

Werk

Titel: Una representacion de la transformacion de Hankel

Autor: Takeuchi, Y.

Jahr: 1970

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320387429_0004|log16

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

UNA REPRESENTACION DE LA TRANSFORMACION DE HANKEL

por
YU TAKEUCHI

§ 0 Introducción

Para la demostración de la fórmula inversa de Hankel se usa generalmente un método análogo a la demostración del teorema de Fourier - Plancherel [3], [2], [4]. En este trabajo, primero se demuestra que el espacio lineal determinado por el sistema de funciones $\{e^{-kx}, k=1, 2, \dots\}$ es denso en $L_2(0, \infty)$, y se construye una base del espacio L_2 , $\{\phi_n(x), n=1, 2, \dots\}$ por el método de Schmidt, donde $\phi_n(x)$ es una combinación lineal de $e^{-x}, e^{-2x}, \dots, e^{-nx}$:

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^n E_{n,k} e^{-kx} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Se puede determinar los coeficientes $E_{n,k}$ utilizando la propiedad ortogonal de los polinomios de Jacobi, así

$$E_{n,k} = (-1)^{k+1} \sqrt{2n} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! k! (n-k)!}.$$

De la misma forma, se demuestra que el espacio lineal determinado por el sistema de funciones $\{(1/2k) \exp(-x/4k), k=1, 2, \dots\}$ es denso en $L_2(0, \infty)$ y se construye otra base del espacio L_2 , $\{\psi_n(x)\}$. Pero tenemos

$$(e^{-nx}, e^{-kx}) = \left(\frac{1}{2n} e^{-x/4n}, \frac{1}{2k} e^{-x/4k} \right) \quad \text{para todo } n, k$$

entonces los coeficientes de $\psi_n(x)$ son iguales a los coeficientes de $\phi_n(x)$, o sea

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n E_{n,k} \frac{1}{2k} e^{-x/4k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Como los dos tipos de funciones exponenciales e^{-kx} , $(1/2k) e^{-x/4k}$ están relacionadas por la transformación integral de Hankel [7] [12] entonces las dos bases $\{\phi_n\}$, $\{\psi_n\}$ están ligadas por la transformación, así se demuestra que la transformación de Hankel es un operador unitario en el espacio L_2 .

§ 1 Algunas propiedades de los sistemas de funciones en $L_2(0, \infty)$

Lema 1.

Sea $\lambda(x)$ medible en $[0, \infty)$ tal que $|\lambda(x)|$, $1/|\lambda|$ sean acotadas en cualquier intervalo acotado. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un sistema de funciones en $L_2(0, \infty)$ tal que $\lambda\phi_n \in L_2(0, \infty)$ para todo n , entonces el sistema $\{\phi_n\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2 si y solo si el sistema $\{\lambda\phi_n\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2 .

Demostración

Dada $f \in L_2$ dado cualquier $\epsilon (> 0)$ existe N tal que

$$\int_N^\infty |f(x)|^2 dx < (\epsilon/2)^2.$$

Sea

$$f_1(x) = f(x) \quad (x < N), \quad f_1(x) = 0 \quad (x \geq N)$$

entonces

$$\|f - f_1\| < \epsilon/2. \quad (1)$$

i) Supongamos que $\{\phi_n\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2 . Como f_1/λ pertenece a $L_2(0, \infty)$ entonces existe una combinación lineal de ϕ_n tal que

$$\|f_1/\lambda - \sum_{k=1}^n A_k \phi_k\| < \epsilon/2M$$

donde

$$M = \sup_{x \in [0, N]} |\lambda(x)|.$$

Multiplikando por λ se tiene :

$$\|f_1 - \sum_{k=1}^n A_k \lambda \phi_k\| < \frac{\epsilon}{2M} \cdot M = \epsilon/2. \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos :

$$\|f - \sum_{k=1}^n A_k (\lambda \phi_k)\| < \epsilon,$$

o sea que $\{\lambda \phi_k\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2 .

ii) Supongamos que $\{\lambda \phi_n\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2 . Como f_1/λ pertenece a L_2 , entonces existe una combinación lineal de $\lambda \phi_k$ tal que

$$\|f_1/\lambda - \sum_{k=1}^n B_k (\lambda \phi_k)\| < \epsilon/2M,$$

donde $M' = \sup_{x \in [0,1]} |1/\lambda(x)|$. Dividiendo por λ tenemos

$$\| f_1 - \sum_{k=1}^n B_k \phi_k \| < \frac{\epsilon}{2M'} M' = \epsilon/2. \quad (3)$$

De (1) y (3) se tiene que el sistema $\{\phi_k\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2 .

