Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen IV (1970), págs. 41 - 50

GENERALIZACIONES Y COMENTARIOS SOBRE LOS TEOREMAS DE FARKAS MINKOWSKI Y KUHN TUCKER

A. G. AZPEITIA (*)

RESUMEN

Una exposición de las variantes clásicas de los teoremas de Farkas-Minkowski y Kuhn-Tucker aparece en los § 1 y § 2 sin demostraciones.

En los § 3 y § 4 se demuestran generalizaciones de ambos teoremas.

Algunas conclusiones adicionales constituyen el contenido del § 5.

(*) Profesor de Matemáticas, University of Massachusetts, Boston.

NOTACIONES Y CONVENIOS

E^n : espacio vectorial euclideo n dimensional

$x, y, z \dots$: puntos de E^n

$(a, b, c \dots)$: vector de componentes $a, b, c \dots$

xy : producto escalar de los vectores x, y

$\equiv$: idéntico por definición

$\overline{X}$: cierre topológico del conjunto X

$\mathring{X}$: interior de X, $(X \subset E^n)$ relativo a la variedad $\mathcal{L} \subset E^n$ de dimensión mínima que contiene a X.

$dim\ X$: dimensión de $X \equiv$ dimensión de $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ definido como antes).

E^n_+ : subconjunto de los puntos de E^n con coordenadas no negativas (ortante positivo de E^n)

$f'(x)$: gradiente de la función $f(x) : E^n \rightarrow E^m$, $(m , n \geqslant 1)$.

Conjunto poliédrico: Intersección finita de semiespacios cerrados de E^n.

$[A]$: cardinalidad del conjunto A

Todas las funciones del texto (a menos que se advierta lo contrario) tienen dominio en E^n y codominioe en E^1 .

§ 1 . *El Teorema de Farkas Minkowski*

El Teorema de Farkas Minkowski puede adoptar la forma generalizada siguiente (ver Ref. 1 al final) que utilizaremos en este trabajo .

TEOREMA 1 . - Sean las funciones reales $f(x)$, $g_i(x)$, $(1 \leqslant i \leqslant m)$ definidas en el espacio euclideo n - dimensional E^n cóncavas y tales que

$$(i) \quad \{ x \mid f(x) > 0 \ , \ g_i(x) \geqslant 0 \ , \ 1 \leqslant i \leqslant m \} = \phi$$

$$(ii) \quad \{ x \mid f(x) > 0 \} \neq \phi$$

Sea $L \cup N = I \equiv \{ i \mid i = 1, 2, \ldots m \}$ una partición del conjunto I de los valores del índice i definida por : $i \in L \iff$ la función $g_i(x)$ es lineal afín . Supongamos además que se verifica

$$(iii) \quad \{ x \mid g_i(x) \geqslant 0 \ , \ i \in L \} \cap \{ x \mid g_i(x) > 0 \ , \ i \in N \} \neq \phi$$

Entonces existe un vector no nulo $y \in E^m$ de componentes no negativas, es decir, $0 \neq y = (y_1 \ \ldots \ y_m) \geqslant 0$ tal que

$$(1) \quad \{ x \mid f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i \, g_i(x) > 0 \} = \phi$$

NOTA : La hipótesis *(ii)* que no aparece en el enunciado del teorema en Ref. 1 es sin embargo esencial .

Si la hipótesis *(ii)* se suprime, la conclusión *(i)* subsiste únicamente si se suprime también la condición de que sea $y \neq 0$.

La comprobación de estas afirmaciones es consecuencia trivial de la demostración del Teorema y de contraejemplos inmediatos .

