

## Werk

**Titel:** Sobre una clase de operadores de convolución, I

**Autor:** Lesmes, Jaime

**Jahr:** 1968

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320387429\\_0002](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320387429_0002) | log20

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

SOBRE UNA CLASE DE OPERADORES DE CONVOLUCIÓN, I

por

Jaime LESMES

INTRODUCCIÓN. Se sabe ([11], cap.III, Teo.35) que toda distribución sobre  $\mathbb{R}^n$  concentrada en un punto es una combinación lineal de derivadas de la medida de Dirac correspondiente a dicho punto. Se deduce inmediatamente que una distribución  $S$  sobre  $\mathbb{R}^n$  cuyo soporte consta de un número finito de puntos  $h_0, h_1, \dots, h_m \in \mathbb{R}^n$  es una combinación lineal de derivadas de las medidas de Dirac concentradas en los  $h_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ). Es decir,  $S$  es de la forma:

$$(0.1) \quad S = \sum_{k=0}^m P_k(D) \delta_{(h_k)}$$

en donde los  $P_k(\cdot)$ ,  $1 \leq k \leq m$ , son polinomios complejos en  $n$  variables, y se ha puesto:

$$D = \left( -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

(ver [7], cap.I; en general, usaremos las notaciones de este libro, así como las de [11])

Como  $S \in \mathcal{E}'$ , para toda distribución  $u \in \mathcal{D}'$  está definida la convolución  $S * u$ , y se tiene:

$$(0.2) \quad S * u = \sum_{k=0}^m P_k(D) \tau_{h_k} u, \quad \forall u \in \mathcal{D}' .$$

En esta fórmula  $\tau_{h_k}$  representa el operador de traslación correspondiente a  $h_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ):  $\forall u \in \mathcal{D}'$ ,  
 $\forall \phi \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle \tau_{h_k} u, \phi \rangle = \langle u(x-h_k), \phi(x) \rangle = \langle u(x), \phi(x+h_k) \rangle$$

(ver [11], Tomo I, pág. 55).

En [9] hemos hecho el estudio de los operadores de convolución de la forma (0.2), es decir, de los operadores diferenciales parciales lineales con diferencias y coeficientes constantes. En este trabajo presentamos los principales resultados de dicho artículo; para la exposición detallada y las demostraciones, remitimos a [9].

### §1 PRELIMINARES

1. EL OPERADOR  $\mathcal{P}$ . De ahora en adelante, usaremos la notación:

$$(1.1) \quad \mathcal{P}u = \sum_{k=0}^m P_k(D) \tau_{h_k} u,$$

en donde  $u$  varía en un espacio de distribuciones, o de funciones, conveniente (no necesariamente en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ). Supondremos también que siempre se tiene  $h_0 = 0$ .

Ante todo, vamos a precisar el significado de la fórmula (1.1), para lo cual damos las siguientes definiciones (ver [6], cap. II, §1; [9], §1, 2):

DEFINICIÓN 1.1 Un espacio fundamental  $\Phi$  de funciones es un espacio vectorial topológico localmente convexo, cuyos elementos son funciones definidas en un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  ó  $\mathbb{C}^n$ ; la topología de  $\Phi$  debe ser más fina que la topología de la convergencia simple. Los elementos del espacio dual  $\Phi'$  se llaman funciones generalizadas o también distribuciones.

DEFINICIÓN 1.2 Sea  $p$  el máximo de los grados de los polinomios  $P_k(\cdot)$  en (1.1). Sean  $\Phi, \Psi$  espacios fundamentales de funciones sobre subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ ,

tales que

$$\forall \varphi \in \Phi, D^q \tau_{-h_k} \varphi \in \Psi, \text{ para } 0 \leq k \leq m, |q| \leq p.$$

Sean  $\Phi'$ ,  $\Psi'$  los espacios de distribuciones correspondientes,  $f \in \Phi'$ ; se dice que  $u \in \Psi'$  es una solución de la ecuación:

$$(1.2) \quad \mathcal{P}u = f$$

si se tiene,  $\forall \varphi \in \Phi$ :

$$(1.3) \quad \langle u, \mathcal{P}^* \varphi \rangle = \langle u(x), \sum_{k=0}^m P_k(-D) \varphi(x+h_k) \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

NOTA. Como  $\varphi \in \Phi$ , se tiene:  $\mathcal{P}^* \varphi \in \Psi$ , y por tanto  $\langle u, \mathcal{P}^* \varphi \rangle$  está bien definido. En [9], loc.cit., se encuentran algunos ejemplos para ilustrar estas definiciones.