Lema 2.

Sea μ una función medible, estrictamente creciente y derivable tal que

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(+\infty) = +\infty.$$

Si $\{\phi_n, n = 1, 2, \dots\}$ es un sistema ortonormal completo en $L_2(0, \infty)$ entonces el sistema :

$$\{ \phi_n(\mu(x)) \sqrt{\mu'(x)} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \}$$

también lo es.

Demostración

$$\begin{aligned} i) \quad & \int_0^\infty \phi_n(\mu(x)) \sqrt{\mu'(x)} \overline{\phi_k(\mu(x)) \sqrt{\mu'(x)}} dx \\ &= \int_0^\infty \phi_n(\mu(x)) \overline{\phi_k(\mu(x))} \mu'(x) dx = \int_0^\infty \phi_n(t) \overline{\phi_k(t)} dt = \delta_{n,k}. \end{aligned}$$

ii) Sea $f(x) \in L_2(0, \infty)$ entonces

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Sea ν la función inversa de μ , entonces haciendo un cambio de variable $x = \nu(t)$ (es decir $t = \mu(x)$) tenemos :

$$\int_0^\infty |f(\nu(t))|^2 \nu'(t) dt < +\infty,$$

esto es :

$$f(\nu(t)) \sqrt{\nu'(t)} \in L_2(0, \infty).$$

Luego, podemos desarrollar $f(\nu(t)) \sqrt{\nu'(t)}$ como sigue :

$$f(\nu(t)) \sqrt{\nu'(t)} = \sum_{k=1}^\infty A_k \phi_k(t) \quad (4)$$

donde $\sum_{k=1}^\infty |A_k|^2 < +\infty$.

En (4) reemplazando $\nu(t) = x$ tenemos :

$$f(x) \frac{1}{\sqrt{\mu'(x)}} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_k(\mu(x))$$

ya que $t = \mu(x)$, $\nu'(t) = 1/\mu'(x)$. Multiplicando por $\sqrt{\mu'(x)}$ se tiene

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_k(\mu(x)) \sqrt{\mu'(x)}, \quad (5)$$

esto nos demuestra que $\{\phi_k(\mu(x)) \sqrt{\mu'(x)}, k = 1, 2, \dots\}$ es un sistema completo.

Corolario

Si $\{\phi_n(x)\}$ es un sistema ortonormal completo, entonces los siguientes sistemas también lo son:

$$i) \{\phi_n(x^2) \sqrt{2x}\} \quad ii) \{a \phi_n(a^2 x)\} \quad (a > 0).$$

§ 2. El sistema de las funciones e^{-nx} , $n = 1, 2, \dots$.

Teorema 1

Las funciones $e^{-x}, e^{-2x}, \dots, e^{-nx}, \dots$ determinan un subespacio lineal denso en $L_2(0, \infty)$.

Demostración

Dada una función $f \in L_2(0, \infty)$ y dado un $\epsilon > 0$ existe $f_1(x)$ [6][4]

$$f_1(x) = p_m(x) e^{-x}, \quad p_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$$

tal que

$$\|f - f_1\| \leq \epsilon/2.$$

Sea

$$q_m(x) = |a_0| + |a_1| x + \dots + |a_m| x^m$$

entonces existe B tal que

$$\int_B \{q_m(x)\}^2 e^{-2x} dx < \epsilon^2/32 \quad (6)$$

En el intervalo $[0, B]$, $p_m(x)$ es continua uniformemente, entonces existe δ tal que

$$|x - x'| < \delta \quad \text{implica} \quad |p_m(x) - p_m(x')| < \epsilon/32. \quad (7)$$

Ahora, consideramos el siguiente cambio de variable:

$$1 - e^{-x} = y \quad (x \geq 0, 0 \leq y < 1)$$

entonces

$$x = -\log(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^n}{n} + R$$

donde

$$R = \int_0^y \frac{y^n}{1-y} dy \quad (\#)$$

(#) Nota:

$$1 + y + \dots + y^{n-1} = \frac{1-y^n}{1-y}$$

$$-\log(1-y) = \int \frac{1}{1-y} dy = y + \dots + \frac{y^n}{n} + \int \frac{y^n}{1-y} dy$$