Si todas las funciones $f(x)$, $g_i(x)$ son lineales afines , es decir , si $N = \phi$ obtenemos la forma original del Teorema de Farkas Minkowski (ver Ref. 2) con $f(x) \equiv d - c\,x$ donde $d \in E^1$ $c \in E^n$ son constantes y el conjunto de condiciones $g_i(x) \geqslant 0$ se expresa en forma matricial por $A_x - b \geqslant 0$ donde $b \in E^m$ y A es una matriz de dimensión $m \times n$. El resultado es el

TEOREMA 2 . - (Farkas Minkowski) Si $\{ x \mid A\,x \geqslant b \} \neq \phi$ entonces los dos enunciados que siguen son equivalentes :

(A) $\quad A_x \geqslant b \quad \Longrightarrow \quad cx \geqslant d$

(B) $\quad \exists\, y \geqslant 0 \ , \quad yA = c \quad , \ y\, b \geqslant d$

Demostración . Que $(B) \Longrightarrow (A)$ es evidente y que $(A) \Longrightarrow (B)$ es consecuencia del Teorema 1 (y la Nota subsiguiente) en el caso $N = \phi$ así como del hecho de que toda función lineal afín que no cambia de signo se reduce a una constante .

§ 2 . **Los Teoremas de Kuhn Tucker**

Con las mismas notaciones del § *1* definamos

$g(x) \equiv (g_1(x) \, , \ldots , g_m(x)\,) \ : \ E^n \to E^m$, y $L(x, y) \equiv f(x) + y\, g(x) :$ $E^{n+m} \longrightarrow E^1$ y consideremos el programa $P1$ y los problemas $P2$ y $P3$ definidos como sigue :

$P1$ Hallar $x \in \Gamma \equiv \{ x \mid g(x) \geqslant 0 \}$ tal que

$max \ \{ f(x) \mid x \in \Gamma \} = f(\bar{x})$

$P2$ Hallar $\bar{x} \in E^n \ , \ y \in E^m_+$ tales que

(2) $\quad L(x, \bar{y}) \leqslant L(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant L(\bar{x}, y)$ para $\forall x \in E^n , \forall y \in E^m_+$

$P3$ Suponiendo que las $f(x)$, $g_i(x)$ son diferenciables, hallar $\bar{x} \in E^n$, $\bar{y} \in E^m_+$ tales que

(3) $\quad f'(\bar{x}) + \bar{y} \ g'(\bar{x}) = 0$

El grupo de Teoremas que enunciamos a continuación sin demostrar y bajo el epígrafo general de Teoremas de Kuhn Tucker establecen relaciones de dependencia o equivalencia entre el programa matemático general $P1$, el problema del punto de silla para la forma Lagrangiana $L(x, y)$, $(P2)$ y el problema $P3$ cuya ecuación básica (3) es, como en el teorema clásico de los multiplicadores de Lagrange, la anulación del gradiente de $L(x, y)$ con respecto a la variable x .

Estos problemas están relacionados estrechamente y bajo condiciones adicionales la existencia de solución para uno de ellos implica que existe solución para alguno o para todos los demás . Específicamente

TEOREMA 3 . Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $P2$ entonces *(i)* $\bar{x}$ es solución de $P1$

(ii) Si además las $f(x)$, $g_i(x)$ son diferenciables entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $P3$.

TEOREMA 4 .- Si las $f(x)$, $g_i(x)$ son diferenciables y cóncavas y $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $P3$ entonces

(i) $\bar{x}$ es solución de $P1$

(ii) $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $P2$

NOTA : Para obtener la conclusión *(i)* del Teorema *2* es suficiente suponer que $f(x)$ es pseudo cóncava y las $g_i(x)$ son casi cóncavas. Para definiciones y detalles ver Ref. 2 y 3.

TEOREMA 5 .- Si las $f(x)$, $g_i(x)$ son cóncavas y se verifica la hipótesis *(iii)* del Teorema *1* entonces para todo $\bar{x}$ que es solución de $P1$ existe $\bar{y}$ tal que $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $P2$.

El Teorema *5* es una variante del Teorema original de Kuhn Tucker (Ref. 4) que enunciamos en lo que sigue. Las hipótesis son diferentes de las del Teorema *5* y en particular en lugar de la restricción *(iii)* del Teorema *1* se usa la siguiente

Restricción de Kuhn Tucker.

