Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VI, 1972, págs. 69-105

INTRODUCCIÓN A LOS LAZOS ALGEBRAICOS

por

Carlos E. VASCO URIBE

1. *PRELIMINARES*.

En esta conferencia trataremos exclusivamente de sistemas algebraicos o estructuras algebraicas $(A,\&)$, en donde A es un conjunto dado y la "*y* comercial" & denota una operación binaria sobre A. Cuando no se preste a confusiones, hablaremos abusivamente del sistema A, y denotaremos la operación por simple yuxtaposición: $ab = a\&b$. (Léase: "a operado con b").

Si definimos la operación como una función de $A\times A$ en A, es claro que no hay lugar a hablar de "operaciones no clausurativas"; por lo tanto, en todo sistema $(A,\&)$ se cumple por lo menos la propiedad clausurativa. Ese sistema elemental recibe el nombre de *grupoide*.

En álgebra moderna se estudian principalmente los sistemas cuya operación goza de la propiedad asociativa. Si en un grupoide se cumple también esta propiedad, el sistema se llama *semigrupo*. Si además el semigrupo tiene un ele -

mento neutro o unidad e, el sistema se llama *monoide*. Si el monoide tiene inversos para cada uno de sus elementos, el sistema se llama *grupo*. ¿Pero qué sucede si se trata de añadir otras propiedades antes de postular la asociativa ?

Se han estudiado principalmente dos tipos de sistemas :

Si en un grupoide se postula la existencia de soluciones únicas para las "ecuaciones de primer grado"

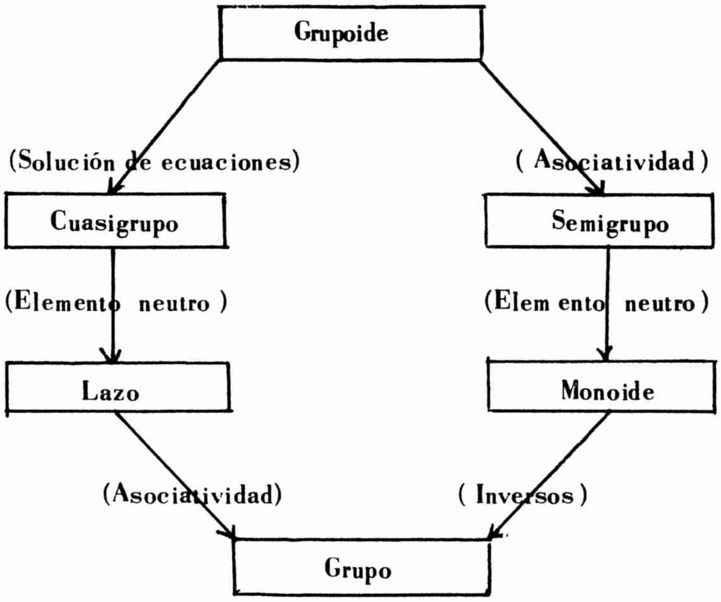
$$a \& x = b$$
$$a \& a = b,$$

el sistema obtenido se llama *cuasigrupo*.

Si el cuasigrupo tiene un elemento neutro o unidad e, el sistema obtenido se llama "*lazo*" (o también "aro"; en inglés : "loop"). Si a un lazo se le añade la propiedad asociativa, resulta de nuevo un grupo. Por eso se podría decir con una contradicción sugerente, que un lazo es un "grupo no asociativo". Más exactamente, un lazo es un cuasigrupo con unidad.

El diagrama siguiente visualiza las relaciones entre los seis sistemas algebraicos definidos arriba .

Nótese que la propiedad conmutativa es independiente de todas las mencionadas hasta ahora. Si en uno de los sistemas ya definidos se cumple además la propiedad conmutativa, el sistema se llama respectivamente : grupoide, semigrupo, monoide,... conmutativo (o abeliano).



Ejemplos elementales de grupoides y cuasigrupos son :

1.1. Los naturales (a partir del 1) con la potenciación :

$a \& b = a^b$, forman un grupoide .

1.2. Los reales positivos con la potenciación forman un grupoide en el que todas las ecuaciones $x \& a =$ (o sea : $x^a = b$) tienen solución única $x = b^{(1/a)}$; pero las ecuaciones $a \& x = b$ (o sea : $a^x = b$) tienen solución única sólo cuando a y b son ambos mayores que uno (o ambos menores que uno). En esos casos, $x = \log_a b$.

1.3. Todos los reales con la distancia : $a \& b = |a - b|$, forman un grupoide conmutativo. Nótese que en este grupoide todas las ecuaciones de primer grado tienen exactamente dos soluciones.

1.4. Los enteros con la resta forman un cuasigrupo, pues toda ecuación $a \& x = b$ (o sea : $a - x = b$) tiene como solución única $x = a - b$, y toda ecuación $x \& a = b$ (o sea : $x - a = b$) tiene como solución única $x = b + a$. Nótese que este cuasigrupo no es ni conmutativo, ni asociativo, ni tiene elemento neutro, a pesar de que el cero es un elemento neutro a derecha .

1.5. Los reales positivos con la división forman un cuasigrupo.

2. *UN POCO DE HISTORIA* .

La prehistoria de los cuasigrupos y lazos puede seguirse en dos direcciones distintas : la combinatoria y la geométrica.

En la dirección combinatoria puede comenzarse la historia con el problema de los 36 oficiales de Leonardo Euler, quien murió en 1783 :

De cuántas maneras pueden formarse 36 oficiales de 6 divisiones distintas, de tal manera que en cada fila y en cada columna haya uno y un solo oficial de cada división ?

Estos cuadrados en los que en cada fila y en cada columna hay exactamente un número o letra se llaman *cuadros latinos* . Sólo a fines del Siglo XIX se empezaron a estudiar más detenidamente, sobre todo por Cayley [Ca 90] [1]. En 1930 Schönhardt estudió exhaustivamente los cuadros de orden 5 [Sc 30] , y en 1934

---

[1] Las referencias a la bibliografía se dan con las dos primeras letras del nombre del autor y las dos últimas cifras del año de publicación. Si son varios autores, se dan las iniciales de los dos primeros.

Fisher y Yates publicaron una lista completa de los cuadros latinos de orden *6* [FY 34] . Se encontraron 17 tipos básicos, de los cuales se pueden obtener 9408 cuadros diferentes por transposición sobre la diagonal y permutaciones de filas , columnas y símbolos.

En 1939 Norton publicó una lista de 146 tipos básicos de cuadros latinos de orden 7 [No 39] . Doce años después , Albert Sade encontró que faltaba un tipo, y que en total había 16.942.080 cuadros latinos de orden 7 [Sa 51] .