## 2. ALGUNOS PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL OPERADOR $\mathcal{P}$ .

Se pueden plantear, entre otros, los siguientes:

I) Existencia de una solución fundamental, esto es, de una solución  $E$  de la ecuación  $\mathcal{P}E = \delta$  ( $\delta$  es la medida de Dirac). Ver [1], [4], [5], [10]. En [9], §2, presentamos una demostración constructiva de la existencia de una solución fundamental en  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ; ésta es una modificación y ampliación del método de AGRANOVICĀ [1].

II) Solución de la ecuación (1.2) en los espacios  $\mathcal{D}'_K$ , en donde  $K$  es un compacto de  $\mathbb{R}^n$ . Sobre este problema trata el §3 de [9].

III) Solución de la ecuación (1.2) en los espacios  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}'(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{D}'_F(\Omega)$ , en donde  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Este problema está tratado en [8]; en [9], §3, nos.4-5, nos limitamos a algunas consideraciones elementales del caso en  $\Omega$  es acotado, utilizando la

solución fundamental.

IV) Regularidad de las soluciones de la ecuación (1.2). Ver [5]. En [9], §4, definimos las nociones de hipoelepticidad e hipoelepticidad parcial sobre un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , para operadores de la forma (1.1).

Mayor información y bibliografía se encuentran en la introducción de [9].

3. LOS TRES CASOS. Para los operadores de la forma (1.1) conviene distinguir tres casos:

I)  $m > 0$ , y al menos uno de los polinomios  $P_k$  no es constante.

II)  $m > 0$ , y  $P_k(X) \equiv c_k$ ,  $c_k$  constante ( $0 \leq k \leq m$ ). En este caso se tiene un operador de diferencias.

III)  $m = 0$ . En este caso se tiene un operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes; estos operadores han sido ampliamente estudiados ([7], [12]).

En [9] nos limitamos al estudio de los dos primeros casos; para ello es particularmente útil la siguiente proposición ([1]; [9], teo.1.1):

PROPOSICIÓN 1.1 Siempre se puede encontrar una transformación de coordenadas en  $\mathbb{R}^n$ , que lleva la expresión (1.1) para  $\mathcal{P}$  a una forma con las propiedades siguientes:

a) Todo polinomio  $P_k(X)$  es de la forma

$$c_k X_1^{p_k} + \text{sumandos cuyo grado en } X_1$$

es menor;  $c_k$  es una constante  $\neq 0$ .

b) Si ponemos para  $0 \leq k \leq m$ ,  $h_k = (h_{k1}, \dots, h_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ , se tiene:  $h_{j1} = h_{k1}$ , si  $k \neq j$ .

c)  $h_{k1} > 0$  para  $1 \leq k \leq m$ .

4. ~~LA TRANSFORMACION DE FOURIER.~~ En el estudio de los operadores que nos ocupan, es esencial el empleo de la transformación de Fourier. Si  $u$  es una distribución temperada (resp., si  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ ), designamos por  $\hat{u}$  (resp., por  $\hat{\varphi}$ ) la transformada de Fourier de  $u$  (resp., de  $\varphi$ ). Como se sabe,

$$\forall u \in \mathcal{D}', \forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle ;$$

también usaremos, cuando sea más cómoda, la notación  $\mathcal{F}[u]$  (resp.,  $\mathcal{F}[\varphi]$ ) en lugar de  $\hat{u}$  (resp., de  $\hat{\varphi}$ ).

Como en [9], pondremos  $Q(\cdot) = \mathcal{F}[\mathcal{P}\delta]$ ; se demuestra fácilmente (ver op.cit., §1,4),  $\forall \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ :

$$(1.4) \quad Q(\zeta) = \sum_{k=0}^m P_k(\zeta) \cdot \exp(-i \langle h_k, \zeta \rangle);$$

en donde  $\langle h_k, \zeta \rangle = \sum_{j=1}^n h_{kj} \zeta_j$ .

