Werk

Titel: Espacios vectoriales topológicos sobre cuerpos no ar quimedianamente valuados

Autor: Klaus, Madlener E.

Jahr: 1968

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320387429_0002|log36

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II, 1.968. Páginas 129-136.

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS SOBRE CUERPOS NO ARQUIMEDIANAMENTE VALUADOS

por

Klaus E. Madlener

En el siguiente trabajo trataré de dar un resumen de los resultados más importantes, en el estudio de los espacios topológicos en especial normados sobre cuerpos valuados no arquimedianamente. Los primeros estudios en esta materia fueron hechos por A.F. Monna en 1.943 que desarrolló en mayor parte la teoría de los espacios normados ultramétricos. En los últimos tres años recibió la materia un gran impulso debido a la introducción de los espacios local k-convexos por J. Van Tiel en analogía con los E.V.T. local convexos sobre los reales y complejos. Claro está que ambas teorías están todavía en desarrollo.

Muchos problemas que tienen una solución en el caso real muestran también aquí su solución. Los métodos usados en las demostraciones son similares pero no sin encontrar a veces varias dificultades. Sería interesante si se pudiera encontrar un camino para unificar las dos teorías como se ha hecho ya en parte.

1. VALUACIONES SOBRE CUERPOS

1.1 - Def: Una valuación en un cuerpo K es una función $|.| : K \to \mathbb{R}^+$ con las siguientes propiedades:

v_1 : $|a| = 0 \iff a = 0$

v_2 : $|a| = |a||b| \quad \forall\, a,b \in K$

v_3 : $|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall\, a,b \in K$. Desigualdad triangular.

Ejemplo: Cuerpo de los reales con el valor absoluto usual.

La valuación se llamará trivial si $|a| = 1$ para todo $a \in K$.

La propiedad que nos interesa es la siguiente:

v_4 : $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$ $(a,b \in K)$. Desigualdad triangular fuerte

1.2 - Def: Si la valuación de un cuerpo K cumple las propiedades $v_1 - v_4$ se llamará no arquimediano; en otro caso arquimediano.

Un resultado de Ostrowshi dice que un cuerpo arquimedianamente valuado es analíticamente isomorfo a un sub-campo de los números reales o complejos. En lo siguiente será K siempre un cuerpo valuado n.a que podemos suponer completo.

Ya que el grupo de valores de K, esto es $\{|a| : a \in K\} = N_K$, no es todo $\mathbb{R}^+$ podemos distinguir 2 casos:

1.2 - Def: a) La valuación n.a $|\cdot|$ es discreta si existe un $d \in \mathbb{R}^+$, $0 < d < 1$ tal que

$$N_K = \{d^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

b) La valuación n.a $|\cdot|$ es densa si N_K es denso en $\mathbb{R}^+$.

Propiedades equivalentes para:

a) N_K tiene como único punto de acumulación el 0

b) N_K tiene el 1 como punto de acumulación

Ejemplos: a) Valuación discreta: El cuerpo de los racionales valuados p-adicamente, en donde p es un número primo.

b) Valuación densa: Cuerpo de las series de potencias con la valuación usual.

Estos cuerpos tienen propiedades analíticas a veces más sencillas que los números reales.

p.e. Una serie es convergente $\Leftrightarrow$ el término general tiende a cero.

Por otra parte, muchas propiedades que tienen los reales, como orden, local compacto, conexo, completo, no tienen que valer para un cuerpo valuado no arquimediano.

2. ESPACIOS LINEALES NO ARQUIMEDIANAMENTE VALUADOS

2.1- Def: Un espacio lineal normado E sobre K se llama no arquimediano si la norma en E satisface la desigualdad ultramétrica.

$$\|x + y\| \leq \max (\|x\|, \|y\|) \qquad x,y \in E$$

se sigue que:

$$\|x + y\| = \max (\|x\|, \|y\|) \quad \text{si } \|x\| \neq \|y\|$$

E es un espacio de Banach no arquimédeo si E es completo con la métrica canónica.

Ejemplos:

i) El espacio de todas las sucesiones acotadas $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ $x_i \in K$ con la norma $\|x\| = \sup |x_i|$. Si K es completo, entonces es un espacio de Banach. Se denota con e^{∞}

ii) Sea X un espacio topológico local compacto:

Con $C_c(x)$ se denota el espacio lineal de todas las funciones contínuas con soporte compacto $f : X \to K$, tal que separen los puntos de X (p.e X sea 0-dimensional). La norma se define con:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad C_c(x) \text{ es un E.B.n.a.}$$

iii) Una pregunta inmediata que se presenta es, cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio normado sobre un cuerpo valuado K sea un espacio lineal normado no arquimediano:

Una condición necesaria es que K tenga una valuación n.a. pero esta condición no es suficiente como se puede ver en el ejemplo siguiente:

$e^1 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in K \quad \sum |x_i| < \infty \Leftrightarrow |x_i| \to 0\}$

$\|x\| = \sum_i x_i$ no satisface la desigualdad ultramétrica.

3. FUNCIONALES Y EL TEOREMA DE HAHN BANACH

Los funcionales se definen como en el caso clásico, esto es, como funciones lineales contínuas de E en K.

Las relaciones entre continuidad y acotamiento para operadores sobre espacios normados no arquimedianos son las mismas del caso clásico.

El Teorema de Hahn Banach sobre la extensión de funcionales, es válido bajo ciertas restricciones a la valuación del cuerpo K, que K sea esféricamente completo.

Introduciré este concepto en forma más general.

