

## Werk

**Titel:** Un nuevo método de sumación

**Autor:** Tkahashi, A.; Takahashi, C.

**Jahr:** 1968

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320387429\\_0002|log14](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320387429_0002|log14)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

UN METODO DE SUMACION

por

A. y C. Takahashi

1. Introducción.

Es bien conocido el método de sumación de series de bido a Cesàro: Dada una serie  $\sum x_k$  , sea  $s_n = x_1 + \dots + x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) la sucesión de sus sumas parciales, y sea

$$\alpha_n = \frac{1}{n} (s_1 + \dots + s_n) , \quad (n = 1, 2, \dots) .$$

Se dice que  $\sum x_k$  es (C,1)-sumable (o sumable en el sen tido de Cesàro) si la sucesión  $(\alpha_n)$  es convergente; su límite  $a$  es entonces la (C,1)-suma de la serie, y se escribe  $a = (C,1)\text{-}\sum x_k$  .

Este método de sumación es regular, es decir, si una serie es sumable (convergente) en el sentido ordinario entonces es (C,1)-sumable y su (C,1)-suma coincide con su suma ordinaria. Por otra parte, este método de su mación es más poderoso que el ordinario, es decir, existen series (C,1)-sumables que no son sumables en el sentido usual.

Naturalmente, los conceptos anteriores se aplican a sucesiones cualesquiera: Una sucesión  $(a_n)$  converge en el sentido de Cesàro (o es (C,1)-convergente) hacia  $a$  si la sucesión de medias aritméticas

$$\alpha_n = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n) , \quad (n = 1, 2, \dots)$$

converge (en el sentido usual) hacia  $a$ ; en este caso se escribe  $a = (C,1)\text{-}\lim a_n$  . La regularidad indica en-

tonces que si  $\lim a_n$  existe, entonces también existe  $(C,1)\text{-}\lim a_n$ , y estos números son iguales.

Aplicando reiteradamente el método de Cesàro se obtiene una infinidad de métodos progresivamente más poderosos que son los llamados métodos de Hölder  $((C,p), p = 1,2,\dots)$ .

Debido a que la introducción de un concepto generalizado de límite de una sucesión es la base de diversos métodos de sumación de series, es conveniente mencionar la definición siguiente:

Sea  $\mathcal{S}$  un subespacio del espacio lineal de todas las sucesiones de números reales. Un límite generalizado es un funcional lineal positivo  $L : (a_n) \longrightarrow L[a_n]$  ( $(a_n) \in \mathcal{S}$ ) que cumple las condiciones siguientes:

- (L1) Si  $a_n = 1$  ( $n = 1,2,\dots$ ), entonces  $L[a_n] = 1$ .
- (L2) Si  $b_n = a_{n+1}$ , entonces  $L[b_n] = L[a_n]$ .

Diremos además que  $L$  es regular si para toda sucesión convergente  $(a_n)$  se tiene que  $(a_n) \in \mathcal{S}$  y  $L[a_n] = \lim a_n$ .

En este artículo definiremos dos límites generalizados considerando también el método de sumación asociado a uno de ellos. Las definiciones se basan en las observaciones siguientes:

1. Dada una sucesión real  $(a_n)$ , el término

$$\alpha_n = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n) = a_1 \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{n}$$

representa el valor medio de la variable aleatoria cuyos valores son  $a_1, \dots, a_n$ , suponiendo que cada uno de estos puntos tiene probabilidad  $\frac{1}{n}$ . Dentro de este orden de ideas, el número

$$v_n(a) = \frac{1}{n} [(a_1 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2]$$

representa el segundo momento (momento de inercia) con respecto al punto  $a$ , el cual es mínimo cuando se trata de la varianza, es decir, cuando  $a$  es el valor medio  $\alpha_n$ . La condición  $v_n(a) \rightarrow 0$  indicará que los puntos  $a_n$  se "concentran" en las proximidades de  $a$ , (véase Definición 2).