Se tiene además,  $\forall u \in \mathcal{E}'$ :

$$(1.5) \quad \mathcal{F}[\mathcal{P}u](\zeta) = Q(\zeta) \cdot \hat{u}(\zeta);$$

$$(1.6) \quad \mathcal{F}[\mathcal{P}^*u](\zeta) = Q(-\zeta) \cdot \hat{u}(\zeta) = \check{Q}(\zeta) \hat{u}(\zeta).$$

Esencial en este trabajo es el teorema de PALEY-WIENER ([7], teo. 1.7.7): Una función holomorfa entera de  $n$  variables complejas,  $F(\zeta)$ , es la transformada de FOURIER de una función  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  con soporte contenido en la bola  $|x| \leq B$ , si y sólo si para todo entero positivo  $N$ , existe una constante  $C_N = C_N(f) > 0$  tal que

$$(1.7) \quad |F(\zeta)| \leq C_N (1 + |\zeta|)^{-N} \cdot \exp(B |\Im \zeta|).$$

Muy útil para los problemas que trataremos es la siguiente propiedad, demostrada en [9], §1,5:

Las constantes  $C_N(f)$  pueden elegirse de tal manera que, fijado  $N$ ,  $C_N(f) \rightarrow 0$  si  $f \rightarrow 0$  en un espacio  $\mathcal{D}_K$ ,  $K$  compacto de  $\mathbb{R}^n$ .

## ■2 EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL

De ahora en adelante, se supondrá que los polinomios  $P_k$  y los argumentos de desplazamiento  $h_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) cumplen las condiciones de la proposición 1.1.

Con  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  designamos puntos de  $\mathbb{C}^n$ ; además si  $\operatorname{Re} \zeta_j = \xi_j$ ,  $\operatorname{Im} \zeta_j = \eta_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ), pondremos  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ .

1. LA ESCALERA DE HÖRMANDER. Ante todo, vamos a estudiar la función  $Q$ ; se tiene la siguiente proposición ([9], teo. 2.1):

PROPOSICIÓN 2.1 Si al menos uno de los polinomios  $P_k$  no es constante, existe una variedad  $H$  (Escalera de Hörmander) en  $\mathbb{C}^n$ , con las propiedades siguientes:

a)  $\forall \zeta \in H, |\check{Q}(\zeta)| > 1.$

b) Si  $\zeta = \xi + i\eta \in H$ , se tiene:

$$-M \cdot \log(|\xi| + e) > \eta_1 > -M \cdot \log(|\xi| + e) - N;$$

$$\eta_j = 0 \quad (2 \leq j \leq n);$$

en donde  $M, N$  son constantes positivas convenientes, independientes de  $\zeta$ .

c)  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{\varphi}$  es integrable sobre  $H$ , y se tiene:

$$(2.1) \quad \int_H \hat{\varphi}(\zeta) d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Para la demostración de esta proposición se utilizan los lemas siguientes:

LEMA 2.1 Sea  $P(\zeta)$  un polinomio en  $\mathbb{C}^n$  con coeficientes complejos, de la forma:  $c \cdot \zeta_1^p +$  miembros de grado menor en  $\zeta_1$ , en donde  $c \neq 0$ ; sean además  $b, \Delta$  números reales positivos. Entonces existe un número real  $M^* > 0$ , tal que para  $\zeta = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , en donde  $\xi_j \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq j \leq n$ ),  $\eta_1 \in \mathbb{R}$ , y  $|\eta_1| \geq M^* \log(e + |\xi|)$ , se tiene:

$$|P(\zeta)| + b \leq e^{\Delta |\eta_1|}$$

Aplicando el lema 1.1 a cada uno de los polinomios  $\frac{m}{c_m} P_k(-\zeta)$ , con  $b = 1/|c_m|$ ,  $\Delta = h_{m1} - h_{k1}$  ( $0 \leq k \leq m-1$ ), se obtiene el

LEMA 2.2 Supongamos que  $h_{m1}$  es el máximo de los  $h_{k1}$  ( $1 \leq k \leq m$ ; ver proposición 1.1). Entonces existe  $M > 0$ , tal que si  $\zeta = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , con  $\eta_1 < -M \cdot \log(|\xi| + e)$ , se tiene:

$$(2.2) \quad |c_m| \cdot \exp(-h_{m1} \eta_1) - \left| \sum_{k=0}^{m-1} P_k(-\zeta) \exp(\langle h_k, i\xi \rangle - h_{k1} \eta_1) \right| \geq 1.$$

En esta fórmula,  $c_m$  está dado por  $P_m$ , y  $M$  depende de  $c_m$ .