* * * *

Si $y \leq y_0 = 1 - e^{-B} < 1$ entonces

$$|R| \leq \int_0^y \frac{y^n}{1-y_0} dy \leq \frac{1}{1-y_0} \int_0^{y_0} y^n dy = \frac{1}{1-y_0} \frac{(y_0)^{n+1}}{n+1}$$

Como y_0 es menor que 1 existe n tal que

$$\frac{1}{1-y_0} \frac{(y_0)^{n+1}}{n+1} < \delta$$

entonces tenemos (por (7)):

$$|p_m(x) - p_m(\sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k})| < \epsilon/2 \quad (8)$$

La siguiente función:

$$g(x) = p_m(\sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k}) = p_m(\sum_{k=1}^n \frac{(1-e^{-x})^k}{k})$$

es una combinación lineal de

$$1, e^{-x}, e^{-2x}, \dots, e^{-nm x}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |p_m(x) - g(x)|^2 e^{-2x} dx \\ &= \int_0^B |p_m(x) - g(x)|^2 e^{-2x} dx + \int_B^\infty |p_m(x) - g(x)|^2 e^{-2x} dx \quad (9) \end{aligned}$$

Pero

$$|g(x)| = |p_m(\sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k})| \leq q_m(\sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k}) \leq q_m(x)$$

entonces

$$2 |q_m(x)| \geq |p_m(x)| + |g(x)| \geq |p_m(x) \cdot g(x)|,$$

por lo tanto se tiene la siguiente desigualdad:

$$\int_B |p_m(x) \cdot g(x)|^2 e^{-2x} dx \leq 4 \int_B \{q_m(x)\}^2 e^{-2x} dx < \epsilon^2/8. \quad (10)$$

Por otra parte, de (8) tenemos

$$\int_0^B |p_m(x) \cdot g(x)|^2 e^{-2x} dx \leq (\epsilon^2/4) \int_0^B e^{-2x} dx \leq (\epsilon^2/8). \quad (11)$$

De (9), (10) y (11) tenemos:

$$\int_0^\infty |p_m(x) \cdot g(x)|^2 e^{-2x} dx < \frac{\epsilon^2}{8} + \frac{\epsilon^2}{8} = \frac{\epsilon^2}{4}$$

o sea que

$$\|f_1 \cdot g(x) e^{-x}\| = \|p_m(x) e^{-x} \cdot g(x) e^{-x}\| < \epsilon/2. \quad (12)$$

Nota.

Profesor Juan Jorvath (Universidad de Maryland) me mandó la siguiente demostración sencilla del teorema.

Las funciones f continuas que se anulan para x grande forman un conjunto denso en $L_2(0, \infty)$. Sea luego f una tal función con $f(x) = 0$ para $x > a$. Pongamos

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(-\log t)}{t} & \text{si } \beta \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \beta \end{cases}$$

donde $\beta = -\log a$. Por el teorema de Weierstrass existe para $\epsilon > 0$ un polinomio $\sum a_n t^n$ tal que $|F(t) - \sum a_n t^n| < \epsilon$ y además se puede tomar $a_0 = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(x) \cdot \sum a_n e^{-(1+n)x}|^2 dx &= \int_0^1 |f(-\log t) \cdot \sum a_n t^{n+1}|^2 \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 |F(t) \cdot \sum a_n t^n|^2 t dt \leq \epsilon^2 \int_0^1 t dt = \epsilon^2/2. \end{aligned}$$

A partir del sistema $e^{-x}, e^{-2x}, \dots, e^{-nx} \dots$ por el método de Schmidt se puede construir un sistema ortonormal completo $\{\phi_n(x), n = 1, 2, \dots\}$:

$$(\phi_n, \phi_k) = \int_0^\infty \phi_n(x) \phi_k(x) dx = \delta_{n,k}$$

donde $\phi_n(x)$ es una combinación lineal de $e^{-x}, e^{-2x}, \dots, e^{-nx}$, digamos

$$\phi_n(x) = E_{n,1} e^{-x} + E_{n,2} e^{-2x} + \dots + E_{n,n} e^{-nx} \quad (13)$$

Ahora, vamos a encontrar los valores de $E_{n,k}$.