2. Fijando de nuevo una sucesión  $(a_n)$ , sea  $V$  una vecindad del punto  $a$  y para cada  $n$  sea  $\mathcal{K}_n(V)$  el número de índices  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) tales que  $a_k \in V$ . Entonces  $\mathcal{K}_n(V) / n$  es la probabilidad de que  $a_k \in V$  ( $1 \leq k \leq n$ ), luego  $P(V) = \lim (\mathcal{K}_n(V) / n)$  (si este límite existe) puede interpretarse como la probabilidad de que  $a_k \in V$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Ahora bien, si  $P(V) = 1$  para toda vecindad  $V$  de  $a$ , la sucesión  $(a_n)$  tiende, en cierto sentido, hacia  $a$ . Observamos por último que la condición anterior es equivalente a la impuesta en la Definición 1 del párrafo siguiente.

## 2. La p-convergencia y la v-convergencia.

Sea  $(a_n)$  una sucesión real.

Definición 1. Diremos que  $(a_n)$  es p-convergente (y que su p-límite es  $a$ ) si para todo  $\epsilon > 0$  y todo  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda < 1$ ), existe  $n_0$  tal que, si  $n > n_0$  entonces  $|a_k - a| < \epsilon$  para, por lo menos,  $[\lambda n]$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

( $[\lambda n]$  es la parte entera de  $\lambda n$ , es decir, el mayor entero menor o igual que  $\lambda n$ .)

Proposición 1. (Unicidad del p-límite). Una sucesión no puede tener más de un p-límite.

Demostración. Dados  $a$  y  $a'$  ( $a \neq a'$ ) y suponiendo

que  $a$  y  $a'$  son p-límites de  $(a_n)$  basta tomar, por ejemplo,  $\varepsilon = \frac{1}{2} |a - a'|$  y  $\lambda = 3/4$  obteniéndose una contradicción.

Para indicar que  $a$  es el p-límite de  $(a_n)$  se escribirá

$$a = p\text{-lim } a_n .$$

Proposición 2. Si  $a = p\text{-lim } a_n$  entonces  $a$  es un punto de aglomeración de  $(a_n)$ , es decir, existe una subsucesión  $(a_{n_k})$ ,  $n_1 < n_2 < \dots$ , que converge hacia  $a$ .

Demostración. Dado  $\varepsilon > 0$  y  $m$  (un número natural), existe  $n > 2m$  tal que  $|a_k - a| < \varepsilon$  para  $[\frac{1}{2}n] (\geq [m] = m)$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Luego existe por lo menos un  $k \geq m$  tal que  $|a_k - a| < \varepsilon$ .

Antes de enunciar la segunda definición introduciremos algunas notaciones:

Como en la introducción,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n) , \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

es la sucesión de las medias aritméticas. Además, para cada número  $a$  se define:

$$v_n(a) = \frac{1}{n} [(a_1 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2] \quad (2)$$

para  $n = 1, 2, \dots$ .

En lugar de  $v_n(0)$  escribiremos  $\overset{2}{\alpha}_n$ , es decir:

$$\overset{2}{\alpha}_n = \frac{1}{n} (a_1^2 + \dots + a_n^2) , \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

que es precisamente la sucesión de las medias aritméticas de los valores de la sucesión  $(a_n^2)$ .

Se observa que, para todo  $a$ :

$$v_n(a) = a^2 - 2a\alpha_n + \overset{2}{\alpha}_n , \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

Definición 2. Diremos que  $(a_n)$  es v-convergente

(y que su v-límite es  $a$ ) si

$$v_n(a) \longrightarrow 0 .$$

En este caso se escribe

$$a = v\text{-lim } a_n .$$

Nota: Como se verá luego, el v-límite es único.

