structures.

1. NOTATIONS ET RAPPELS.

Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel différentiable de fibre $\mathbb{R}^q$ ($\dim M < +\infty$), et $I_q = \mathbb{R}[c_1, \dots, c_q] = \bigoplus_{p \geq 0} I_q^p$ (degré $c_i = i$) l'algèbre des polynômes sur $\text{End}(\mathbb{R}^q)$, à coefficients réels, invariants par $GL(q, \mathbb{R})$.

Pour toute connexion ∇ sur E , de courbure K , on note

$$\lambda(\nabla) : I_q \rightarrow A_{\mathbb{C}}^{\text{pair}}(M)$$

l'homomorphisme d'algèbres (de Chern-Weil) qui, à tout polynôme $\Phi \in I_q^p$, associe la 2-forme fermée $(\frac{i}{2\pi})^p \Phi(K)$.

Si ∇' désigne une autre connexion sur E , on définit une connexion $\tilde{\nabla}$ sur

$E \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ en posant :

$$\tilde{\nabla}_x s = t \nabla_x s_t + (1-t) \nabla_x s_t \quad \text{si } X \in T(M \times \{t\})$$

$$(\text{où } s_t = s|_{M \times \{t\}})$$

$$\tilde{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} s = 0 \quad \text{si } s_t \text{ ne dépend pas de } t.$$

Notons $\lambda(\nabla, \nabla') : I_q \rightarrow A_{\mathbb{C}}^{\text{impair}}(M)$ l'application composée $\pi_* \cdot \lambda(\tilde{\nabla})$, où $\pi_* : A_{\mathbb{C}}^{\text{pair}}(M \times \mathbb{R}) \rightarrow A_{\mathbb{C}}^{\text{impair}}(M)$ désigne l'intégration le long des fibres de $M \times [0, 1] \rightarrow M$:

$$\pi_*(f(x, t) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r) = 0$$

$$\pi_*(f(x, t) dt \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1}) = \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1}$$

Rappelons la formule (cf. Bott p. 82 [1]) :

$$d(\lambda(\nabla, \nabla') \Phi) = \lambda(\nabla') \Phi - \lambda(\nabla) \Phi \quad (*)$$

qui prouve en particulier que la classe de cohomologie de $\lambda(\tilde{\nabla}) \Phi$ ne dépend pas de la connexion $\tilde{\nabla}$.

On notera

$$\lambda : I_q \rightarrow H^*(M, \mathbb{C})$$

l'homomorphisme caractéristique, induit par $\lambda(\tilde{\nabla})$ en cohomologie, et qui prend ses valeurs dans la cohomologie de dimension multiple de 4.

2. LE PROCESSUS DE BOTT.

Nous allons généraliser une construction faite par Bott dans le cas du fibré transverse à un feuilletage.

Soient C et C' deux sous-ensembles connexes non vides de l'espace (affine) des connexions sur E , et soient I et I' deux idéaux homogènes de I_q tels que

$$I \subset \bigcap_{\nabla \in C} \text{Ker } \lambda(\nabla) \quad \text{et} \quad I' \subset \bigcap_{\nabla \in C'} \text{Ker } \lambda(\nabla').$$

Graduons les algèbres quotients I_q/I et I_q/I' en posant $\dim \bar{\Phi} = \dim \bar{\bar{\Phi}} = 2$ (degré Φ) (où $\bar{\Phi}$ et $\bar{\bar{\Phi}}$ désignent respectivement les classes modulo I et I' d'un élément homogène Φ de I_q). Graduons l'algèbre extérieure $\Lambda(I_q^+)$ construite sur l'espace vectoriel sous-jacent à l'idéal maximal $I_q^+ = \bigoplus_{p \geq 1} I_q^p$ de I_q (on oublie la structure d'idéal) en posant $\dim \Psi = 2(\text{degré } \Psi) - 1$, ceci $\forall \Psi \in I_q^+$.

Sur le produit tensoriel gradué d'algèbres

$$\mathbb{R}(I, I') = (I_q/I) \otimes_{\mathbb{R}} (I_q/I') \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda(I_q^+)$$

on définit une différentielle d (de degré $+1$), en posant :

$$d(\bar{\Phi} \otimes I \otimes I) = 0$$

$$d(I \otimes \bar{\bar{\Phi}} \otimes I) = 0$$

$$d(I \otimes I \otimes \Phi) = I \otimes \bar{\bar{\Phi}} \otimes I - \bar{\Phi} \otimes I \otimes I \quad \forall \Phi \in I_q^+$$

Choisissons une connexion ∇ dans C , et une autre ∇' dans C' . On définit un homomorphisme d'algèbres graduées

$$\rho_{\nabla, \nabla'} : W(I, I') \rightarrow A^*(M, \mathbb{C})$$

en posant :

$$\begin{aligned} \rho_{\nabla, \nabla'}(\Phi \otimes I \otimes I) &= \lambda(\nabla) \Phi \\ \rho_{\nabla, \nabla'}(I \otimes \Phi \otimes I) &= \lambda(\nabla') \Phi \\ \rho_{\nabla, \nabla'}(I \otimes I \otimes \Phi) &= \lambda(\nabla, \nabla') \Phi \end{aligned}$$

La formule (*) montre que $\rho_{\nabla, \nabla'}$ commute avec les différentielles. La connexité des ensembles C et C' permet de montrer que l'homomorphisme d'algèbres

$$\rho : H^*(W(I, I')) \rightarrow H^*(M, \mathbb{C})$$

induit en cohomologie par $\rho_{\nabla, \nabla'}$ ne dépend pas des connexions ∇ et ∇' choisies respectivement dans C et C' .