Sean $G_n(2,2,t) = F(n+2, -n, 2, t)$ ($n = 0, 1, \dots$) los polinomios de Jacobi, entonces sabemos la siguiente relación ortogonal: [8][11][10]

$$\int_0^1 t \{ G_{n-1}(t) G_{k-1}(t) \} dt = \frac{1}{2n^3} \delta_{n,k}.$$

Haciendo el cambio de variable $t = e^{-x}$ se tiene :

$$\int_0^\infty e^{-x} G_{n-1}(e^{-x}) G_{k-1}(e^{-x}) (-e^{-x}) dx = (1/2n^3) \delta_{n,k}.$$

$$\int_0^\infty \{ e^{-x} G_{n-1}(e^{-x}) \} \{ e^{-x} G_{k-1}(e^{-x}) \} dx = \frac{1}{2n^3} \delta_{n,k} \quad (14)$$

Como $e^{-x} G_{n-1}(e^{-x})$ es una combinación lineal de $e^{-x}, e^{-2x}, \dots, e^{-nx}$, entonces tenemos la siguiente identidad :

$$\phi_n(x) = e^{-x} G_{n-1}(e^{-x}) \sqrt{2n^3} = \sqrt{2n^3} e^{-x} F(n+1, -n+1, 2, e^{-x}). \quad (15)$$

Utilizando la expresión explícita de los polinomios de Jacobi, tenemos

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = \sqrt{2n^3} \{ e^{-x} \cdot \frac{n^2 - 1^2}{2(1!)^2} e^{-2x} + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)}{3(2!)^2} e^{-3x} \\ \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)(n^2 - 3^2)}{4(3!)^2} e^{-4x} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n^2 - 1^2) \dots \{n^2 - (n-1)^2\}}{n \{(n-1)!\}^2} e^{-nx} \} \end{aligned} \quad (16)$$

Entonces, tenemos los coeficientes de la combinación como sigue :

$$E_{n,1} = \sqrt{2n^3}, \quad E_{n,2} = -\sqrt{2n^3} \frac{n^2 - 1^2}{2(1!)^2}, \dots \dots \dots$$

En general

$$E_{n,k} = (-1)^{k-1} \sqrt{2n^3} \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots(n^2-(k-1)^2)}{k((k-1)!)^2}$$

$$= (-1)^{k-1} \sqrt{2n} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! k! (n-k)!} \quad (17)$$

En la tabla 1 se muestra algunos valores de $E_{n,k}$.

TABLA 1

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	$\sqrt{2}$					
2	4	-6				
3	$3\sqrt{6}$	$-12\sqrt{6}$	$10\sqrt{6}$			
4	$8\sqrt{2}$	$-60\sqrt{2}$	$120\sqrt{2}$	$-70\sqrt{2}$		
5	$5\sqrt{10}$	$-60\sqrt{10}$	$210\sqrt{10}$	$-280\sqrt{10}$	$126\sqrt{10}$	
6	$12\sqrt{3}$	$-210\sqrt{3}$	$1120\sqrt{3}$	$-2520\sqrt{3}$	$2520\sqrt{3}$	$-924\sqrt{3}$

También, se puede demostrar inmediatamente que $\phi_n(x)$ satisface la siguiente ecuación diferencial :

$$(e^x - 1) \frac{d^2 \phi_n}{dx^2} + e^x \frac{d \phi_n}{dx} + n^2 \phi_n = 0 \quad (18)$$

§ 3. El sistema de las funciones $e^{-x/k}$, $k = 1, 2, \dots$.

Teorema 2

Las funciones

$$e^{-x/2} e^{-x}, e^{-x/2} e^{-x/2}, \dots, e^{-x/2} e^{-x/k}, \dots$$

determinan un subespacio lineal denso en $L_2(0, \infty)$.