Proposición 3 . Si  $(a_n)$  es v-convergente entonces es p-convergente y

$$p\text{-lim } a_n = v\text{-lim } a_n .$$

Demostración: Supongamos que  $v\text{-lim } a_n = a$  y sean  $\varepsilon > 0$  y  $0 < \lambda < 1$  arbitrarios. Definiendo  $\varepsilon_0 = (1 - \lambda) \varepsilon^2$  se tiene  $\varepsilon_0 > 0$  y como  $v_n(a) \longrightarrow 0$  entonces existe  $n_0$  tal que, para todo  $n > n_0$

$$(a_1 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2 < n \varepsilon_0 \quad (5)$$

Si en la suma de la izquierda hubiesen más de  $n - [\lambda n]$  sumandos mayores o iguales que  $\varepsilon^2$ , se tendría

$$\begin{aligned} (a_1 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2 &> (n - [\lambda n]) \varepsilon^2 \geq \\ &\geq (n - \lambda n) \varepsilon^2 = n(1 - \lambda) \varepsilon^2 = n \varepsilon_0 , \end{aligned}$$

lo cual contradice a (5). Luego el número de sumandos mayores o iguales que  $\varepsilon^2$  es menor o igual que  $n - [\lambda n]$ , es decir, hay (por lo menos)  $n - (n - [\lambda n]) = [\lambda n]$  sumandos menores que  $\varepsilon^2$ . En otros términos, debe cumplirse que

$$(a_k - a)^2 < \varepsilon^2$$

para (por lo menos)  $[\lambda n]$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Es decir,  $a = p\text{-lim } a_n$ .

Corolario. (Unicidad del v-límite). Una sucesión no puede tener más de un p-límite.

Proposición 4. (Regularidad de la v-convergencia)

Si  $(a_n)$  es convergente entonces es v-convergente y

$$v\text{-lim } a_n = \lim a_n .$$

Demostración. Supongamos que  $a_n \rightarrow a$  (en el sentido usual); entonces  $a_n^2 \rightarrow a^2$ .

Recordando las definiciones de  $\alpha_n$  y  $\alpha_n^2$  (ecuaciones (1) y (3) respectivamente), y teniendo en cuenta que la (C,1)-convergencia es regular, se tiene:

$$\alpha_n \rightarrow a \quad \text{y} \quad \alpha_n^2 \rightarrow a^2 .$$

Luego, usando (4) :

$$v_n(a) \rightarrow 0 .$$

Corolario. (Regularidad de la p-convergencia). Si

$(a_n)$  es convergente, entonces es p-convergente y

$$p\text{-lim } a_n = \lim a_n .$$

Proposición 5. Si  $(a_n)$  es p-convergente y además es acotada, entonces es v-convergente.

Demostración. Supongamos que  $p\text{-lim } a_n = a$  y que  $|a_k| < M$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario sea  $0 \leq \lambda < 1$  tal que  $(1 - \lambda) M < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Por hipótesis, existe  $n_0$  tal que, si  $n > n_0$  entonces  $|a_k - a| < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{1/2}$  para  $[\lambda n]$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Tomando ahora  $n > \max \left\{ n_0, \frac{3M}{\varepsilon} \right\}$  se tiene:

$$\begin{aligned} (a_1 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2 &< [\lambda n] \frac{\varepsilon}{3} + (n - [\lambda n]) M < \\ &< n \frac{\varepsilon}{3} + (n - \lambda n + 1) M = n \frac{\varepsilon}{3} + n(1 - \lambda) M + M \\ &< n \frac{\varepsilon}{3} + n \frac{\varepsilon}{3} + n \frac{\varepsilon}{3} = n \varepsilon . \end{aligned}$$

Proposición 6. Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  sucesiones p-convergentes. Entonces  $(a_n + b_n)$  y  $(a_n b_n)$  son p-con-

vergentes y se tiene:

$$(i) \quad p\text{-lim } (a_n + b_n) = (p\text{-lim } a_n) + (p\text{-lim } b_n) .$$

$$(ii) \quad p\text{-lim } (a_n b_n) = (p\text{-lim } a_n) \cdot (p\text{-lim } b_n) .$$

Demostración. Supongamos que  $p\text{-lim } a_n = a$  y  $p\text{-lim } b_n = b$ . Dados  $\varepsilon > 0$  y  $0 \leq \lambda < 1$  arbitrarios, sea  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\lambda + 1)$  y  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon$  (resp.  $\varepsilon_1 = \min \{ \varepsilon/(1+|a|+|b|), 1 \}$ .)