Finalmente tenemos:

LEMA 2.3 Sean  $M, \alpha$  números positivos dados; entonces existe  $N > 0$  (dependiente de  $M, \alpha$ ), tal que para  $(\xi_2, \dots, \xi_n)$  fijo, la distancia de las curvas

$$\eta_1 = -M \cdot \log(|\xi| + e) \quad \text{y} \quad \eta_1 = -M \cdot \log(|\xi| + e) - N$$

en el plano de las  $\zeta_1$  es mayor que  $\alpha$ .

Esquema de la demostración de la proposición 2.1. a), b)

$P_m(-\zeta)$  tiene la forma

$$c_m(-\zeta_1)^{p_m} + \sum_{j=0}^{p_m-1} (-\zeta_1)^j R_j(\zeta_2, \dots, \zeta_n);$$

$$c_m \neq 0.$$

Pongamos  $\zeta_2 = \xi_2, \dots, \zeta_n = \xi_n$ , reales fijos: Entonces, el polinomio en  $\zeta_1$  correspondiente tiene  $p_m$  ceros en el plano de las  $\zeta_1$ ; sean éstos  $\zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_1^{(p_m)}$ . Se obtiene el desarrollo:

$$P_m(-\zeta) = (-1)^{p_m} \cdot c_m \prod_{j=1}^{p_m} (\zeta_1 - \zeta_1^{(j)}).$$

Tomando la constante  $M$  del lema 2.2, por el lema 2.3, podemos encontrar una constante  $N > 0$ , tal que en el plano de las  $\zeta_1$ , la distancia entre las curvas

$$\eta_1 = -M \cdot \log(|\xi_1| + e) \text{ y } \eta_1 = -M \log(|\xi_1| + e) - N$$

sea mayor que  $(2p_m + 2)$ . Entonces podemos encontrar una constante  $0 < T < N$  tal que la distancia de cada uno de los ceros  $\zeta_1^{(j)}$  ( $1 \leq j \leq p_m$ ) a la curva

$$\eta_1 = -M \cdot \log(|\xi_1| + e) - T,$$

sea mayor que 1.

Se deduce que sobre esta curva  $|P_m(-\zeta)| > |c_m|$ , y usando (2.2):  $|\check{Q}(\zeta)| > 1$ .

Procediendo entonces como en [6], cap. II, §3.3 (para el caso de operadores diferenciales), se concluye que podemos construir un recubrimiento localmente finito  $(\Delta_\nu)_{\nu \in N}$  del espacio  $R^{n-1}$ , formado por paralelotopos disyuntos (no necesariamente abiertos, pero de interior no vacío), tal que a cada  $\nu$  corresponde un número real  $T_\nu$ ,  $0 < T_\nu < N$ , con la siguiente propiedad: si definimos  $H$

por las fórmulas:

$$(2.3) \begin{cases} -\infty < \xi_j < +\infty, & 1 \leq j \leq n; \\ \eta_1 = -M \log(|\xi| + e) - T_\nu, & \text{si } (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \Delta_\nu; \\ \eta_j = 0, & 2 \leq j \leq n; \end{cases}$$

se tiene  $|\hat{\phi}(\zeta)| > 1$ , para  $\zeta \in H$ .

Para ver que  $H$  es la variedad buscada, queda por demostrar la parte c).

c) Primero, hay que demostrar que para todo  $\phi \in C_0^\infty$ ,

$$\int_H |\hat{\phi}(\zeta)| \cdot |d\omega| < +\infty$$

Ahora bien,

$$|d\omega| = d|\zeta_1| \cdot d\xi_2 \dots d\xi_n = \frac{e^{|\zeta_1|}}{e^{\xi_1}} d\xi_1 \dots d\xi_n = \frac{e^{|\zeta_1|}}{e^{\xi_1}} d\xi$$

y se comprueba fácilmente que

$$e^{|\zeta_1|}/e^{\xi_1} \leq 1 + \frac{M}{e};$$

de aquí se deduce

$$(2.4) \quad \int_H |\hat{\phi}(\zeta)| \cdot |d\omega| \leq \left(1 + \frac{M}{e}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\phi}(\zeta(\xi))| \cdot d\xi.$$

en donde  $\zeta(\xi) = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in H$ .