Demostración

Sabemos que las siguientes funciones : [5] [10]

$$u_n(x) = L_n(x) e^{-x/2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde $L_n(x)$ es el polinomio de Laguerre de grado n ,
 forman un sistema ortonormal completo en $L_2(0, \infty)$. Sea

$$f_k(x) = e^{-x/2} e^{-x/k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} u_n(x) \quad (19)$$

entonces

$$a_n^{(k)} = (f_k, u_n) = \int_0^{\infty} L_n(x) \exp\left\{-\left(x + \frac{x}{k}\right)\right\} dx.$$

Utilizando la relación conocida [5] [7]

$$\frac{1}{1-t} \exp\left\{-\frac{xt}{1-t}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} L_n(x) \exp\left\{-x\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right\} dx t^n \\ = \frac{1}{1-t} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{xt}{1-t}\right\} \exp\left\{-x\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right\} dx \\ = \frac{k}{k+1-t} = \frac{k}{k+1} \frac{1}{1-t/(k+1)} = \frac{k}{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^n} t^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$a_n^{(k)} = \frac{k}{k+1} \left[\frac{1}{k+1}\right]^n, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Sean

$$b^{(k)} = u_0 + \frac{1}{k+1} u_1 + \dots + \frac{1}{(k+1)^n} u_n + \dots \in L_2, \quad (21)$$

Si $\mathcal{M}$ es el subespacio lineal determinado por el sistema (21) entonces

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b^{(k)} = u_0 + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k+1)^j} \right\} u_j \in \mathcal{M}.$$

Pero :

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k+1)^j} \right\} u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k+1)^j} \right\}^2$$

$$\leq \frac{1}{N^2} \left\{ \int_1^{N+1} \frac{1}{y} dy \right\}^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{j=2}^{\infty} \left\{ \int_1^{\infty} \frac{1}{y^j} dy \right\}^2$$

$$= \frac{1}{N^2} \{ \log(N+1) \}^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j-1)^2} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

esto es :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b^{(k)} \rightarrow u_0 \quad (\text{en } L_2(0, \infty)) \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty,$$

o sea que

$$u_0 \in \mathcal{M}.$$

Por un procedimiento análogo al anterior, se puede demostrar (por inducción) que

$$u_n \in \mathcal{M} \quad \text{para todo } n,$$

esto es :

$$\overline{\mathcal{M}} = L_2(0, \infty).$$

Como

$$\frac{k+1}{k} f_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^n} u_n \quad (k = 1, 2, \dots)$$

entonces se concluye que el sistema $\{f_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ determina un subespacio lineal denso en $L_2(0, \infty)$.

Aplicando el lema 1 del párrafo 1, tenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1

Las funciones $e^{-x/k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) determinan un subespacio lineal denso en $L_2(0, \infty)$.

Corolario 2

Las funciones $\frac{1}{2k} e^{-x/k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ determinan un subespacio lineal denso en $L_2(0, \infty)$.

Demostración inmediata. ■

Aplicando el método de Schmidt al sistema de funciones del corolario 2 se obtiene un sistema ortonormal completo $\{\psi_k(x)\}$:

$$(\psi_n, \psi_k) = \int_0^\infty \psi_n(x) \psi_k(x) dx = \delta_{n,k}$$

donde $\psi_n(x)$ es una combinación lineal de $\frac{1}{2k} e^{-x/4k}$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Pero, observando las siguientes relaciones:

$$\left(\frac{1}{2k} e^{-x/4k}, \frac{1}{2n} e^{-x/4n} \right) = \frac{1}{4nk} \int_0^\infty \exp\left\{-x\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4k}\right)\right\} dx = \frac{1}{k+n},$$

$$(e^{-kx}, e^{-nx}) = \int_0^\infty e^{-x(k+n)} dx = \frac{1}{k+n},$$

se ve inmediatamente que los coeficientes de la combinación para formar $\psi_n(x)$ son iguales a los coeficientes de la combinación para $\phi_n(x)$ obtenidos en (17), o sea que

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n E_{n,k} \frac{1}{2k} e^{-x/4k} \quad (22)$$

§ 4. Una representación de la transformación integral de Hankel

Sean $\{\Phi_n(x)\}$, $\{\Psi_n(x)\}$ dos sistemas ortonormales completos definidos por

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= \sqrt{2x} \phi_n(x^2) = \sqrt{2x} \sum_{k=1}^n E_{n,k} e^{-kx^2} \\ \Psi_n(x) &= \sqrt{2x} \psi_n(x^2) = \sqrt{2x} \sum_{k=1}^n E_{n,k} \frac{1}{2k} e^{-x^2/4k} \end{aligned} \quad (23)$$

donde $\{\phi_n\}$, $\{\psi_n\}$ son los sistemas construidos en los párrafos anteriores y $E_{n,k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$) son constantes dadas en (17).