Nous appellerons *algèbre caractéristique d'ordre 2* (associée à I, I', C, C') la sous-algèbre $\text{Im } \rho$ de $H^*(M, \mathbb{C})$, et *classes caractéristiques secondaires* (ou exotiques d'ordre 2) les éléments de $\text{Im } \rho - \text{Im } \lambda$ [$\text{Im } \lambda \subset \text{Im } \rho$].

Les classes caractéristiques secondaires apparaissent alors comme des *obstructions* à ce que C et C' aient une intersection non vide (les classes caractéristiques ordinaires représentant évidemment une obstruction à l'existence de connexions sans courbure).

On a en effet la

Proposition 1. Si $C \cap C' \neq \emptyset$, les classes caractéristiques secondaires sont toutes nulles.

Lemme 1. Si $X \in T_{(x, t)}(M \times \{t\})$, et si $s \in (E \times \mathbb{R})_{(x, t)} \approx E_x$, la courbure

$\tilde{K}$ de $\tilde{\nabla}$ vérifie :

$$\tilde{K}(X, (\frac{\partial}{\partial t})_{(x,t)}) \cdot s = \nabla'_X s - \nabla_X s.$$

On peut en effet prolonger s en une section $\tilde{s}$ de $E \times \mathbb{R}$, telle que $s|_{M \times \{t\}}$ soit une section de E indépendante de t . On peut, de même, prolonger X en un champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur $M \times \mathbb{R}$ tel que $X|_{M \times \{t\}}$ soit tangent à la variété $M \times \{t\}$, et que les champs de vecteurs ainsi obtenus sur M soient indépendants de t , de sorte que $[\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}] = 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}) \cdot \tilde{s} &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tilde{s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{s} \right) - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}]} \tilde{s} \\ &= - \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} (t \nabla_X s + (1-t) \nabla'_X s) \\ &= \nabla'_X s - \nabla_X s, \end{aligned}$$

d'où le lemme.

Démonstration de la proposition. Si $C \cap C' \neq \emptyset$, on peut choisir $\nabla = \nabla'$ de sorte que $\tilde{K}(X, \frac{\partial}{\partial t}) = 0$, $\forall X \in T(M \times \mathbb{R})$: on en déduit que, $\forall \Phi \in I_q^+$ $\lambda(\tilde{\nabla})\Phi$ n'a pas de terme en dt , et que par conséquent $\lambda(\tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}) = 0$, d'où la proposition.

REMARQUES. 1) On a une famille de sous-algèbres différentielles graduées (les algèbres marquées $d=0$ ont une différentielle nulle et sont donc égales à leur cohomologie).

$$\begin{array}{ccccc}
(I_q/I') \otimes \Lambda(I) & \hookrightarrow & (I_q/I) \otimes (I_q/I') \otimes \Lambda(I) & & \\
\uparrow & & \uparrow & \searrow & \\
\Lambda(I \cap I') & \longrightarrow & (I_q/I) \otimes (I_q/I') \otimes \Lambda(I \cap I') & \hookrightarrow & (I_q/I) \otimes (I_q/I') \otimes \Lambda(I_q^+) \\
d=0 & & d=0 & & \parallel \\
& & & & W(I, I') \\
\downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\
(I_q/I) \otimes \Lambda(I') & \longrightarrow & (I_q/I) \otimes (I_q/I') \otimes \Lambda(I') & &
\end{array}$$

2) En particulier, si C' est un ensemble connexe non vide de connexions sans courbure sur E , on peut prendre $I' = I_q^+$, $W(I, I') = (I_q/I) \otimes \Lambda(I_q^+)$, et la famille précédente de sous-algèbres différentielles devient :

$$\Lambda(I) \hookrightarrow (I_q/I) \otimes_{d=0} \Lambda(I) \hookrightarrow (I_q/I) \otimes \Lambda(I_q^+) = W(I, I_q^+)$$

3) Si, dans les algèbres précédentes, on remplace les algèbres extérieures $\Lambda(\mathcal{U})$ (où $\mathcal{U}$ est l'espace vectoriel sous-jacent à un idéal homogène de I_q) par les algèbres extérieures $\Lambda(A)$ construites sur un sous-espace vectoriel gradué A de $\mathcal{U}$, on obtient évidemment autant de sous-algèbres différentielles graduées.