Sea  $B > 0$ , tal que el soporte de  $\phi$  esté contenido en la bola  $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq B\}$ ; entonces, cualquiera que sea el entero  $q \geq 0$ , se tiene para  $\zeta = \zeta(\xi)$ , por el teorema de Paley-Wiener:

$$|\hat{\phi}(\zeta)| \leq C_q(\phi) \cdot (1 + |\zeta|)^{-q} \cdot e^{B|\eta|};$$

y como  $|\eta_1| \leq M \cdot \log(|\xi| + e) + N$ , nos queda:

$$\begin{aligned}
|\hat{\phi}(\zeta)| &\leq c_q(\phi) \cdot \frac{e^{BN(|\xi| + e)^{BM}}}{(1 + |\zeta|)^q} \\
&\leq c_q(\phi) \cdot \frac{e^{BN(|\xi| + e)^{BM}}}{(1 + |\xi|)^q} ;
\end{aligned}$$

si se toma  $q > BM + n$ , esta última expresión es integrable sobre  $\mathbb{R}^n$ , y usando (2.4) se obtiene finalmente:

$$(2.5) \quad \int_H |\hat{\phi}(\zeta)| \cdot |dw| \leq K(B; q) \cdot C_q(\phi),$$

en donde  $K(B; q)$  depende también de  $M, N$ , pero no de  $\phi$ . Queda por demostrar la igualdad (2.1). Fijados  $\xi_2, \dots, \xi_n$ , sea  $T_\nu$  el número real correspondiente, en las fórmulas (2.3); llamaremos  $\Gamma$  la curva de ecuación  $\eta_1 = -M \cdot \log(|\xi_1| + e) - T_\nu$  en el plano  $\zeta_1$ . Se demuestra entonces, usando el teorema de Cauchy, la igualdad

$$\int_{\Gamma} \hat{\phi}(\xi_1 + i\eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\zeta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1,$$

de la cual se deduce (2.1).

Para las ecuaciones con diferencias, se tiene un resultado más simple ([9], teorema 2.2):

PROPOSICION 2.2 Si en (1.4),  $P_k(\zeta) \equiv c_k$ ,  $c_k$  constante  $\neq 0$  ( $0 \leq k \leq m$ ), entonces existe una constante  $T > 0$ , tal que la variedad  $H$  en  $\mathbb{C}^n$  definida por las fórmulas:

$$(2.6) \quad \begin{cases} -\infty < \xi_j < +\infty, & 1 \leq j \leq n \\ \eta_1 = -T \\ \eta_j = 0, & 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

posee las propiedades a) y c) de la proposición 2.1.

La demostración es como la anterior, pero en este caso, más simple. En particular, si  $B > 0$ , para toda función  $\varphi \in C_0^\infty$  con soporte contenido en

$$\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq B\},$$

se obtiene una fórmula del mismo tipo de la (2.5).

2.LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL. Una distribución  $E \in \mathcal{D}'$  se llama solución fundamental de la ecuación (1.2), si  $\mathcal{P}E = \delta$ , en donde  $\delta$  es la medida de Dirac en el punto 0 (cfr. [11], cap.VI, §10).

TEOREMA 2.1 Toda ecuación diferencial parcial lineal con diferencias y coeficientes constantes tiene una solución fundamental en  $\mathcal{D}'$ .

Demostración: Llamando, como antes,  $Q = \mathcal{F}[\mathcal{P}\delta]$ , y  $H$  la escalera de Hörmander para  $Q$ , definimos la forma lineal sobre  $C_0^\infty$ :

$$(2.7) \quad \langle E, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \frac{\hat{\varphi}(\zeta)}{Q(-\zeta)} d\omega, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Usando las propiedades de  $H$ , se comprueba fácilmente que  $E$  está definida para toda  $\varphi \in C_0^\infty$ .

Si  $L$  es un compacto fijo de  $\mathbb{R}^n$ , contenido en la bola cerrada de radio  $B$ , y si  $(\varphi_\nu)$  es una sucesión de funciones de  $\mathcal{D}_L$ , se tiene, puesto que  $|\hat{Q}(\zeta)| > 1$ , para todo  $\zeta \in H$ , utilizando (2.5) (o su análoga para ecuaciones con diferencias):

$$(2.8) \quad (2\pi)^n \cdot |\langle E, \varphi_\nu \rangle| \leq K(B, q) \cdot C_q(\varphi_\nu),$$

cualquiera que sea el valor del índice  $\nu$ .