Para cada $x \in \Gamma \equiv \{ x \mid g_i(x) \geq 0 , \ i \in I \}$ sea $A(x) \equiv \{ i \mid g_i(x) = 0 \}$ y supongamos además que las $g_i(x)$ son diferenciables.

Entonces la restricción de Kuhn Tucker es la siguiente

Para cada $\bar{x} \in \Gamma$, si el vector u satisface la condición $u \, g_i'(\bar{x}) > 0$ para todo $i \in A(\bar{x})$, entonces existe un arco de curva diferenciable

$$\gamma \equiv \{ x \mid x = x(t) , \ 0 \leq t \leq 1 \} \subset \Gamma$$

que es tangente a u en $\bar{x}$ es decir $x(0) = \bar{x}$ y $x'(0) = \rho \, (u)$ para algún $\rho > 0$.

El Teorema original de Kuhn Tucker es como sigue :

TEOREMA 6 .- Si se verifica la restricción de Kuhn Tucker y $f(x)$ es diferenciable y $\bar{x}$ es solución de $P1$ entonces existe $\bar{y}$ tal que $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $P3$.

Diversas variantes más o menos elaboradas y condicionadas de la restricción de Kuhn Tucker, todas ellas suficientes para garantizar la conclusión del Teorema 6 han sido producidas por diferentes autores (ver por ejemplo Ref. 3).

§ 4. *UNA EXTENSION DEL TEOREMA DE FARKAS MINKOWSKI*

Comenzaremos estableciendo tres lemas previos

LEMA 1. Si el conjunto $X \subset E^n$ es convexo y $x \in \overline{X}$ y $x_0 \in \mathring{X}$, $(x = x_0)$ entonces $(x, x_0] \equiv \{z \mid z = \alpha x + (1 - \alpha) x_0, 0 \leqslant \alpha < 1\} \subset X$

Demostración.- Si la dimensión de X es m, $(m \leqslant n)$, podemos escoger una esfera m-dimensional $B \subset X$ de centro x_0.

Entonces si para cualquier punto de u del segmento abierto (x, x_0) se verifica $u \in B$, no hay nada que probar.

En caso contrario cada $u \in (x, x_0)$, $u \notin B$ podemos probar que $u \in X$ del modo siguiente. El punto u pertenece al interior relativo del cono C_x que proyecta B desde x. Puesto que $x \in \overline{X}$ es posible escoger $z \in X$ lo bastante próximo a x de modo que el cono C_z que proyecta B desde z también incluye a u en su interior relativo (si $x \in X$ basta tomar $z = x$). Como $C_z \subset X$ por la convexidad de X resulta $u \in X$.

LEMA 2.- Γ y X son convexos y G es abierto en E^n y si $\Gamma \cap \mathring{X} \neq \phi$ entonces : $S_1 \equiv \Gamma \cap X \cap G = \phi$ si y solo si $S_2 \equiv \Gamma \cap \overline{X} \cap G = \phi$

Demostración.- Primero probaremos que $S_2 \neq \phi \implies S_1 \neq \phi$.

Sea $x_2 \in S_2$ y $x_0 \in \Gamma \cap X$. Por el Lema 1 es $(x, x_0] \subset X$ y puesto que G es abierto se puede elegir $y \in (x, x_0] \cap G$. Pero $[x, x_0] \subset \Gamma$ y por tanto $y \in S_1$ es decir $S_1 \neq \phi$.

Como $S_2 \supset S_1$ el lema está demostrado.

LEMA 3.- Si $X \subset E^n$ es convexo también es convexo $\overline{X}$, la función $d(x, X) \equiv$ distancia de x a X es convexa y finalmente

(i) $d(x, X) = d(x, \overline{X})$

(ii) $\{x \mid d(x, X) \leqslant 0\} = \overline{X}$

Demostración . - Es inmediata.

En lo que sigue introducimos la siguiente notación (con las funciones $g_i(x)$ como antes).