De la siguiente fórmula conocida: [7] [9] [12] [13]

$$\int_0^\infty e^{-ky^2} J_0(xy) y dy = \frac{1}{2k} e^{-x^2/4k} \quad (24)$$

se tiene inmediatamente que

$$\int_0^\infty \{e^{-ky^2} \sqrt{y}\} J_0(xy) \sqrt{xy} dy = \frac{1}{2k} e^{-x^2/4k} \sqrt{x},$$

luego

$$\int_0^{\infty} \Phi_n(x) J_0(xy) \sqrt{xy} \, dy = \Psi_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Esto es, la transformación de Hankel $H : f \rightarrow Hf = F$ dada por la integral

$$Hf = F(x) = \int_0^{\infty} J_0(xy) \sqrt{xy} \, f(y) \, dy \quad (25)$$

transforma el sistema $\{\Phi_n\}$ en el sistema $\{\Psi_n\}$:

$$H\Phi_n = \Psi_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

por lo tanto H es un operador unitario. Además, si reemplazamos en (24) k por $1/4k$ entonces tenemos :

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2k} e^{-y^2/4k} \sqrt{y} \right] J_0(xy) \sqrt{xy} \, dy = e^{-kx^2} \sqrt{x},$$

esto implica que :

$$H\Psi_n = \int_0^{\infty} \Psi_n(y) J_0(xy) \sqrt{xy} \, dy = \Phi_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Esto es :

$$H^{-1} \Phi_n = \Psi_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

o sea

$$H^{-1} = H. \quad (26)$$

Por lo tanto, se obtiene la fórmula inversa de Hankel :

$$\begin{aligned} Hf = F(x) &= \int_0^{\infty} J_0(xy) \sqrt{xy} \, f(y) \, dy \\ HF = H^{-1}F = f(y) &= \int_0^{\infty} J_0(xy) \sqrt{xy} \, F(x) \, dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Nota : La integral impropia (24) converge absolutamente, luego el operador H en (27) está definido en el subespacio lineal determinado por $\{\Phi_n\}$ (o por $\{\Psi_n\}$), pero el sistema $\{\Phi_n\}$ es completo y por la propiedad unitaria de H se puede extender H al espacio total $L_2(0, \infty)$.

§ 5. Convergencia de la integral de Hankel

Sea $f \in L_2(0, \infty)$ tal que la integral impropia :

$$Hf = \int_0^{\infty} J_0(xy) \sqrt{xy} \, f(y) \, dy$$

converge absolutamente .

Primero , vamos a demostrar que el operador H es acotado .

Dividiendo el intervalo $[0, \infty)$ en dos partes $[0, R/x]$ y $[R/x, \infty)$ con R fijo, tenemos :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{\infty} J_0(xy) \sqrt{xy} f(y) dy \right\| \\ & \leq \left\| \int_0^{R/x} J_0(xy) \sqrt{xy} f(y) dy \right\| + \left\| \int_{R/x}^{\infty} J_0(xy) \sqrt{xy} f(y) dy \right\| . \end{aligned} \quad (28)$$

i) Si $y \leq R/x$ (o $xy \leq R$) existe una constante C tal que

$$| J_0(xy) \sqrt{xy} | \leq C \sqrt{xy} ,$$

luego tenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{R/x} J_0(xy) \sqrt{xy} f(y) dy \right\|^2 \leq C^2 \int_0^{\infty} x \left\{ \int_0^{R/x} \sqrt{y} |f(y)| dy \right\}^2 dx \\ & \leq C^2 \int_0^{\infty} x \left\{ \int_0^{R/x} 1 dy \int_0^{R/x} y |f(y)|^2 dy \right\} dx = C^2 R \int_0^{\infty} \int_0^{R/x} y |f(y)|^2 dy dx \\ & = C^2 R \int_0^{\infty} \int_0^{R/y} dx y |f(y)|^2 dy = C^2 R^2 \int_0^{\infty} |f(y)|^2 dy = C^2 R^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

o sea

$$\left\| \int_0^{R/x} J_0(xy) \sqrt{xy} f(y) dy \right\| \leq C R \|f\| . \quad (29)$$

ii) Si $y \geq R/x$ (o $xy \geq R$) aplicando la fórmula asintótica de la función de Bessel tenemos : [9] [11] [13]