Lo más interesante de estos cuadros latinos desde el punto de vista algebraico, es que si se consideran como "tablas de multiplicar" o "tablas de Cayley" de un sistema algebraico finito , los cuadros latinos de un orden dado son precisamente las tablas de multiplicar de los cuasigrupos, lazos y grupos de ese orden. El problema de los 36 oficiales de Euler es pues equivalente al problema de encontrar todos los cuasigrupos , lazos y grupos de orden 6. Los trabajos de Fisher y Yates resolvieron parcialmente el problema; pero sólo en 1966 Bryant y Schneider publicaron el resultado final : de los 9408 cuadros latinos encontrados por Fisher y Yates hay exactamente dos que corresponden a grupos no isomorfos, y 107 que corresponden a lazos no isomorfos [BS 66] . La lista de los 109 lazos (todo grupo es un lazo) no isomorfos corona 200 años de investigación en el problema de los 36 oficiales.

La otra línea histórica que llevó al estudio de los lazos fue la geométrica . En los años anteriores a la Segunda Guerra Mundial se estudiaron profusamente las llamadas *redes geométricas triples*, especialmente por Reidemeister [Re 29], [Re 30] , Thomsen [Th 30] , Blaschke [Bl 28] y Bol [Bo 37] . Los resultados se encuentran sistematizados en el Tomo 49 de la colección Springer, escrito por los dos últimos autores [BB38], y en el Tomo 80 de la misma colección, que es el libro clásico de Pickert sobre planos proyectivos [Pi55].

Una red geométrica triple consta de un conjunto de puntos, tres clases disyuntas no vacías de líneas, llamadas uno-líneas, dos-líneas y tres-líneas, y una relación de incidencia que cumple los axiomas siguientes :

I. Dos líneas de la misma clase no inciden una con otra.

II. Dos líneas de distintas clases inciden una con otra en uno y un sólo punto.

III. En cada punto inciden una con otra exactamente tres líneas, una de cada clase.

Con las modificaciones respectivas pueden definirse también redes dobles, triples, cuádruples, etc. Por ejemplo, una red doble interesante está dada por los puntos del plano perforado en el origen, tomando como uno-líneas todas las circunferencias de radio r con centro en el origen, y como dos-líneas todos los radios $(0 < \rho < \infty)$ de azimut constante $(\theta = c)$.

El ejemplo clásico de red triple es la "red del pescador", que es una triangulación del plano con triángulos equiláteros de lado unidad.

Para coordenar una red triple se elige una línea de base, que se llama uno-línea $(1,1)$, y en ella un punto base que se llama $[1,1]$. Las otras dos líneas que pasan por $[1,1]$ se llaman la dos-línea $(2,1)$ y la tres-línea $(3,1)$. Luego se rotulan sucesivamente los puntos de la línea $(1,1)$ llamándolos $[1,2]$, $[1,3]$, ..., $[1,a]$, ... Esto determina los nombres de todas las dos-líneas $(2,a)$

y las tres-líneas $(3,a)$ que pasan por $[1,a]$. La línea $(1,a)$ es la que pasa por el punto de incidencia de $(2,1)$ con $(3,a)$, y el punto $[x,y]$ queda unívocamente determinado por la incidencia de $(1,x)$ con $(2,y)$.

Una vez coordenada la red triple en cuestión, es posible definir geométricamente una operación $\&$ en la siguiente forma : Dados a y b, partir de $[1,a]$ por la línea $(3,a)$ hasta cortar la línea $(2,1)$; de allí seguir por la uno-línea respectiva hasta encontrar la dos-línea $(2,b)$; luego bajar por la tres-línea respectiva hasta encontrar la línea $(1,1)$; el valor $c = a\&b$ es la segunda coordenada del punto de corte $[1,c] = [1, a\&b]$.

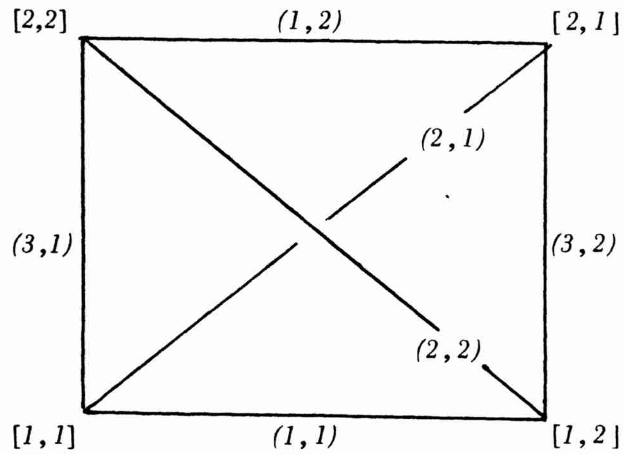
Los números utilizados para coordenar la red triple y la operación $\&$ definida así, forman un cuasigrupo. Por ejemplo, la red del pescador con la coordenación indicada arriba induce sobre los enteros un cuasigrupo isomorfo al grupo aditivo de los enteros. La operación $\&$ puede calcularse por :

$$a \& b = a + b - 1 ,$$

y el isomorfismo f está dado por :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \\ f(y) &= y + 1 \\ f(x + y) &= x + y + 1 = (x + 1) + (y + 1) - 1 \\ &= f(x) \& f(y) . \end{aligned}$$

Pero hay muchos otros sistemas inducidos por redes triples que presentan características peculiares. El sistema finito no trivial más sencillo consta de sólo dos líneas de cada clase y cuatro puntos :



Puede comprobarse fácilmente que esta red triple con la operación geométrica indicada anteriormente induce sobre el conjunto de los números 1 y 2 una estructura de cuasigrupo; el cuasigrupo resultante es isomorfo con el grupo cíclico de orden dos, cuya tabla de Cayley es el único cuadro latino de orden dos :

1	2
2	1

Fue una mujer, Ruth Moufang, de Frankfurt del Main, la que en 1935 publicó un artículo en el que abstraía de las redes triples una estuctura algebraica, que ella llamó "cuerpo alternativo" [Mo 35] . A partir de esa fecha el estudio de los cuasigrupos y lazos empieza a desarrollarse independientemente de los aspectos combinatorio y geométrico. Durante la Segunda Guerra Mundial, los nombres de Murdoch, Garrison y Albert dominan la investigación [Mu 39] , [Mu 41a] , [Mu 41b] [Ga 40] , [Al 2a] , [Al 42 b] , [Al 43] , [Al 44] .

El extenso artículo de R. H. Bruck de 1944 : "Algunos resultados en la teoría de cuasigrupos" está dedicado en gran parte a los lazos, y a partir de entonces Bruck se convierte en el principal teórico de este tipo de estructuras [Br44] .

