Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II. 1.968. Páginas 172-174

SOBRE LA REGULARIDAD DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES LINEALES CON DIFERENCIAS Y COEFICIENTES CONSTANTES.

por

Jaime Lesmes

El tema tratado corresponde al §4 de [2], trabajo del cual aparecerá próximamente una versión abreviada [3]. Nos basamos esencialmente en resultados de Ehrenpreis [1].

Consideramos operadores de la forma:

$$\mathcal{P} = \sum_{k=0}^{m} P_k(D)\, \tau_{h_k} \qquad (1)$$

sobre espacios de distribuciones.

Aquí los P_k, $0 \leqslant k \leqslant m$, son polinomios complejos en n variables, $D = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, los $h_k = (h_{k1}, \ldots, h_{kn})$ son puntos de $\mathbb{R}^n$, y los τ_{h_k} son los operadores de traslación correspondientes. Suponemos además $h_o = 0$.

DEFINICION: Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Se dice que el operador $\mathcal{P}$ es hipoelíptico en Ω (respectivamente, hipoelíptico en Ω respecto a $x_1, \ldots, x_p$, en donde $p < n$), si cualquiera que sea el abierto Ω_1 de $\mathbb{R}^n$, tal que

$$\Omega_1 \supset \Omega$$

$$\Omega_1 + h_k = \Omega_1 \qquad (0 \leqslant k \leqslant m)$$

para toda solución u en $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ de la ecuación homogénea $\mathcal{P}u = 0$, la restricción $u|_\Omega$ pertenece a $C^\infty(\Omega)$ (resp. $u|_\Omega$ es regular respecto a $x_1, \ldots, x_p$).

TEOREMA.- Si existe un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{P}$ sea hipoelíptico en Ω (resp., hipoelíptico en Ω respecto a $x_1, \ldots, x_p$), entonces $\mathcal{P} = P_0(D)$ (resp. $h_{k_j} = 0$, para $0 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant p$).

La demostración de este teorema se basa en los siguientes lemas:

LEMA 1.- Sean $S \in \mathcal{E}'$, $\mathcal{N} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \; ; \hat{S}(\zeta) = 0\}$ (en donde $\hat{S}$ designa la transformación de Fourier de S), y supongamos $\mathcal{N} \neq \emptyset$, y $\mathcal{N}$ no acotado (lo que siempre es el caso para $\neq \emptyset$, si $n \geqslant 2$). Sea Ω un abierto no vacío en $\mathbb{R}^n$; entonces, si $\mathcal{N}$ tiene la propiedad:

$$\liminf_{\substack{|\zeta| \to \infty \\ \zeta \in \mathcal{N}}} \left[|\operatorname{Im} \zeta| / \log(1 + |\zeta|) \right] < + \infty \qquad (2)$$

existe una solución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación $S * u = 0$, tal que $u|_\Omega$ no es medida de Radón sobre Ω.

LEMA 2.- Para $\zeta \in \mathbb{C}^n$, p entero $< n$, pongamos:

$$\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_p) \; ; \; \zeta'' = (\zeta_{p+1}, \ldots, \zeta_n).$$

Sean ahora $S \in \mathcal{E}'$ y dos abiertos $V \subset \mathbb{R}^p$, $W \subset \mathbb{R}^{n-p}$. Si existe un subconjunto $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \; ; \hat{S}(\zeta) = 0\}$ sobre el cual $|\zeta''|$ y $|\operatorname{Im} \zeta| / \log(1 + |\zeta|)$ están acotados, pero $|\zeta'|$ no lo está, entonces existen una función $\psi \in C_0^\infty(W)$ y una solución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación $S * u = 0$, tales que la restricción a V de la distribución $\langle u(x', x''), \psi(x'') \rangle$ no es una medida de Radón sobre V.

LEMA 3.- Sea $Q(\zeta) = \sum_{k=0}^{m} p_k(\zeta).\ \exp(-i < h_k, \zeta >)$ (ver fórmula (1)). Sean $b_j (2 \leq j \leq m)$ números complejos fijos, tales que, poniendo $B(z) = Q(z, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{k=0}^{m} A_k(z).$ $\exp(-i\ h_{k1}\ z)$, los A_k, $0 \leq k \leq m$, sean todos $\neq 0$. (Suponemos $h_{ki} \neq h_{ji}$ para $k \neq j$, lo cual siempre se puede alcanzar por cambio de coordenadas). Entonces, si

$$\mathcal{N} = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n\ ;\ Q(\zeta) = 0 \right\}$$

no cumple (2), la función $B(z)$ tiene a lo más un número finito de ceros en $\mathbb{C}$.

LEMA 4.- Si un polinomio exponencial de una variable de la forma $\sum_{k=0}^{m} A_k(z) \exp.(i a_k z)$, $a_k \in \mathbb{R}$ tiene solamente un número finito de ceros en $\mathbb{C}$, entonces es igual al producto de un polinomio por una exponencial de la forma e^{ibx}, con $b \in \mathbb{R}$.

REFERENCIAS

1.- Ehrenpreis, L., Solutions of some problems of division IV. Am.J. Math. 82, 522-588 (1960).

2.- Lesmes, J., Weber lineare partielle Differential - Differenzenoperatorem mit konstanten Koeffizienten. Collect Math. 18, 7-55 (1966-67),

3.- Lesmes, J., Sobre una clase de operatores de convolución. Por aparecer en la Revista Colombiana de Matemática.