$$J_0(xy) \sqrt{xy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \left(xy \cdot \frac{\pi}{4} \right) + \Delta(x, y) \quad (30)$$

donde

$$\Delta(x, y) = O(1/xy) .$$

Entonces existe una constante M tal que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{R/x}^{\infty} J_0(xy) \sqrt{xy} f(y) dy \right\| \\ & \leq \left\| \int_{R/x}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \left(xy \cdot \frac{\pi}{4} \right) f(y) dy \right\| + \left\| \int_{R/x}^{\infty} \frac{M}{xy} f(y) dy \right\| \end{aligned}$$

$$\leq \left\| \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(xy \cdot \frac{\pi}{4}) f(y) dy \right\| + \left\| \int_0^{R/x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(xy \cdot \frac{\pi}{4}) f(y) dy \right\| \\ + \left\| \int_{R/x}^\infty \frac{M}{xy} f(y) dy \right\|. \quad (31)$$

Pero

$$\left\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xy \cdot \pi/4) f(y) dy \right\| \\ \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\| \int_0^\infty \cos(xy) f(y) dy \right\| + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\| \int_0^\infty \sin(xy) f(y) dy \right\| \\ \leq 2\sqrt{2} \|f\| \quad (\text{por el teorema de Fourier Plancherel}). \quad (32)$$

$$\text{iii)} \quad \left\| \int_0^{R/x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(xy \cdot \pi/4) f(y) dy \right\|^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^{R/x} |f(y)| dy \right\}^2 dx \\ \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^{R/x} y^{1/2} dy \int_0^{R/x} y^{1/2} |f(y)|^2 dy \right\} dx \\ = \frac{4\sqrt{R}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{R/x} y^{1/2} |f(y)|^2 dy \\ = \frac{4\sqrt{R}}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^{R/y} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right\} y^{1/2} |f(y)|^2 dy \\ = \frac{8R}{\pi} \int_0^\infty |f(y)|^2 dy = \frac{8R}{\pi} \|f\|^2.$$

O sea

$$\left\| \int_0^{R/x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(xy \cdot \pi/4) f(y) dy \right\| \leq 2\sqrt{\frac{2R}{\pi}} \|f\|. \quad (33)$$

$$\text{iv)} \quad \left\| \int_{R/x}^\infty \frac{M}{xy} f(y) dy \right\|^2 \leq \int_0^\infty \left\{ \int_{R/x}^\infty \frac{M}{xy} f(y) dy \right\}^2 dx \\ \leq \int_0^\infty \left[\frac{M^2}{x^2} \int_{R/x}^\infty y^{3/2} dy \int_{R/x}^\infty y^{1/2} |f(y)|^2 dy \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left\{ \frac{2M^2}{\sqrt{R}} x^{-3/2} \int_{R/x}^\infty y^{-1/2} |f(y)|^2 dy \right\} dx \\
&= \int_0^\infty \left\{ \int_{R/y}^\infty \frac{2M^2}{\sqrt{R}} x^{-3/2} dx \right\} y^{-1/2} |f(y)|^2 dy \\
&= \frac{4M^2}{R} \int_0^\infty |f(y)|^2 dy = \frac{4M^2}{R} \|f\|^2
\end{aligned}$$

o

$$\left\| \int_{R/x}^\infty \frac{M}{xy} f(y) dy \right\| \leq \frac{2M}{\sqrt{R}} \|f\|. \quad (34)$$

De (28), (29), (31), (32), (33) y (34) tenemos

$$\left\| \int_0^\infty J_0(xy) \sqrt{xy} f(y) dy \right\| \leq (CR + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{2R}{\pi}} + \frac{2M}{\sqrt{R}}) \|f\| = C_0 \|f\|, \quad (35)$$

Ahora, consideremos cualquier elemento f de $L_2(0, \infty)$, entonces f es desarrollable como sigue:

$$f = \sum_{k=1}^\infty A_k \Phi_k, \quad \sum_{k=1}^\infty |A_k|^2 = \|f\|^2 < +\infty.$$

La transformada de Hankel de f es entonces:

$$Hf = \sum_{k=1}^\infty A_k H\Phi_k = \sum_{k=1}^\infty A_k \Psi_k. \quad (36)$$