En 1946 publica un artículo básico en la materia [Br46] , y en 1958 publica el libro "A Survey of Binary Sistems", casi todo dedicado a los lazos [Br58] . Este libro fue editado nuevamente con una completa bibliografía en 1966. Bruck ha continuado sus investigaciones y publicaciones, entre las cuales cabe destacar un interesante artículo de divulgación titulado "¿Qué es un Lazo?", que apareció en el segundo volumen de "Studies in Modern Algebra", libro editado por Adrian Albert en 1963 [Al63] .

Entre los especialistas en lazos merece citarse también el profesor de la Universidad Hebrea de Haifa, Rafael Artzy, quien ha publicado varios artículos sobre aspectos geométricos y algebraicos de los lazos [Ar53] , [Ar59a] , [Ar59b] [Ar 63].

En los Estados Unidos se ha cultivado el estudio de los lazos en las universidades de Wisconsin, Missouri y Vanderbilt. En esta última fue en donde se encontraron los 109 lazos no isomorfos, y allí mismo se elaboró la tesis de Eric L. Wilson, "Isotopía de Lazos", de 1966, que es una de las obras básicas en el tema de las isotopías, tópico que se verá más abajo. [Wi66] .

3. EL ESTUDIO DE LOS LAZOS .

Estas estructuras se estudian generalmente añadiendo a los axiomas mínimos (existencia de soluciones únicas para ecuaciones y existencia de una identidad), algún axioma más que sustituya en parte la asociatividad, o sea la identidad:

$$x(yz) = (xy)z\,.$$

Las leyes menos rigurosas que se obtienen identificando dos o más de estas variables son :

La Monoasociatividad :	$x(xx) = (xx)x.$	
La Flexibilidad :	$x(yx) = (xy)x.$	
La Alternatividad :	$x(xy) = (xx)y$	(a izquierda).
	$y(xx) = (yx)x$	(a derecha).

Es claro que no hay más identidades homogéneas de tercer grado. Pero también se conocían en álgebra no asociativa algunas identidades importantes, homogéneas y de cuarto grado, que representan formas débiles de la asociatividad. La más importante es la identidad de Jordan : $(x^2y)x = x^2(yx)$, que surge en la fundamentación teórica de la mecánica cuántica, y que origina los extensos estudios de álgebras de Jordan, recogidos en el libro de Braun y Koecher de la colección Springer [BK 66] .

Una forma peculiar de monoasociatividad de cuarto grado, llamada la Ley de Osborn : $(x^2x)x = x^2x^2$, lo mismo que otras identidades similares llamadas de Moufang y de Moufang-Bol, también recibieron especial tratamiento :

$$(yx\,.\,z)x = y(x\,.\,zx)$$

$$x(y\,.\,xz) = (xy\,.\,x)z$$

$$(xy)(zx) = (x\,.\,yz)x$$

$$(yx\,.\,z)x = y(xz\,.\,x)$$

$$x(y\,.\,xz) = (x\,.\,yx)y\,.$$

Cierto paciente autor estudió todas las identidades similares de cuarto grado que representan formas débiles de la asociatividad ; su número asciende a 150. [Va68].

También hay otros tipos de identidades muy peculiares de los cuasigrupos y lazos, pues la no asociatividad no trae sólo desventajas : combinada con la existencia de soluciones únicas para "ecuaciones de primer grado", permite definir configuraciones interesantes.

Por ejemplo, en un cuasigrupo es posible definir inversos a izquierda y a derecha, aún sin tener elemento neutro :

El inverso a izquierda de x, x^i, se define como el elemento que cumple para cualquier y la identidad :

$$x^i(xy) = y.$$

El inverso a derecha de x, x^d, se define como el elemento que cumple para cualquier y la identidad :

$$(yx)x^d = y.$$

Si se tiene elemento neutro, la definición de inverso a izquierda y de inverso a derecha es la usual.

No se crea que la existencia de soluciones para las ecuaciones

$$xa = b$$

$$ax = b$$

proporcionan estos inversos con $a=xy$ y $b=y$, o $a=yx$ y $b=y$, pues esas soluciones podrían depender de y. Tampoco se puede concluir de la existencia de esas soluciones con $a = b$ que exista una identidad a izquierda o a derecha, pues la solución en cada caso puede depender de a. Por eso es necesario postular la existencia de la identidad o elemento neutro para obtener un lazo. El ejemplo de los enteros con la resta indica la posibilidad de tener un elemento neutro sólo a derecha. Pero si hay un elemento neutro a derecha e_d y un elemento neutro a izquierda e_i, el producto $e_i e_d$ es igual a e_i y a e_d, y por lo tanto ambos elementos neutros son iguales, y son el elemento neutro de un lazo. Esto es conocido en la teoría de grupos. Pero no sucede paralelamente con los inversos a izquierda y a derecha : en la teoría de grupos se prueba que son iguales pero sin la asociatividad la prueba no concluye para los lazos (es de notar que la Flexibilidad es suficiente para probar ese teorema en un lazo).

Estas peculiaridades de los inversos permiten postular identidades como las siguientes :

Propiedad inversa a derecha : $(xy)y^d = x.$

Propiedad inversa a izquierda : $x^i(xy) = y$

Propiedad inversa cruzada : $(xy)\,x^d = y$

Propiedad inversa débil : $x(yx)^d = y^d$

(Cf. [Wi 66], p. 14).

Otros tipos de sustitutos para la asociatividad, estudiados por Bruck, son la asociatividad de potencias (todo elemento genera un subgrupo del lazo) y la diasociatividad (toda pareja de elementos genera un subgrupo del lazo). Cf. [Br 66], p. 87.

4. *OPERACIONES INVERSAS.*

La solución única de las ecuaciones permite definir en un lazo $(A,\&)$ dos operaciones inversas para la operación $\&$ del lazo : la división a izquierda y la división a derecha :

- A partir de la ecuación $a\&x = b$ se define $x = a \setminus b$ (léase : "a bajo b") como el resultado de la división a izquierda, y
- A partir de la ecuación $x\&a = b$ se define $x = b/a$ (léase : "b sobre a") como el resultado de la división a derecha.

Nótese que en general los elementos $a\setminus b$ y b/a son distintos. Además, pueden definirse parcialmente estas divisiones aún en grupoides. Tómese por ejemplo el grupoide de los reales positivos con la potenciación :

A partir de $a\&x = b$ $(a^x = b)$, la división a izquierda daría el logaritmo en base a de b, definido para a y b mayores que uno, o a y b menores que uno.

A partir de $x\&a = b$ $(x^a = b)$ la división a derecha daría la raíz a de b, o sea $b^{(1/a)}$, que está siempre bien definida.

Si la operación $\&$ es la división entre reales positivos :

A partir de $a\&x = b$ $(a : x = b)$ la división a izquierda sería $x = a\setminus b = = a : b$.