Si J es un conjunto de valores del índice i entonces Γ_J es el conjunto $\Gamma_J \equiv \{x | \ g_i(x) \geqslant 0 \ , \ i \in J \ \}$ y $g_J(x)$ es un vector del espacio $E^{[J]}$ cuyas componentes son $g_i(x)$, $(i \in J)$.

Demostraremos ahora la extensión siguiente del teorema de Farkas Minkowski.

TEOREMA 7. Si $f(x)$ y $g_i(x)$, $(i \in I)$ son cóncavas sobre el conjunto convexo $X \subset E^n$ y si $\exists \ x_o \in \Gamma_I \cap X$ tal que

(i) $i \in N \Longrightarrow g_i(x_o) > 0$, ($N$ definido como en el Teorema 1).

(ii) Si X no es poliédrico entonces $x_o \in \mathring{X}$, entonces la condición

$$X \cap \Gamma_I \cap \{x | \ f(x) > 0 \} = \phi$$

implica la existencia de $\bar{y} \in E_+^{[I]}$ tal que

$$f(x) + \bar{y} \, g_I(x) \leqslant 0 \qquad \forall_{x \in X} \tag{4}$$

Si además $\{x | \ f(x) > 0 \} \cap X \neq \phi$ entonces se puede elegir $\bar{y} \neq 0$.

Demostración . - Podemos suponer que $dim \ X = n$ puesto que si no es así es suficiente demostrar el teorema para $E^{[dim \ X]}$.

Además, si $X = E^n$ el Teorema es idéntico al Teorema 1.

Sea pues $X \neq E^n$. Del Lema 2 y de las hipótesis hechas se deduce

$$\bar{X} \cap \Gamma_I \cap \{ x \ | \ f(x) > 0 \} = \phi$$

Si X no es poliédrico tenemos también

$$\bar{X} \cap \Gamma_L \cap \{ x \ | \ g_i(x) > 0 \ , \ i \in N \} \neq \phi$$

y por el Lema 3

$$\bar{X} = \{ x \ | \ - d(x \ , X) \geqslant 0 \ \} \tag{5}$$

Si X es poliédrico entonces existen una matriz A y un vector b tales que

(6) $\quad X = \overline{X} = \{ x \mid A x - b \geqslant 0 \}$

En ambos casos, (5) y (6) expresan que $\overline{X}$ es un conjunto convexo y cerrado definido por un sistema de desigualdades del tipo

$$\overline{X} = \Gamma_J = \{ x \mid g_i(x) \geqslant 0 \quad , \quad i \in J \}$$

Es fácil comprobar que todas las hipótesis del Teorema 1 se verifican para las condiciones $g_i(x) \geqslant 0$ para todo $i \in I \cup J$.

Por tanto podemos conluir que existen vectores $\overline{y} \in E_+^{[I]}$ $\overline{\overline{y}} \in E_+^{[J]}$ tales que $f(x) + \overline{y}\, g_I(x) + \overline{\overline{y}}\, g_J(x) \leqslant 0$, $\forall x \in E^n$.

Entonces si $x \in X \subset \overline{X} \subset \Gamma_J$ se tiene además que $g_J(x) \geqslant 0$ y por tanto $\overline{\overline{y}}\, g_J(x) \mid \geqslant 0$ y la desigualdad (4) está demostrada.

La parte final del enunciado del Teorema es evidente y la prueba es completa.

§ 7. *Extensión del Teorema de Kuhn Tucker*

Consideremos el programa P

$$P : \max \{ F(x) \mid g_I(x) \geqslant 0 \quad , \quad x \in X \}$$

y el siguiente problema de punto de silla, Q:

Q: Hallar $\overline{x} \in X$, $\overline{y} \in E_+^{[I]}$ tales que

(7) $\quad F(x) + \overline{y}\, g_I(x) \leqslant F(\overline{x}) + \overline{y}\, g_I(\overline{x}) \leqslant F(\overline{x}) + y\, g_I(\overline{x})$ para todo $x \in X$ y todo $y \in E_+^{[I]}$.