Dado ϵ existe n tal que

$$\left\| Hf - \sum_{k=1}^n A_k \Psi_k \right\| = \left\{ \sum_{k=n+1}^\infty |A_k|^2 \right\}^{1/2} < \text{Min}(\epsilon/3, \epsilon/3C_0)$$

donde C_0 es una constante cota del operador H .

$$\text{Sean} \quad g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \Phi_k$$

$$\begin{aligned}
g_m(x) &= \sum_{k=1}^n A_k \Phi_k & \text{si} \quad x \leq m \\
&= 0 & \text{si} \quad x > m.
\end{aligned}$$

entonces existe M_0 tal que

$$m > M_0 \quad \text{implica} \quad \|g - g_m\| < \epsilon/3C_0$$

luego

$$\|Hg - Hg_m\| = \|H(g - g_m)\| \leq C_0 \|g - g_m\| < \epsilon/3.$$

Sea

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq m \\ 0 & \text{si } x > m \end{cases}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|Hf - Hf_m\| &\leq \|Hf - Hg\| + \|Hg - Hg_m\| + \|Hg_m - Hf_m\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + C_0 \|g_m - f_m\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned} \quad (37)$$

ya que

$$\|g_m - f_m\| \leq \|g - f\| = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k|^2 \right\}^{1/2} < \epsilon/3C_0.$$

De (37) se tiene el siguiente resultado:

$$Hf = \lim_{m \rightarrow \infty} Hf_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m J_0(xy) \sqrt{xy} f(y) dy \quad (38)$$

§ 6. Representación matricial de la transformación de Hankel

De (23) del párrafo 4 tenemos

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= (\Phi_n(x), \Psi_k(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k E_{n,i} E_{k,j} \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-ix^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{4j}\right\} 2x dx \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{2}{1+4ij} E_{n,i} E_{k,j} \\ &= 4\sqrt{nk} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (-1)^{i+j} \frac{(n+i-1)! (k+j-1)!}{(1+4ij)! (i-1)! i! (j-1)! (n-i)! (k-j)!} \end{aligned} \quad (39)$$

$H = (a_{n,k})$ es una representación matricial de la transformación integral de Hankel con respecto a la base $\{\Phi_n\}$ (o $\{\Psi_n\}$).

Tabla 2 $(a_{n,k})$

$k \backslash n$	1	2	3	4
1	0.8000	0.3770	0.2486	0.1858
2	0.3770	-0.0314	-0.1034	-0.7662
3	0.2486	-0.1034	-0.1358	-0.1340
4	0.1858	-0.7662	-0.1340	-0.0598

REFERENCIAS

- [1] Frank M Cholewinski : *A Hankel Convolution Complex Inversion Theory*,
Memoris of the Am. Math. Soc. , Providence , 1965
- [2] M.H.Stone : *Lineal Transformations in Hilbert Space*, Am.Math Soc.
New York, 1936
- [3] Ian Sneddon : *Fourier Transforms* ,McGraw Hill , New York 1951
- [4] F.Riesz,Nagy : *Functional Analysis* , Frederich Ungar Pub.Co. NewYork,
1955
- [5] Titchmarsh E.C. : *Eigenfunction Expansions* ,Oxford Uni. Press, 1962
- [6] Takeuchi Yu : *Espacio de Hilbert* ,Universidad Nal de Colombia,Bogotá
1967
- [7] Yoshida K. *Breviario de Matemáticas Aplicadas* ,Marzen,Tokyo ,1958
- [8] Whittaker,Watson : *Modern Analysis* ,Cambridge Uni.Press,1935
- [9] Rey Pastor : *Funciones de Bessel* ,Dossat S.A., Madrid , 1958
- [10] Sansone G. : *Orthogonal Functions* ,Interscience Pub. NewYork ,1959
- [11] Erdely,Magnus,Tricomi : *Higher Transcendental Functions* ,McGrawHill,
NewYork,1953
- [12] Luke Y. : *Integrals of Bessel Functions* , MacGrawHill,NewYork,1962
- [13] Watsons G.N. : *Theory of Bessel Functions* , Cambridge Uni.Press,
Cambridge, 1960
- [14] Gérard P. : *La Theorie des Fonctions de Bessel* ,Centre National de la
Recherche Scientifique, Paris , 1955
- [15] Bracewell R.:*The Fourier Transform and Aplications* ,MacGrawHill,
NewYork,1965