A partir de $x\&a = b$ $(x : a = b)$ la división a derecha sería $x = b/a = ab$!. Por lo tanto la división a izquierda es el recíproco de la división ordinaria, y la división a derecha es la multiplicación ordinaria.

Las operaciones $\&$, $\backslash$ y $/$ permiten definir una serie de aplicaciones del lazo $(A,\&)$ sobre sí mismo, llamadas traslaciones a izquierda $I(a)$, traslaciones a derecha $D(a)$, traslaciones inversas a izquierda $I(a)^{-1}$ y traslaciones inversas a derecha $D(a)^{-1}$, una para cada elemento a de A:

$$I(a)(x) = a \& x,$$
$$D(a)(x) = x \& a,$$
$$I(a)^{-1}(x) = a \backslash x,$$
$$D(a)^{-1}(x) = x / a.$$

Estas aplicaciones generan tres grupos llamados respectivamente grupo de multiplicación izquierdo, grupo de multiplicación derecho y grupo de multiplicación de A, que permiten estudiar los cuasigrupos y lazos por el método de grupos de permutaciones, y facilitan muchas pruebas de tipo computacional.

5. *ISOMORFISMO E ISOTOPÍA*.

La noción de isomorfismo entre lazos es la ordinaria : una función f biyectiva que "preserve la operación" :

$(A,\&)$ es isomorfo a $(B,\#)$ si y sólo si existe una biyección f entre A y B tal que para todo x y para todo y:

$$f(x) \# f(y) = f(x \& y).$$

¿Pero por qué elegir las tres veces la misma función f? ¿Qué sucede si en vez de f se utiliza una tripla ordenada de biyecciones (f, g, h) de A a B tales que para todo x y para todo y:

$$f(x) \# g(y) = h(x \& y) \ ?$$

La terna de funciones (f, g, h) se llama *isotopía*, y se dice que $(A, \&)$ *es isotópico* a $(B, \#)$, o equivalentemente, que $(A, \&)$ *es un isótopo* de $(B, \#)$.

El concepto de isotopía se debe a A. Albert [Al 42] :, quien lo utilizó en la teoría de álgebras y cuasigrupos; ya había sido empleado conscientemente por Schonhardt [Sc 30] para los cuadros latinos y por Baer [Ba 39] para las redes.

Si la isotopía (f, g, h) está compuesta por dos biyecciones f, g de A sobre sí mismo, y $h = i_A$ es la función idéntica sobre A, se llama *isotopía principal*.

Estas isotopías particularmente sencillas son suficientes para la teoría, pues no es difícil probar que todo isótopo de un lazo dado tiene un isótopo principal isomorfo al lazo dado; este resultado es válido más generalmente aún para los grupoides :

TEOREMA 5.1. Todo isótopo $(A, \&)$ de un grupoide dado $(B, \#)$ tiene un isótopo principal $(A, .)$ isomorfo a $(B, \#)$.

Prueba : Sea $(A, \#)$ un isótopo de $(B, \#)$ bajo la isotopía (f, g, h). Entonces :

$$f(x) \# g(y) = h(x \& y). \qquad (5.1.1)$$

Como f y g son biyecciones, sus inversos existen y es posible definir una nueva operación $.$ en A por :

$$x \cdot y = f^{-1}[h(x)] \,\&\, g^{-1}[h(y)]. \qquad (5.1.2)$$

Como $x \cdot y = i_A(x \cdot y)$, $(5.1.2)$ se puede escribir :

$$f^{-1}h(x) \,\&\, g^{-1}h(y) = i_A(x \cdot y): \qquad (5.1.3)$$

Por lo tanto, $(A,.)$ es un isótopo principal de $(A,\&)$ bajo la isotopía $(f^{-1}h, g^{-1}h, i_A)$. Pero si en (5.1.1) reemplazamos los elementos x, y por $f^{-1}h(x)$ y $g^{-1}h(y)$, obtenemos :

$$f(f^{-1}h(x)) \,\#\, g(g^{-1}h(y)) = h(f^{-1}h(x) \,\&\, g^{-1}h(y)).$$

Pero como $ff^{-1} = i_A$ y $gg^{-1} = i_A$, y por (5.1.2) el lado derecho es simplemente $h(x \cdot y)$, obtenemos :

$$h(x) \,\#\, h(y) = h(x \cdot y).$$

Luego $(A,.)$ es isomorfo a $(B,\#)$ bajo el isomorfismo h, QED.

La reducción de las isotopías principales puede llevarse aún más lejos : es posible probar que entre dos isótopos principales existe siempre una isotopía cuyas biyecciones son traslaciones (cf. supra, Sección 4).

TEOREMA 5.2. Si el lazo $(A,\#)$ es un isótopo principal del lazo $(A,\&)$ entonces existen elementos a, b de A tales que $(D(b), I(a), i_A)$ es una isotopía principal de $(A,\&)$ a $(A,\#)$.

Prueba : Sea (f, g, i_A) la isotopía principal dada entre $(A,\#)$ y $(A,\&)$. Entonces :

$$f(x) \& g(y) = i_A(x \# y) \quad . \tag{5.2.1}$$

Sea e la identidad del lazo $(A, \#)$. Tómese $a = f(e)$ y $b = g(e)$. Es claro que para todo x de A:

$$\begin{aligned} x = x \# e &= f(x) \& g(e) \\ &= f(x) \& b, \end{aligned}$$

por (5.2.1) y por definición de b. Pero de la ecuación

$$f(x) \& b = x$$

considerada como una "ecuación de primer grado en $f(x)$", se sigue :

$$f(x) = x / b \ . \tag{5.2.2}$$

De modo semejante :

$$\begin{aligned} y = e \# y &= f(e) \& g(y) \\ &= a \& g(y) \end{aligned}$$

implica que

$$g(y) = a \setminus y \tag{5.2.3}$$

Como todos los elementos de A son de la forma $x \& b$ o $a \& y$ (por el postulado de la existencia de soluciones únicas para ecuaciones $x \& b = c$ ó $a \& y = c$), es posible sustituír a x por $x \& b$ y a y por $a \& y$ en

(5.2.1), después de haber reemplazado los valores $f(x)$ y $g(y)$ por sus expresiones explícitas (5.2.2) y (5.2.3) : la ecuación (5.2.1) queda en la forma :

$$(x / b) \;\&\; (a \backslash y) = (x \# y),$$

y con las sustituciones indicadas obtenemos :

$$(x \& b) \# (a \& y) = ((x \& b) / b) \& (a \backslash (a \& y)).$$

Pero por la existencia de soluciones únicas para las ecuaciones $z \& b = (x \& b)$ y $a \& z = (a \& y)$ consideradas como "ecuaciones de primer grado en z",

$$(x \& b) / b = x$$

y

$$a \backslash (a \& y) = y .$$

Por lo tanto :

$$(x \& b) \# (a \& y) = x \& y ,$$

y esto es precisamente :

$$(D(b)(x)) \# (I(a)(y)) = i_A(x \& y) .$$

Por lo tanto $(A,\&)$ es un isótopo principal de $(A,\#)$ bajo la isotopía $(D(b), I(a), i_A)$, **QED.**

Utilizando traslaciones definidas con respecto a la operación $\#$ es posible probar fácilmente que existen elementos c,d en A tales que las traslaciones $D(c)$ e $I(d)$ son equivalentes a las funciones f,g originales, en el sentido de que para todo x, y :

$$f(x) \& g(y) = D(c)(x) \& I(d)(y).$$

Utilizando la ecuación

$$x\#y = (x/b) \& (a \setminus y)$$

como una *definición* de una nueva operación $\#$ dado un cuasigrupo cualquiera $(A,\&)$, es posible probar el

TEOREMA 5.3. Todo cuasigrupo es isotópico a un lazo.