Finalmente se comprueba sin dificultad que  $E$  es solución fundamental:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty, \quad \langle \mathcal{P}E, \varphi \rangle = \langle E, \mathcal{P}^* \varphi \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \frac{Q(-\zeta) \hat{\varphi}(\zeta)}{Q(-\zeta)} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \hat{\varphi}(\zeta) d\omega = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0).
\end{aligned}$$

(Hemos utilizado (2.1)).

PROPOSICIÓN 2.3 Si  $\mathcal{P}$  es un operador lineal de diferencias con coeficientes constantes, la solución fundamental  $E$  construida en el teorema 2.1 tiene la propiedad:

$$E * L_c^2 \subset L_{loc}^2.$$

Para la demostración de esta proposición, que es una adaptación de la dada en [12] para el caso de operadores diferenciales, remitimos a [9], §2,3.

### §3 SOLUCIONES EN CONJUNTOS ACOTADOS

En este párrafo se dan algunas aplicaciones de la solución fundamental construida en el §2, a la solución de ecuaciones del tipo (1.2), con  $f \in \mathcal{D}'_K$ ,  $K$  compacto, como también  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , y  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\Omega$  abierto relativamente compacto en  $\mathbb{R}^n$ . En gran parte, se trata de generalizaciones de resultados de Agranovič para ecuaciones diferenciales parciales lineales [2].

1. ESTRUCTURA DE LOS ELEMENTOS DE  $\mathcal{D}'_K$ . Se sabe que toda forma lineal continua  $v$  sobre  $\mathcal{D}'_K$  tiene un orden finito  $p$  ([11], cap.III, teorema 20). Basándose en esto, se deduce que  $v$  puede ser dada por una fórmula del tipo:

$$(3.1) \quad \langle v, \phi \rangle = \sum_{|r| \leq m} \int_K D^r \phi(x) \cdot f_r(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K$$

en donde  $m = p + n$ , y las  $f_r$  son funciones acotadas y medibles sobre  $K$  (para la demostración detallada de esto, así como de lo que sigue, remitimos a [9], pp.28 y siguientes).

Para abreviar, vamos a poner:  $f_r(x) dx = d\mu_r(x)$  ( $|r| \leq m$ ). Usando las propiedades de la transformación de Fourier, la compacidad de  $K$  y la forma de las medidas  $\mu_r$ , se llega a la fórmula

$$(3.2) \quad \langle v, \phi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} v(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K$$

en donde

$$(3.3) \quad v(\xi) = \sum_{|r| \leq m} \xi^r \int_K e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu_r(x); \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

$v(\xi)$  es una función holomorfa entera sobre  $\mathbb{C}^n$ .

DEFINICIÓN 3.1 Sea  $\mu$  una medida concentrada sobre el compacto  $K \subset \mathbb{C}^n$ ; llamaremos a la función

$$\int_K e^{-i\langle x, \cdot \rangle} d\mu(x)$$

transformada de Fourier de  $\mu$ .

DEFINICIÓN 3.2 Una suma finita de productos de monomios y transformadas de Fourier de medidas concentradas sobre  $K$ , definidas por funciones de densidad acotadas y Lebesgue-medibles (es decir, una función del tipo (3.3)) se llama una función K-admisibile.

PROPOSICIÓN 3.1 Sea  $V$  la función K-admisibile da-

da por (3.3); entonces, existen dos constantes positivas  $C$ ,  $a$ , tales que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n, |v(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^m \cdot e^{a|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Se deduce que  $V$  es la transformada de Fourier de una distribución con soporte compacto.

La última observación es consecuencia del teorema de Paley-Wiener-Schwartz ([7], teorema 1.7.7), pero es fácil verla también directamente: se define  $\tilde{v} \in \mathcal{E}'$  por la fórmula

$$\langle \tilde{v}, \psi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K D^\alpha \psi(x) \cdot f_\alpha(x) dx, \quad \forall \psi \in C^\infty$$

Sobre  $\mathcal{D}'_K$ ,  $\tilde{v}$  coincide con  $v$ , y además  $V = \mathcal{F}[\tilde{v}]$ .