Entonces se tiene la siguiente generalización del Teorema de Kuhn Tucker :

TEOREMA 8. - (A) Si $(\overline{x}, \overline{y})$ es solución de Q entonces $\overline{x}$ es solución de P.

(B) Si $\overline{x}$ es solución de P y las funciones $F(x)$, $g_i(x)$, $(i \in I)$ son cóncavas y existe $x_0 \in \Gamma_I \cap X$ que satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema 7, entonces existe $\overline{y}$ tal que $(\overline{x}, \overline{y})$ es solución de Q.

Demostración. - La parte (A) es evidente.

Para probar (B) basta aplicarle el Teorema 7 con $f(x) \equiv F(x) - F(\overline{x})$ para concluir que existe $\overline{y} \in E_+^{[I]}$ tal que para todo $x \in X$ se tiene

(8) $\quad F(x) + \bar{y}\, g_I(x) \leqslant F(\bar{x})$.

Entonces, si $y \in E_+^{[I]}$ resulta

(9) $\quad F(x) \leqslant F(x) + y\, g_I(\bar{x})$ y para $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ de (8) y (9) se tiene $\bar{y}\, g(\bar{x}) = 0$ de la cual se deduce (7) .

§ 5 . **Problemas de Puntos de Silla Modificados .**

Sin ninguna hipótesis adicional sobre las funciones $F(x)$ y $g_i(x)$, $(i \in I)$ consideramos el siguiente problema de punto de silla

$Q1$: Hallar $\bar{x} \in E^n$, $\bar{y} \in E_+^{[I]}$ tales que

$$F(x) + \bar{y}\, g_I(x) \leqslant F(\bar{x}) + \bar{y}\, g_I(\bar{x}) \leqslant F(\bar{x}) + y\, g_I(\bar{x})$$

para todo $x \in E^n$ y todo $y \in E_+^{[I]}$.

Consideramos también el Programa PI dado por

PI : $max \{ F(x) \mid x \in \Gamma_I \}$ y el enunciado $S1$ siguiente .

$S1 \equiv$ Si $\bar{x}$ es solución de PI entonces existe $\bar{y}$ tal que $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $Q1$.

Sea ahora una partición de I dada por $I = J \cup K$, $J \cap K = \phi$ y el problema de punto de silla modificado siguiente :

$Q2$ Hallar $\bar{x} \in \Gamma_K$, $\bar{y} \in E_+^{[J]}$ tales que

$$F(x) + \bar{y}\, g_J(x) \leqslant F(\bar{x}) + \bar{y}\, g_J(\bar{x}) \leqslant F(\bar{x}) + y\, g_J(\bar{x})$$

para todo $x \in \Gamma_K$ y todo $y \in E_+^{[J]}$.

Por último, sean los enunciados $S2$ y $S3$ dados como sigue :

$S2 \equiv$ Si $\bar{x}$ es solución de PI entonces existe $\bar{y}$ tal que $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $Q2$.

$S3 \equiv$ Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución de $Q2$ entonces $\bar{x}$ es solución de PI .

Sin hipótesis adicionales es fácil probar el siguiente

TEOREMA 9 .- El enunciado $S3$ es siempre válido y el enunciado $S1$ implica $S2$.

REFERENCIAS

1. C. BERGE y A. GHOUILA HOURI, " *Programas, Juegos y Sistemas de Transporte* ", CECSA, México 1965.

2. A. G. AZPEITIA. " *Programación Matemática* ", Universidad Nacional Bogotá, (pendiente de publicación).

3. W. I. ZANGWILL, " *Non Linear Programming* ", Prentice Hall 1969.

4. H. W. KUHN y A. W. TUCKER, " *Non Linear Programming* " Proceedings 2nd Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability, ed. J. Neymann. Univ. of Calif. Press, Calif. 481-492 (1951).

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia S. A.

(Recibido: Julio de 1969