Prueba : Sea $(A,\&)$ el cuasigrupo, y $(A,\#)$ el isótopo definido arriba : Basta probar que el elemento $a\&b$ es en realidad la identidad con respecto a la operación $\#$:

$$x \# (a\&b) = (x/b) \& (a \setminus (a\&b))$$
$$= (x/b) \& b = x$$

pues $(a \setminus (a\&b)) = b$ por la existencia de soluciones únicas, y $(x/b)\&b = x$ por la misma razón : Por lo tanto $x\#(a\&b) = x$, y de la misma manera $(a\&b) \# y = y$, **QED.**

Este teorema muestra que no todo isótopo de un lazo es un lazo. Por eso es conveniente indicar claramente en un contexto dado si se está hablando de todos los isótopos de un lazo, o sólo de los lazos isótopos.

Como ejemplos de este curioso comportamiento de los isótopos se puede considerar el cuasigrupo $(R^+, :)$ de los reales positivos con la división ordinaria :

$$a \,\&\, b = a : b$$

$$a \setminus b = a : b$$

$$b \,/\, a = b \,.\, a$$ (Ver Sección 4) .

El isótopo principal $(R^{+}, \#)$ sería :

$$\begin{aligned} x \# y &= (x / b) \,\&\, (a \setminus y) \\ &= (x \,.\, b) : (a : y) \\ &= (x \,.\, b \,.\, y) : a \\ &= (x \,.\, y) : (a : b). \end{aligned}$$

Seleccionando $a = 1$ y $b = 1$ tenemos como identidad el elemento $a \& b = 1 : 1 = 1$, y como nueva operación

$$x \# y = (x \,.\, y) : 1 = x \,.\, y$$

Por lo tanto el cuasigrupo original, un cuasigrupo sin unidad, es isotópico al lazo (más aún, ¡al grupo !) de los reales positivos con la multiplicación ordinaria.

Más curioso es el caso del grupoide de los reales positivos con la potenciación, seleccionando $a = e$ (base natural) y $b = 1$. Se puede comprobar que la nueva operación es :

$$x \# y = x^{\ln y}$$

($\ln y$ es el logaritmo natural de y), y que la identidad $e = a \,\&\, b$ es precisamente e, la base natural :

$$e \# y = e^{\ln y} = y$$

$$x \# e = x^{\ln e} = x^{1} = x \,.$$

Puede comprobarse fácilmente que la operación $\#$ es asociativa, y que por lo tanto el isótopo principal $(A, \#)$ es un monoide. Pero aunque existan estructuras no asociativas isotópicas a estructuras asociativas, la asociatividad permite probar un teorema de gran importancia, que explica por qué el concepto de isotopía no se utiliza en la teoría de grupos :

TEOREMA 5.4 : Dos grupos isotópicos son isomorfos.

Prueba : Este teorema se deduce fácilmente de un teorema mucho más general :

TEOREMA 5.5. Si $(A,\#)$ es un grupoide con identidad isotópico al semigrupo $(A,\&)$, entonces $(A,\#)$ y $(A,\&)$ son isomorfos.

Prueba : Sea e la identidad de $(A, \#)$ y (f, g, i_A) la isotopía. Defínase :

$$a = f(e)$$
$$b = g(e).$$

Entonces $x = x \# e = f(x) \& g(e) = f(x) \& b = D(b)[f(x)]$ y :

$$x = e \# x = f(e) \& g(x) = a \& g(x) = I(a)[g(x)] .$$

Por lo tanto $D(b)$ e $I(a)$ son los inversos de las biyecciones f y g, y podemos escribir :

$$f = D(b)^{-1}$$
$$g = I(a)^{-1} .$$

Como $D(b)(a \& x) = a \& x \& b$ y

$$I(a)(y \& b) = a \& y \& b$$

(no hacen falta paréntesis, pues la operación $\&$ es asociativa), se deduce que :

$$D(b)^{-1}(a \& x \& b) = a \& x \qquad (5.5.1)$$

y

$$I(a)^{-1}(a \& y \& b) = y \& b. \qquad (5.5.2)$$

Si se estudia ahora la aplicación $h = I(a)\,D(b)$ de A a A que a un elemento z de A asocia $h(z) = a \& z \& b$, se puede ver que :

$$\begin{aligned} h(x \& y) &= a \& (x \& y) \& b \\ &= (a \& x) \& (y \& b) \\ &= D(b)^{-1}(a \& x \& b) \& I(a)^{-1}(a \& y \& b) \\ &= f[h(x)] \& g[h(y)] \\ &= h(x) \# h(y), \end{aligned}$$

utilizando respectivamente la asociativa de $\&$, las ecuaciones (5.5.1) y (5.5.2), las definiciones de f, g, h y la definición de isotopía. Por lo tanto :

$$h(x \& y) = h(x) \# h(y),$$

y h es un isomorfismo de $(A, \&)$ a $(A, \#)$, QED.

Ahora es fácil completar la prueba del Teorema 5.4, pues si $(A,\#)$ es un grupo, también es un grupoide con unidad, y si $(A, \&)$ es un grupo, también es un semigrupo. Por lo tanto, si el grupo $(A, \#)$ es isotópico al grupo $(A,\&)$, $(A, \#)$ y $(A,\&)$ son isomorfos, QED.

Pero esta prueba utiliza esencialmente la asociatividad de la operación &, y por lo tanto no es válida para lazos isotópicos. En concreto, en los lazos de orden 5 hay cuatro isótopos no isomorfos (además del grupo cíclico de orden 5) y en lazos de orden 6 existen 22 clases de isotopía con 109 lazos no isomorfos (dos de ellos grupos). [R.H. Bruck dice en [Br63] que hay 17 clases de isotopía en los lazos de orden 6; éste es un error debido a que Fisher y Yates publicaron sólo 17 cuadros latinos, que serían las tablas de Cayley de los lazos que generan a todos los demás; pero hay cinco de esas tablas que por transposición sobre la diagonal principal, operación que no corresponde a una isotopía, producen otras cinco clases de isotopía distintas de las demás].