COROLARIO. Sea  $V$  la función  $K$ -admisibile dada por (3.3); entonces, para toda  $\phi \in C^\infty_0$ ,  $V\hat{\phi}$  es la transformada de Fourier de una función de  $C^\infty_0$ . Concretamente:

$$V\hat{\phi} = \mathcal{F}[\tilde{v} * \phi].$$

En síntesis, tenemos el siguiente

TEOREMA 3.1 Todo elemento  $v \in \mathcal{D}'_K$  puede representarse en la forma (3.2), en donde  $V$  es una función  $K$ -admisibile. Recíprocamente, toda función  $K$ -admisibile  $V$  define una distribución  $\tilde{v}$  concentrada sobre  $K$ , la cual sobre  $\mathcal{D}$  está dada por la fórmula:

$$\langle \tilde{v}, \phi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} v(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi, \quad \phi \in \mathcal{D}$$

Finalmente, tenemos la

DEFINICIÓN 3.3 Una función  $W$  analítica entera en  $\mathbb{C}^n$  se llama  $K$ -anulante si:

- a) existe  $K_1$ , compacto en  $\mathbb{R}^n$ , con  $K_1 \supset K$ , tal que  $W$  es una función  $K_1$ -admisibles;
- b) para toda  $\varphi \in \mathcal{D}'_K$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(\xi) \cdot \hat{\varphi}(\xi) \cdot d\xi = 0$$

2. LA ECUACIÓN  $\mathcal{P}u = f$ , CUANDO  $f \in \mathcal{D}'_K$ . Sea  $K_1$  un compacto de  $\mathbb{R}^n$  que contenga  $\bigcup_{k=0}^m (K + h_k)$ ; vamos a hallar las soluciones  $u \in \mathcal{D}'_{K_1}$  de la ecuación  $\mathcal{P}u=f$ , cuando  $f \in \mathcal{D}'_K$ .

Sea  $K_2$  un compacto de  $\mathbb{R}^n$  que contenga

$$\bigcup_{k=0}^m (K_1 + h_k);$$

como  $h_0 = 0$ , se tiene:  $K_2 \supset K_1 \supset K$ .

Por el teorema 3.1, a  $f$  le corresponde una función  $K$ -admisibles  $F$ ; y si  $u \in \mathcal{D}'_{K_1}$  es una solución, le corresponde una función  $K_1$ -admisibles  $U$ . Entonces, teniendo en cuenta (1.6), vemos que la ecuación

$$\langle u, \mathcal{P}^* \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}'_K$$

se transforma en:

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(\xi) \check{Q}(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Se comprueba fácilmente ([9], lema 3.1) que  $W = U\check{Q} - F$  es una función  $K_2$ -admisibles y  $K$ -anulante. Se obtiene entonces el siguiente

TEOREMA 3.2 Una distribución  $u \in \mathcal{D}'_{K_1}$ , es una solución de la ecuación  $\mathcal{P}u = f$ , con  $f \in \mathcal{D}'_K$ , si y sólo

lo si es de la forma:

$$(3.4) \quad \langle u, \phi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \frac{F(\xi) + W(\xi)}{Q(-\xi)} \hat{\phi}(\xi) d\omega, \quad \phi \in \mathcal{D}_K,$$

en donde H es la escalera de Hormander para  $\check{Q}$ , F es la función K-admisibile correspondiente a f, y W es una función  $K_2$ -admisibile y K-anulante.

NOTA. Una fórmula de la forma (3.4) define siempre un elemento de  $\mathcal{D}'_{K_1}$ : es la restricción a  $\mathcal{D}_{K_1}$  de  $E * (\tilde{f} + \tilde{w})$ , en donde  $\tilde{f}$  y  $\tilde{w}$  son las distribuciones de  $\xi'$  definidas por F, W (teorema 3.1) y E es la solución fundamental dada en el teorema 2.1.

3. SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA EN K. Si W es una función  $K_2$ -admisibile y K-anulante, la distribución  $\tilde{w}$  que ella define (teorema 3.1) está concentrada en  $\Delta = K_2 - \overset{\circ}{K}$ .

En el caso en que  $\Delta$  sea una unión finita de conjuntos regulares ([11], tomo I, pág.98), podemos enunciar la proposición siguiente ([9], teorema 3.4), que se basa en el teorema 34 del cap.III de [11].

PROPOSICION 3.2 Si  $\Delta = K_2 - \overset{\circ}{K}$  es la unión de un número finito de conjuntos regulares disyuntos, toda solución  $u \in \mathcal{D}'_{K_1}$  de la ecuación homogénea  $\mathcal{P}u = 0$  en K, es de la forma:

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{|q| \leq q_0} \int_{\Delta} \langle D^q E(x-y), \phi(x) \rangle d\mu_q(y) \quad ; \quad \phi \in \mathcal{D}_{K_1},$$

en donde E es una solución fundamental, y las  $\mu_q$  son medidas concentradas sobre  $\Delta$ . Recíprocamente, toda distribución de esta forma es una solución de la ecuación

ción homogénea en K.