3.1 - Def: Sea E un espacio lineal sobre K supongamos que la topología de E está determinada por una seminorma no arquimédea ρ.

i) $\rho : E \to \mathbb{R}^+$

ii) $\rho(0) = 0$

iii) $\rho(ax) = |a| \rho(x) \quad \forall a \in K$

iv) $\rho(x + y) \leq \max(\rho(x), \rho(y))$

Con (E, p) se denotará el E.V.T E provisto de la topología definida por la seminorma.

3.2 - Def: El conjunto $\{x \mid \rho(x - x_0) \leq \lambda\}$ se llamará una esfera con centro x_0 y radio λ. Las esferas en el caso no arquimediano tienen propiedades singulares:

i) Todo punto de la esfera puede ser considerado como centro.

ii) Si la intersección de dos esferas es no vacía, entonces la de menor radio está contenida en la otra.

3.3 - Def: El espacio (E, ρ) se llamará esféricamente completo, si toda familia de esferas totalmente ordenada por inclusión, tiene una intersección no vacía.

La definición de esféricamente completo se puede aplicar al caso del cuerpo valuado K si se considera como espacio lineal sobre sí mismo, la valuación siendo una seminorma n.a.

3.4 - Se pueden mostrar entre otras las siguientes equivalencias:

1. K es esféricamente completo.

2. K está maximalmente valuado, en el sentido de que toda extensión valuada de K extiende el grupo de valores G o el cuerpo residual K.

En particular todo cuerpo completo con valuación discreta es e.c. ya que en este caso se cumple u = c.f (u grado de la ext. de K).

(c grado de la ext. de G).

(f grado de la ext. de K).

NOTA: Existen cuerpos valuados densos que son e.c.

Ejemplo: Cuerpo de las series de potencias.

3.5 - Def: Se dice que el espacio (E, ρ) tiene la propiedad de extensión si para todo espacio (F, q) sobre K y todo subespacio lineal $V \subset F$ con una aplicación lineal $\varphi : V \longrightarrow E$ para la cual se cumple

$$\rho(\varphi(x)) \leq q(x) \qquad x \in V$$

existe una extensión $\psi : F \longrightarrow E$ que satisface

$$\rho(\psi(x)) \leq q(x) \qquad x \in F$$

3.6 - (E, ρ) tiene la propiedad de extensión $\Longleftrightarrow$ (E, ρ) es esféricamente completo. Tomando $E = K$, resulta el teorema de H.B. clásico. (Fué mostrado por Ingleton).-

El teorema es básico para la existencia de suficientes funcionales. Se puede mostrar fácilmente que si el cuerpo no es e.c. existe por lo menos un E.L.N. n.a cuyo dual se reduce a $\{0\}$.

4. EXISTENCIA DE BASES EN E.L.N. n.a

Una de las mayores dificultades que se presenta es el hecho de que el grupo de valores no tiene que ser todo $\mathbb{R}^+$.

Sea $\qquad N_p = \{ \rho(x) : x \in E \} \qquad N_K = \{ |a| : a \in K \}$

De la relación $\rho(ax) = |a| \rho(x)$ resulta que $N_K N_p \subset N_p$.

La relación $N_K N_p = N_K$ no es correcta por lo general, para $K = \mathbb{R}$ es correcta. Esto tiene por consecuencia que no todo vector es normable.

4.1 - Def: Sea E un E.L.N. n.a. Una familia $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en E se llamará una base de E si todo $x \in E$ puede ser expresado de manera única, en la forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \qquad x_i \in K$$

donde la convergencia se entiende en el sentido de la norma y de manera que:

$$\|x\| = \sup \|x_i\, e_i\| = \sup |x_i|\, \|e_i\|$$

4.2 - Se puede mostrar la existencia en los siguientes casos:

1) Sea la valuación de K discreta:
Toda sucesión estrictamente decreciente en N converge contra 0.

2) Sea K esféricamente completo.

E es separable, esto es, existe un subespacio denumerable denso.

Se puede probar además:

4.3 - Si E es un E.B. n.a de dimensión infinita y la norma no cumple la condición en 4.2 1, entonces si E tiene una base, E no puede ser e.c.

Si aplicamos este teorema al ejemplo 2, i) suponiendo que K es e.c $\Longrightarrow$ e^{∞} es e.c. se obtiene.

Si la valuación de K no es discreta y K es e.c., entonces ningún espacio de dimensión infinita del tipo e^{∞} sobre K tiene una base.

5. APLICACIONES

5.1 Operadores lineales: Se han estudiado en particular aplicaciones compactas, c-compactas, Operadores de Fredholm y Alhinson.

La teoría de Riesz-Schauder para espacios normados y generalización a espacios local K-convexos. (Definidos por seminormas n.a).

Monna - Serve - Gruson - Van Tiel - Madlener.

5.2 Integración de funciones definidas sobre un espacio topológico local compacto X con vectores en K fue desarrollada en analogía con el método de Bourbaki.

Existencia de una medida de Haar se complica más que en el caso real ya que entra una dependencia de la característica del cuerpo.

Monna - Springer T.A - Tomas F. - Bruhat.

5.3 Teoría de funciones de una y más variables.

Gravert - Remmert.

5.4 Varios problemas como métodos de sumación, espacios normados sobre cuerpos valuados trivialmente. Algebras de funciones contínuas. Algebras de operadores, estructura.

La literatura se encuentra en su mayor parte en:

Proc. Kon. Ned. Ahad. V. Wetensch 1.943

Ind. Math.