Debe subrayarse que el Teorema 5.4 no afirma que todo isótopo de un grupo es un grupo, sino sólo que dos grupos isotópicos son isomorfos; debe pues precisarse que se habla de grupos isotópicos. El problema más general no está resuelto :

¿ Qué condiciones son necesarias y suficientes para que un grupoide [resp. : un cuasigrupo, un lazo] sea isotópico a un grupo ?

En particular para los lazos el problema general más importante llamado *Problema de Isotopía-Isomorfismo,* tampoco está resuelto :

¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para que un lazo sea isomorfo con todos sus lazos isotópicos ?

Es claro que la asociatividad es suficiente, pues los lazos asociativos son los grupos ,y los grupos isotópicos son isomorfos. Pero la condición no es necesaria, pues existen estructuras no asociativas que cumplen la propiedad de ser isomorfas con todos sus isótopos; algunos resultados conocidos son :

El lazo multiplicativo de un anillo de división alternativo satisface la propiedad de ser isomorfo con todos sus isótopos. [Un sistema alternativo satisface la propiedad alternativa a izquierda y a derecha. Ver Sección 3.] Ver [Br66], p. 57.

Dos lazos libres isotópicos son isomorfos. Ver [Ev53].

Dos lazos de Moufang conmutativos isotópicos son isomorfos. Ver [Br66], p. 57 y pp. 120 ss.

Dos lazos totalmente simétricos, es decir, que son conmutativos y satisfacen la identidad : $x(xy) = y$, *que son isotópicos, son isomorfos.* Ver [Br44].

El problema de Isotopía-Isomorfismo es equivalente al siguiente problema geométrico :

¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para que todos los lazos inducidos por una misma red triple sean isomorfos ? La referencia principal para este problema es el libro de Pickert [Pi55].

En otra dirección, Eric Wilson distingue entre propiedades aisladas y propiedades que se cumplen en todas partes, si éstas son satisfechas por sólo algunos o por todos los lazos de una misma clase de isotopía, y desarrolla en su tesis ya citada una serie de condiciones suficientes del segundo tipo para el problema de Isotopía-Isomorfismo. [No debe confundirse una propiedad aislada con una "propiedad local", que es una propiedad P de un lazo infinito que satisface la condición : Si todo sub-lazo generado por un número finito de elementos del lazo original cumple P , entonces el lazo original cumple P. Una propiedad aislada o una propiedad local no debe confundirse tampoco con una propiedad que se cumple localmente, es decir, que se cumple en todo sub-lazo generado por un número finito de elementos. Ver [Br66] , p. 102] .

6. *ASOCIADORES Y NÚCLEOS.*

Así como la ausencia de conmutatividad permite definir los *conmutadores* $[a,b]$ por la ecuación : $a . b . [a,b] = b . a$, la ausencia de asociatividad permite definir en los lazos los *asociadores* :

$$(a(bc))[a;b,c] = (ab)c$$
$$((ab)c)[a,b;c] = a(bc).$$

Paralelamente, así como la ausencia de conmutatividad permite definir el *centro* como el subconjunto de elementos que conmutan con todos los demás :

$$C = \{ a; (x) , ax = xa \} ,$$

la ausencia de asociatividad permite definir no sólo uno sino cuatro *núcleos* distintos :

$$N_d = \{ a; (x)(y) , (xy)a = x(ya) \}$$
$$N_i = \{ a; (x)(y), (ax)y = a(xy) \}$$
$$N_c = \{ a; (x)(y) , (xa)y = x(ay) \}$$
$$N = N_d \cap N_i \cap N_c ,$$

llamados respectivamente : *núcleo derecho*, *izquierdo*, *central* y el último sencillamente *núcleo*. El interés de estos subconjuntos es que cada uno de ellos forma un grupo con la operación restringida al subconjunto respectivo, y por lo tanto es posible aplicar resultados de la teoría de grupos al estudio de los lazos. El teorema más importante es que los núcleos derechos, izquierdos y centrales de dos lazos isotópicos son isomorfos. La primera afirmación de este párrafo se puede ilustrar con el

TEOREMA 6.1. El núcleo izquierdo de un lazo es un grupo.

Prueba : Clausurativa : si a,b están en N_i, considérese el elemento $z = ab$. Si c,d están en N_i debemos probar que

$$z(cd) = (zc)d.$$

$$\begin{aligned} z(cd) &= (ab)(ca) \\ &= a[b(cd)] \\ &= a[(bc)d] \\ &= [a(bc)]d \\ &= [(ab)c]d = (zc)d. \end{aligned}$$

Nótese que en cada paso se considera un producto como un solo elemento x con el cual se hace la asociación, aprovechando el hecho de que a (o b) están en el núcleo izquierdo.

Asociativa : es clara por definición de N_i.

Modulativa : si e es el elemento neutro del lazo,

$$e(bc) = (bc) = (eb)c ,$$

y por lo tanto e está en N_i .

Invertiva : si a está en N_i , considérese el inverso a izquierda de a, a^i. Por definición de inverso a izquierda :

$$a^i a = e .$$

Multiplicando a izquierda por a :

$$a(a^i a) = ae = a .$$

Pero como a está en el núcleo izquierdo :

$$a(a^i a) = (aa^i)a,$$

y por lo tanto :

$$(aa^i)a = a .$$

Por unicidad de soluciones, como e es la solución de

$$xa = a ,$$

entonces $$(aa^i) = e .$$

pero por definición de inverso a derecha, a^d es la solución de

$$ax = e ,$$

y por lo tanto por unicidad de soluciones

$$a^i = a^d ,$$

y podemos escribir simplemente a^{-1}.

Ahora debemos probar que el inverso de a también pertenece a N_i. Supóngase lo contrario. Entonces existen elementos b,c en el lazo tales que :

$$a^{-1}(bc) \neq (a^{-1}b)c\ .$$

Por unicidad de soluciones, la multiplicación a izquierda preserva la desigualdad, y por lo tanto :

$$a[a^{-1}(bc)] \neq a[(a^{-1}b)c]\ .$$

Pero como a está en el núcleo izquierdo, el lado izquierdo es :

$$\begin{aligned} a[a^{-1}(bc)] &= (aa^{-1})(bc) \\ &= e(bc) \\ &= bc\ . \end{aligned}$$

Por la misma razón, el lado derecho es :

$$\begin{aligned} a[(a^{-1}b)c] &= [a(a^{-1}b)]c \\ &= [(aa^{-1})b]c \\ &= (eb)c \\ &= bc\ , \end{aligned}$$

y llegamos a una contradicción. Por lo tanto,

$$a^{-1}(bc) = (a^{-1}b)c\ ,$$

y a^{-1} también pertenece al núcleo izquierdo.

