

Werk

Titel: Algunos grupos aritméticos no maximales

Autor: Allan, Nello

Jahr: 1968

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320387429_0002|log47

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II. 1.968. Páginas 169-171.

ALGUNOS GRUPOS ARITMETICOS NO MAXIMALES

por

Nello Allan

Es un hecho bien conocido que todas las superficies de Riemann que no son simplemente conexas y que tienen género mayor que uno, pueden ser obtenidas como cociente del semiplano complejo, H , por un grupo Γ que actúa discontinuamente en H ; este Γ puede ser considerado como subgrupo discreto del grupo de automorfismos analítico de H que es el grupo lineal especial real, $Sl_2(\mathbb{R})$. Entre esos Γ hay unos que son fáciles de construir, a saber: el grupo $\Gamma = Sl_2(\mathbb{Z})$, que consiste de las matrices enteras en $Sl_2(\mathbb{R})$. Si se cambia la representación de $Sl_2(\mathbb{R})$ y se considera el subgrupo de las matrices enteras, Γ' , entonces $\Gamma \neq \Gamma'$; en general, pero estos dos grupos son conmensurables en el sentido de que $\Gamma \cap \Gamma'$ tiene índice finito en ambos: Γ y Γ' . Este hecho nos lleva a considerar la clase de conmensurabilidad de $Sl_2(\mathbb{Z})$; todos los grupos de esta clase se llaman aritméticos. De una manera un poco más general podemos considerar el grupo $Sl_2(\rho)$ donde ρ es el anillo de números enteros de un campo k , totalmente real y de grado r sobre los racionales \mathbb{Q} . En este caso $Sl_2(\rho)$ puede ser considerado como subgrupo discreto de $(Sl_2(\mathbb{R}))^r$, actuando en $H \times \dots \times H$, r veces. El problema en el que estamos interesados es el de la determinación de la clase de conmensurabilidad de $Sl_2(\rho)$, en el sentido de determinar una familia S , contable, que consista de grupos aritméticos maximales en esa clase y tales que dos subgrupos distintos cualesquiera de esa familia no sean conjugados en $Sl_2(\mathbb{R})$. Este problema fue resuelto por Helling [5], en 1.965.

La noción de grupo aritmético para dimensiones mayores que uno es la siguiente: Sea G un grupo lineal algebraico semi-simple definido sobre un campo de números algebraicos k y sea G_{ρ} el subgrupo consistente de todas las matrices enteras de G . Diremos que un subgrupo r de G es aritmético si r fuera conmensurable a G_{ρ} . En [1], [6] se muestra la existencia de grupos aritméticos maximales en su clase de conmensurabilidad, en situaciones que contienen todos los casos interesantes.

En mi trabajo [3] una relación precisa entre maximalidad local y maximalidad global es obtenida, usando el teorema de la aproximación fuerte de Kneser; como consecuencia el cálculo de la familia S es hecho en el caso de $G = \text{Sl}_n(\mathbb{R})$, y en ciertos casos para el grupo simpléctico, $G = \text{Sp}_n(\mathbb{R})$.

En el caso del grupo especial ortogonal $G = \text{SO}(H)$, el teorema de la aproximación fuerte no sigue siendo verdadero, de modo que es muy difícil la construcción de la familia S . Lo mismo en el caso local diádico la discusión de este problema es más difícil; la maximalidad de G_{ρ} en G_k parece depender de los campos residuos de los primos que dividen dos, y de la estructura del grupo de unidades de ρ , en el caso sim-

ple en que H es la matriz $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & j & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo E la iden-

tidad de r por r y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Siendo más preciso, en el ar-

tículo [2] probamos que $G_{\mathbb{Z}}$ es maximal y en artículo [4] exhibimos varios campos de números para los cuales G_{ρ} no es maximal. Para la discusión de la maximalidad o no maximalidad de G_{ρ} en G_k hay una técnica muy útil: considérese el ρ -módulo L generado por G_{ρ} en $M_n(k)$, $n = 2r + 2$, y obsérvese que L es un orden en este álgebra de matrices; este orden está contenido solamente en un número finito de órdenes maximales.

L_1, \dots, L_m , entonces $G_{\rho} \subset L_i \cap G = r_i$. Para probar que G_{ρ} es maximal en G_k es suficiente probar que $r_i = G_{\rho}$ para todos los índices i , y para probar que G_{ρ} no es maximal es suficiente probar que existe un índice i tal que r_i contiene G_{ρ} propiamente. Si asumimos que 2 es primo en ρ , entonces no es difícil probar que todas las matrices de G_{ρ} tienen los elementos no diagonales de la línea $r + 2$ divisible por 2.

Entonces G_{ρ} está contenido en la orden maximal L donde todas las matrices de L tienen elementos enteros, con excepción de los elementos no diagonales de la columna $r + 2$, pero dos veces esos elementos son enteros, y todos los elementos no diagonales de la línea $r + 2$ son divisibles por 2. En [4] construimos matrices en $G \cap L$ que no son enteras, y entonces $G \cap L$ es un grupo aritmético que contiene G_{ρ} propiamente.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- N. Allan, The problem of the maximality of arithmetic groups, Proc. of Symp. in Pure and Applied Math. Vol 9, p. 104/109.
- 2.- N. Allan, A note on the Arithmetic of the Orthogonal Group, Anais da Academia Brasileira de Ciencias, 1966.
- 3.- N. Allan, On the commensurability class of the Hilbert Siegel Modular Group, Bul. of Amer. Math. Soc. vol. 1968, p.
- 4.- N. Allan, Some non maximal arithmetic groups, Rev. Colombiana de Matemática, Vol. II, 1968, p. 21/18.
- 5.- H. Helling, Bestimmung der Kommensurabilitats - klasse der Hilbertschen Modulegruppe, Math. Zeit. 92. (1966) p. 269/280.
- 6.- H.C. Wang, On a maximality property of discrete subgroups with fundamental domain of finite measure, Amer. J. of Math., Vol 89, (1967), p. 124/132.