Por hipótesis existe  $n_1$  tal que, si  $n > n_1$  entonces  $|a_k - a| < \varepsilon_1$  para  $[\lambda_1 n]$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), y existe  $n_2$  tal que, si  $n > n_2$  entonces  $|b_k - b| < \varepsilon_1$  para  $[\lambda_1 n]$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

Luego, si  $n > n_0 = \max \{ n_1, n_2 \}$  entonces

$$|a_k - a| < \varepsilon_1 \quad \text{y} \quad |b_k - b| < \varepsilon_1$$

para (por lo menos)  $n - 2(n - [\lambda_1 n]) \leq [\lambda n]$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). En consecuencia si  $n > n_0$  se tiene:

$$(i) \quad |a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

$$\text{(resp. (ii) } |a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| |b_n - b| + |a| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < \varepsilon_1(1 + |a| + |b|) \leq \varepsilon .)$$

para (por lo menos)  $[\lambda n]$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

Corolario. Si  $(a_n)$  es p-convergente y  $\lambda$  es un número real, entonces  $(\lambda a_n)$  es p-convergente y  $p\text{-lim } (\lambda a_n) = \lambda (p\text{-lim } a_n)$ .

Demostración. Sea  $b_n = \lambda$  ( $n = 1, 2, \dots$ ): entonces  $\lim b_n = \lambda$ , luego  $(b_n)$  es p-convergente y  $p\text{-lim } b_n = \lambda$ . Entonces  $(\lambda a_n) = (b_n a_n)$  es p-convergente y  $p\text{-lim } (\lambda a_n) = (p\text{-lim } b_n) \cdot (p\text{-lim } a_n) = \lambda (p\text{-lim } a_n)$ .

Proposición 7. El conjunto  $\mathcal{S}_p$  de todas las sucesiones p-convergentes es un espacio lineal y la aplicación  $L_p : (a_n) \longrightarrow p\text{-lim } a_n$  es un límite genera-

lizado definido sobre  $\mathfrak{S}_p$  que goza de la propiedad adicional

$$L_p[a_n b_n] = L_p[a_n] \cdot L_p[b_n] .$$

Demostración. La Prop. 6 y su Corolario muestran que  $\mathfrak{S}_p$  es un subespacio del espacio de todas las sucesiones reales, que  $L_p$  es un funcional lineal sobre  $\mathfrak{S}_p$  y que  $L_p$  satisface la propiedad adicional mencionada.

Si  $a_n \geq 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) entonces, como  $L_p[a_n] = p\text{-lim } a_n$  es un punto de aglomeración de  $(a_n)$ , se tiene  $L_p[a_n] \geq 0$ . Luego  $L_p$  es positivo.

Por último: (L1). Si  $a_n = 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) entonces  $\lim a_n = 1$  luego  $p\text{-lim } a_n = 1$ .

(L2). Sea  $a = p\text{-lim } a_n$  y  $b_k = a_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Dados  $\varepsilon > 0$  y  $0 \leq \lambda < 1$  arbitrarios, fijemos  $\lambda_1$  tal que  $\lambda < \lambda_1 < 1$  y luego  $n_1$  tal que,  $\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} < n_1$ . Por hipótesis existe  $n_2$  tal que, si  $n > n_2$  entonces  $|a_k - a| < \varepsilon$  para  $[\lambda_1(n+1)]$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n+1$ ), de donde  $|a_k - a| < \varepsilon$  para  $[\lambda_1(n+1)] - 1$  valores de  $k$  ( $2 \leq k \leq n+1$ ), es decir,  $|b_k - a| < \varepsilon$  para  $[\lambda_1(n+1)] - 1$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