Por lo tanto el núcleo izquierdo es un grupo, QED.

Las pruebas para los núcleos derecho y central son paralelas. El núcleo es una intersección de grupos y por lo tanto es un grupo.

En cuanto al teorema principal de los núcleos, nos limitaremos también al caso del núcleo izquierdo : dado que es suficiente estudiar el caso de los isótopos principales, podemos enunciar el

TEOREMA 6.2. Si los lazos $(A, \#)$ *y* $(A, \&)$ *son isotópicos, entonces sus nucleos izquierdos son isomorfos.*

Prueba : Como los lazos dados son isótopos principales, existen elementos a, b de A tales que

$$x \neq y = (x / b) \& (a \setminus y).$$

Defínase una aplicación h como la restricción al núcleo izquierdo (relativo a la operación $\&$) de la composición de traslaciones $D(b)\, d(a)$. Por lo tanto, para un elemento n del núcleo mencionado :

$$h(n) = D(b)\, D(a)\, (n) = D(b)\, (n \& a) = (n \& a) \& b.$$

Pero como n está en el núcleo izquierdo,

$$h(n) = n \& (a \& b) .$$

Debemos probar primeramente que el elemento $h(n)$ está en el núcleo izquierdo (relativo a la operación $\#$), o sea que para todo c, d de A :

$$h(n) \# (c \# d) = [h(n) \# c] \# d. \qquad (6.2.1)$$

El único paso oscuro en la prueba está dado por el lema siguiente

LEMA 6.3. Si n *esta en el núcleo izquierdo relativo a la operación* $\&$, *entonces* $n \& (c / b) = (n \& c) / b$.

Prueba : El elemento c/b es la solución única de la ecuación $x \& b = c$.

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por n:

$$n \& (x \& b) = n \& c \, .$$

Como n está en el núcleo izquierdo,

$$n \& (x \& b) = (n \& x) \& b \, ,$$

y por lo tanto :

$$(n \& x) \& b = n \& c \, .$$

Pero la solución única de la ecuación

$$y \& b = n \& c$$

es precisamente $(n \& c)/b$, y por lo tanto :

$$(n \& x) = (n \& c)/b \, ,$$

o sea :

$$n \& (c/b) = (n \& c)/b \, , \qquad \text{QED.}$$

Utilizando este lema podemos transformar el lado izquierdo de (6.2.1) utilizando la definición explícita de $\#$ y el hecho de que n está en el núcleo izquierdo relativo a $\&$:

$$\begin{aligned}
h(n) \# (c \# a) &= [\, n \& (a \& b) \,] \# [\, (c/b) \& (a \backslash d) \,] \\
&= ([n \& (a \& b)\,]/b) \& (a \, [(c/b) \& (a \backslash d)]) \\
&= ([(n \& a) \& b\,]/b) \& (a \, [(c/b) \& (a \backslash d)]) \\
&= (n \& a) \& (a \, [\, (c/b) \& (a \backslash d) \,]) \\
&= n \& [a \& (a \, [(c/b) \& (a \backslash d)\,])\,] \\
&= n \& [\, (c/b) \& (a \backslash d) \,] \\
&= [\, n \& (c/b) \,] \& (a \backslash d) \\
&= [\, (n \& c)/b] \& (a \backslash d) \quad \text{(por el lema 6.3).}
\end{aligned}$$

Transformando ahora el lado derecho de (6.2.1) :

$$\begin{aligned}
[h(n)\,\#\,c]\,\#\,d &= [([n\&(a\&b)]\,\#\,c)/b]\,\&\,(a\backslash d) \\
&= ([(\,[n\&(a\&b)]\,/b)\&(a\backslash c)]/b)\,\&(a\backslash d) \\
&= ([([(n\&a)\&b]\,/\,b)\&(a\backslash c)]/\,b)\&(a\backslash d) \\
&= ([(n\&a)\&(a\backslash c)]/\,b)\&(a\backslash d) \\
&= [(n\&[a\&(a\backslash c)]\,)/\,b]\&(a\backslash d) \\
&= [\,(n\&c)\,/\,b\,]\,\&(a\backslash d)
\end{aligned}$$

que es igual a la transformación última realizada sobre $h(n)\,\#\,(c\,\#\,d)$, y por lo tanto

$$h(n)\,\#\,(c\,\#\,d) = [\,h(n)\,\#\,c\,]\,\#\,d,$$

y $h(n)$ está en el núcleo izquierdo relativo a $\#$.

Ahora es suficiente mostrar que si n,m están en el núcleo izquierdo relativo a $\&$, entonces :

$$h(n\&m) = h(n)\,\#\,h(m), \qquad (6.2.2)$$

o sea que h "preserva operaciones" en el núcleo izquierdo.

$$\begin{aligned}
h(n\&m) &= (n\&m)\&(a\&b) \\
&= [(n\&m)\&a\,]\,\&b \\
&= [\,n\&(m\&a))\,]\&b \\
&= n\&[(m\&a)\&b\,] \\
&= n\&[\,a\&(a\backslash[(m\&a)\&b])\,] \\
&= (n\&a)\&(a\backslash[(m\&a)\&b]\,) \\
&= ([(n\&a)\&b\,]/\,b)\,\&(a\backslash[(m\&a)\&b\,])
\end{aligned}$$

$$= [\,(n\&a)\&b\,]\ \#\ [\,(m\&a)\&b\,]$$
$$= [\,n\&(a\&b)\,]\ \#\ [\,m\&(a\&b)\,]$$
$$= h(n)\ \#\ h(m)\ .$$

Por lo tanto h es un homomorfismo inyectivo de un núcleo izquierdo en el otro, y repitiendo la demostración a partir del núcleo izquierdo relativo $\#$, se encuentra un homomorfismo inyectivo h' en la otra dirección. Por lo tanto los núcleos izquierdos son isomorfos, QED.

El núcleo de un lazo no debe confundirse con la médula ("core") de un lazo flexible, que es una nueva operación definida sobre el lazo por :

$$x+y = x\,y^{-1}\,x\ .$$

Nótese que no hacen falta paréntesis por la flexibilidad, y que por esa misma propiedad puede escribirse y^{-1}, pues en un lazo flexible el inverso a izquierda es igual al inverso a derecha. La sencilla prueba se basa en la unicidad de soluciones, y se deja para entretenimiento de los lectores.

La médula tiene relación con la reflexión de líneas en una red triple. Ver [Br66] , p. 120.

6. *CONCLUSIÓN* .