4. LA ECUACIÓN  $\mathcal{P}u = f$ , CUANDO  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .  $\Omega$  sea un abierto acotado de  $\mathbb{R}^n$ ; en general, no se puede aplicar el procedimiento de los números 1. y 2., pues, por ejemplo,  $f$  puede no ser de orden finito. Tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN 3.3. Sean  $\Omega, \Omega_1$  abiertos acotados de  $\mathbb{R}^n$ , tales que  $\Omega_1 \supset \bigcup_{k=0}^m (\Omega - h_k)$ . Sea además  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ; entonces, cualquiera que sea el compacto  $K \subset \Omega$ , existe  $u_K \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ , tal que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K, \quad \langle \mathcal{P}u_K, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

5. LA ECUACIÓN  $\mathcal{P}u = f$ , CUANDO  $f \in C^\infty(\Omega)$ . Ante todo, queremos anotar que para  $Q = \mathfrak{F}[\mathcal{P}\delta]$  se puede construir una escalera de Hörmander  $\check{H}$ , de la misma manera que se construyó  $H$  para  $\check{Q}$  (proposiciones 2.1 y 2.2): basta tomar  $\check{H} = -H$ . Tenemos entonces:

PROPOSICIÓN 3.4 Sean  $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ , abiertos acotados de  $\mathbb{R}^n$  y tales que

$$\Omega_1 \supset \bigcup_{k=0}^m (\Omega - h_k); \quad \Omega_2 \supset \bigcup_{k=0}^m (\Omega_1 + h_k);$$

sea  $K$  un compacto cualquiera de  $\Omega$ . Entonces, una función  $u \in C^\infty(\Omega_1)$  es solución de la ecuación:

$$\mathcal{P}u(x) = f(x), \quad \forall x \in K,$$

en donde  $f \in C^\infty(\Omega)$ , si y sólo si en una vecindad de  $K_1 = \bigcup_{k=0}^m (K - h_k)$  tiene la forma:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \left[ \hat{g}(\zeta) + \hat{h}(\zeta) \right] / Q(\zeta) e^{i\langle x, \zeta \rangle} d\omega$$

en donde  $g \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $h \in C_0^\infty(\Omega_2)$ ,  $g|_K = f|_K$  y  $h|_{K=0}$

En la segunda parte de este artículo trataremos el problema de la regularidad de las soluciones.

#### BIBLIOGRAFIA

1. AGRANOVIC, M.S.: Soluciones generales de ecuaciones diferenciales con diferencias y coeficientes constantes. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 123, 9-12 (1958) (En ruso).
2. AGRANOVIC, M.S.: Partial differential equations with constant coefficients. Uspehi. Mat. Nauk 16, no. 2, 27-94 (1961) (En ruso; traducción en Russian Math. Surveys.)
3. EHRENPREIS, L.: Solution of some problems of division I. Am. J. Math. 76, 883-903 (1954)
4. -----: Solution of some problems of division II, Am. J. Math., 77, 286-292 (1955)
5. -----: Solution of some problems of division IV, Am. J. Math. 82, 522-588 (1960)
6. GELFAND, I.M.; SILOV, G.E.: Funciones generalizadas II, Moscú, 1958 (En ruso; traducción francesa: Les distributions, tome 2. Collection Universitaire de Mathématiques, 15, Dunod, París, 1964).
7. HÖRMANDER, L.; Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
8. -----: On the range of convolution operators, Ann. Math. (2) 76, 148-170 (1962).
9. LESMES, J.: Ueber lineare partielle Differential-Differenzenoperatoren mit konstanten Koeffizienten. Collect. Math. 18, 7-55 (1966-1967).
- 10; MALGRANGE, B.: Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6, 271-355 (1955/56)
11. SCHWARTZ, L. Théorie des Distributions I, II, Hermann, París, 1957, 1959.
12. TRÈVES, F.: Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients. Notas de Matemática no. 27, Instituto de Mate-

mática Pura e aplicada, Rio de Janeiro, 1961

Departamento de Matemáticas y Estadística  
Universidad Nacional de Colombia

(Recibido en julio de 1968)