CONJECTURE. Si A est l'espace vectoriel engendré par un système de générateurs de l'idéal $\mathcal{U}$, les sous-algèbres de $H^*(M, \mathbb{C})$ obtenues en prenant les images par ρ des algèbres construites avec $\Lambda(\mathcal{U})$ ou avec $\Lambda(A)$ sont les mêmes.

Cette conjecture est vérifiée par exemple pour l'algèbre $\Lambda(I \cap I')$ (à diffé-

rentielle nulle).

On peut aussi se demander si certaines des inclusions d'algèbres différentielles, décrites ci-dessus, sont des équivalences d'homotopie, au moins quand on remplace $\Lambda(\mathcal{U})$ par $\Lambda(A)$. En général, c'est faux; mais Jouanolou m'a donné une démonstration de ce que

$$WO_q = (I_q / d^0 \Phi > q) \quad \Lambda(h_1, h_3, \dots, h_q) \rightarrow (I_q / d^0 \Phi > q) \quad \mathbb{R}[c_2, c_4, \dots, c_q]$$

$$\Lambda(h_1, h_2, \dots, h_q)$$

$[q' \text{ (resp. } q'') = \text{plus grand entier impair (resp. pair)} \leq q]$ est une équivalence d'homotopie.

Il en est de même pour

$$\Lambda(h_1, h_3, \dots, h_q) \xhookrightarrow{d=0} \mathbb{R}[c_2, c_4, \dots, c_q'] \otimes \Lambda(h_1, h_2, \dots, h_q)$$

3. EXEMPLES.

Hypothèses sur E		C	I	A (système de générateurs de I)
1.	aucune hypothèse particulière	connexions respectant une métrique	Idéal engendré par les polynômes de degré impair	$c_1, c_3, \dots, c_q$ (q' plus grand entier impair $\leq q$)
2.	E est le fibré transverse à un feuilletage de codimension q	connexions "basiques" (cf. [1])	Idéal des polynômes de degré $> q$	$(c_1)^{q+1}, (c_1)^{q-1}c_2, \dots$ etc. ...

3.	E admet une connexion sans courbure	famille connexe de connexions sans courbure	I_q^+	$c_1, \dots, c_q$
4.	E est somme directe d'un fibré E' de dim k et d'un fibré trivial de dimension $q-k$ $E = E' \otimes \theta_{q-k}$	Connexions respectant E' et triviales sur θ_{q-k}	Idéal engendré par $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_q$	$c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_q$
5.	E est orientable	Connexions respectant une forme volume	Idéal engendré par c_1	c_1

- Les familles (1.2) et (2.3) permettent de retrouver respectivement les algèbres WO_q et W_q et la théorie de Bott-Haefliger pour les feuilletages généraux et pour ceux admettant un fibré transverse plat.

- La famille (1.3) correspond au problème suivant : On suppose que le groupe structural $GL(q, \mathbb{R})$ de E peut être réduit à un sous-groupe discret. Peut-il l'être en fait à un sous-groupe fini ? [On sait que ce n'est pas toujours vrai : il suffit, d'après Milnor, de prendre un $GL^+(2, \mathbb{R})$ -fibré E (i.e. réel orienté, de dimension 2) de base une surface compacte orientable de genre $g \geq 2$, et de supposer que la classe d'Euler $\chi(E)$ vérifie $1 \leq |\chi(E)| < g$].

- La famille (3.4) correspond au problème suivant : on se donne un fibré vectoriel E' de dimension k , et on le suppose stablement plat (plus précisément, on suppose que $E' \otimes \theta_{q-k}$ admet une connexion sans courbure). Est-il plat ?
[$T(S^n)$ est stablement trivial, et n'est pas plat, sauf pour $n = 1, 3, 7$]

- Les exemples 1, 4 et 5 sont des cas particuliers de la situation suivante: le groupe structural $GL(q, \mathbb{R})$ de E est réduit à un sous-groupe de Lie G , et les connexions considérées sont celles qui respectent cette G -structure. Si l'on suppose E muni également d'une H -structure pour un autre sous-groupe de Lie H de G , l'exotisme fourni par les 2 familles de connexions ainsi définies, représente une obstruction à la possibilité de résoudre le problème suivant : existe-t-il une G -structure P'_G sur E , homotope à celle (P_G) que l'on s'est donnée, ainsi qu'une H structure P'_H homotope à celle (P_H) que l'on s'est donnée, telles que l'intersection $P'_G \cap P'_H$ des fibrés principaux associés (de groupes respectifs G et H) soit un $G \cap H$ - fibré principal différentiable ?

- Il est bien clair, que dans le cas des 3 familles (1.4), (1.5) et (4.5), le problème géométrique admet toujours une solution, de sorte que l'exotisme correspondant est nul.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Bott : Lectures on characteristic classes and foliations (notes by Lawrence Conlon) [miméographié]
2. A. Haefliger : Sur les classes caractéristiques des feuilletages [Séminaire Bourbaki - juin 1972]
3. Godbillon-Vey : Un invariant des feuilletages de codimension 1 [Comptes Rendus Ac. Sc., Paris - juin 1971]

*Département de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques de Lille
59-Villeneuve d'Ascq, France*

(Recibido en julio de 1972)