Esta somera introducción a la terminología y a la problemática de los lazos algebraicos abstractos es suficiente para mostrar algunos aspectos atrayentes de la teoría, y ojalá para interesar a muchos de los lectores por el estudio de los sistemas no asociativos.

Como pudo verse, el aspecto puramente algebraico, el aspecto geométrico y el aspecto combinatorio dan gran variedad a los métodos y a los modelos, y cada cual puede estudiar los lazos algebraicos desde el punto de vista de su predilección.

Para contribuir al esparcimiento en los ratos de ocio del Congreso, puede proponerse para terminar, un sencillo problema combinatorio :

La tabla de Cayley del grupo (lazo) cíclico de orden 5 es el cuadro latino siguiente :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}.$$

Hay 48 tablas distintas de este orden, dejando invariantes la primera fila y la primera columna. El problema es encontrar las otras 47.

BIBLIOGRAFIA

[Al42a] Albert, A.A. "Non-Associative Algebras. I. Fundamental Concepts and Isotopy" , *Ann. of Math.* (2) 43 (1942), 685-707.

[Al42b] Albert, A.A. "Non-Associative Algebras II. New Simple Algebras", *Ann. of Math.* (2) 43 (1942), 708-723.

[Al43] Albert, A.A. "Quasigroups I", *Trans. Amer. Math. Soc.* 54 (1943), 507-519.

[Al44] Albert, A.A. "Quasigroups II", *Trans. Amer. Math. Soc.* 55 (1944), 401-419.

[Al63] Albert, A.A. (editor). *Studies in Moaern Algebra.* M.A.A. Studies in Mathematics, vol. 2. The Mathematicas Association of America. Frentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1963.

[Ar53] Artzy, R. "Engenschaften von ebenen Viergeweben allgemeiner Lage", *Math. Ann.* 126 (1953), 336-342.

[Ar59a] Artzy, R. "Crossed Inverse and Related Loops", *Trans. Amer. Math.Soc.* 91 (1959), 480-492.

[Ar59b] Artzy, R. "On Automorphic-Inverse Properties in Loops", *Proc. Amer. Math. Soc.* 10 (1959), 588-591.

[Ar63] Artzy, R. " Net Motions and Loops", *Arch. Math.* 14 (1963), 95-101.

[Ba39] Baer, R. " Nets and Groups. I", *Trans. Amer. Math. Soc:* 46(1939,110-141.

[Ba40] Baer, R. "Nets and Groups. II" *Trans. Amer. Math. Soc.* 47 (1940), 435-439.

[BB38] Blaschke, W.; Bol. G. *Geometrie aer Gewebe. Topologische Fragen aer Differentialgeometrie.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 49. Julius Springer. Berlin, 1938.

[BK66] Braun, H.; Koecher, M. *Jordan-Algebren.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 128. Springer-Verlag. Berlin, 1966.

[Bl28] Blaschke, W. "Topologische Fragen der Differential-Geometrie. I. Thomsens Sechsgewebe. Zueinander diagonale Netze", *Math. Z.* 28 (1928), 150-157.

[Bo37] Bol, G. "Gewebe und Gruppen", *Math. Ann.* 114 (1937), 414-431.

[Br44] Bruck, R.H. "Some Results in the Theory of Quasigroups", *Trans. Amer. Math. Soc.* 55 (1944), 19-52.

[Br46] Bruck, R.H. "Contributions to the Theory of Loops", *Trans. Amer. Math. Soc.* 60 (1946), 245-354.

[Br58] Bruck, R.H. *A Survey of Binary Sistems.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 20. Springer-Verlag. Berlin, 1958.

[Br63] Bruck, R.H. "What is a Loop ?", en [Al63], pp. 59-99.

[Br66] Bruck, R.H. *A Survey of Binary Sistems.* (2a. edición). Ver arriba [Br58].

[BS66] Bryant, B.F.; Schneider, H. "Principal Loop-Isotopes of Quasigroups", *Canad. J. Math.* 18 (1966), 120-125.

[Ca90] Cayley, A. "On Latin Squares", *Mess. of Math.* 19 (1890), 135-137 [= *Coll. Papers* 13 (1897), 55-57]

[Ev53] Evans, T. "On multiplicative Systems defined by Generators and Relations II. Monogenic Loops", *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 49 (1953), 579-589.

[FY34] Fisher, R.A.; Yates, F. "The 6x6 Latin Squares", *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 30 (1934), 492-507.

[Ga40] Garrison, G.N. "Quasigroups", *Ann. of Math.* (2) 41 (1940), 474-487.

[Mo35] Moufang, R. "Zur Struktur von Alternativkorpern", *Math. Ann.* 110 (1934/35), 416-430.

[Mu39] Murdoch, D.C. "Quasi-groups which satisfy certain Generalized Associative Laws", *Amer. J. Math.* 61 (1939), 509-522.

[Mu41a] Murdoch, D.C. "Note on Normality in Quasi-groups", *Bull. Amer. Math. Soc.* 47 (1941), 134-138.

[Mu41b] Murdoch, D.C. "Structure of Abelian Quasi-groups", *Trans. Amer. Math. Soc.* 49 (1941), 392-409.

[No39] Norton, H.W. "The 7x7 Squares", *Ann. of Eugenics* 9 (1939), 269-307.

[Os61] Osborn, J.M. "New Loops from Old Geometries", *Amer. Math. Monthly* 68 (1961), 103-107.

[Pi55] Pickert, G. *Projektive Ebenen.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd, 80. Springer-Verlag. Berlin, 1955.

[Re29] Reidemeister, K. "Topologische Fragen der Differential-Geometrie. V. Gewebe und Gruppen", *Math. Z.* 29 (1929), 427-435.

[Re30] Reidemeister, K. *Vorlesungen uber Grundlagen der Geometrie.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 32. Julius Springer. Berlin, 1930.

[Sa51] Sade, A. "An Omission in Norton's List of 7x7 Squares", *Ann. Math. Stat.* 22 (1951), 306-307.

[Sc30] Schonhardt, E. "Uber lateinische Quadrate und Unionen", *J. fur d.r.u. angew. Math.* 163 (1930), 183-230.

[Th30] Thomsen, G. "Topologische Fragen der Differential-Geometrie. XII. Schnittpunktssatze in ebenen Geometrien", *Abhandl. math. Sem. Univ. Hamburg.* 7 (1930), 99-106.

[Va68] Vasco, C.E. *Homogeneous Identities on Algebraic Loops.* Doctoral Dissertation, Saint Louis University, 1968. University Microfilms, Order No. 68-14, 084.

[Wi66] Wilson, E.L. *Loop Isotopy.* Doctoral Dissertation, Vanderbilt University, 1966. University Microfilms, Order No. 66-8060.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, Sur América
y
Departamento de Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia, Sur América.

(Recibiao en junio de 1972)