Cuando  $n > \max \{n_1, n_2\}$  se tiene además que  $[\lambda n] < [\lambda_1(n+1)] - 1$ . Luego  $|b_k - a| < \varepsilon$  para (por lo menos)  $[\lambda n]$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

Para demostrar, con respecto a la  $v$ -convergencia una afirmación similar a la primera de la Prop. 6 necesitamos el siguiente

Lema. Si  $(s_n)$  y  $(t_n)$  son sucesiones reales tales que

$$\frac{1}{n} (s_1^2 + \dots + s_n^2) \longrightarrow 0 \text{ y } \frac{1}{n} (t_1^2 + \dots + t_n^2) \longrightarrow 0$$

entonces

$$\frac{1}{n} (s_1 t_1 + \dots + s_n t_n) \longrightarrow 0 .$$

Demostración. Usando la desigualdad  $|x y| < x^2 + y^2$  se tiene:

$$\begin{aligned} |s_1 t_1 + \dots + s_n t_n| &\leq |s_1 t_1| + \dots + |s_n t_n| \\ &\leq (s_1^2 + \dots + s_n^2) + (t_1^2 + \dots + t_n^2). \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\frac{1}{n}$  y tomando límites se obtiene el resultado deseado.

Proposición 3. Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  sucesiones v-convergentes y  $\lambda$  un número real. Entonces  $(a_n + b_n)$  y  $(\lambda a_n)$  son v-convergentes y se tiene:

- i)  $v\text{-lim} (a_n + b_n) = (v\text{-lim} a_n) + (v\text{-lim} b_n)$  .
- ii)  $v\text{-lim} (\lambda a_n) = \lambda(v\text{-lim} a_n)$  .

Demostración. Sean  $a = v\text{-lim} a_n$  ,  $b = v\text{-lim} b_n$  y además

$$\begin{aligned} v_n^{(a)} &= \frac{1}{n} [(a_1 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2] , \\ v_n^{(b)} &= \frac{1}{n} [(b_1 - b)^2 + \dots + (b_n - b)^2] . \end{aligned}$$

Por hipótesis  $v_n^{(a)} \longrightarrow 0$  y  $v_n^{(b)} \longrightarrow 0$  .

i) Sea

$$v_n^{(a+b)} = \frac{1}{n} [(a_1 + b_1 - (a+b))^2 + \dots + (a_n + b_n - (a+b))^2] ,$$

entonces:  $v_n^{(a+b)} = v_n^{(a)} + v_n^{(b)} +$

$$2 \frac{1}{n} [(a_1 - a)(b_1 - b) + \dots + (a_n - a)(b_n - b)] .$$

Aplicando el lema anterior con  $s_k = a_k - a$  y  $t_k = b_k - b$  se concluye que  $v_n^{(a+b)} \longrightarrow 0$  .

Luego  $(a_n + b_n)$  es v-convergente y

$$v\text{-lim} (a_n + b_n) = a + b .$$

ii) Sea ahora

$$v_n^{(\lambda a)} = \frac{1}{n} [(\lambda a_1 - \lambda a)^2 + \dots + (\lambda a_n - \lambda a)^2] ,$$

entonces  $v_n(\lambda a) = \lambda^2 v_n(a) \longrightarrow 0$ . Luego  $(\lambda a_n)$  es  $v$ -convergente y

$$v\text{-lim } (\lambda a_n) = \lambda a .$$

Proposición 9. El conjunto  $S_v$  de todas las sucesiones  $v$ -convergentes es un espacio lineal y la aplicación  $L_v : (a_n) \longrightarrow v\text{-lim } a_n$  es un límite generalizado definido sobre  $S_v$ .

Demostración. La Prop. 3 muestra que  $S_v$  es un subespacio de todas las sucesiones reales y que  $L_v$  es un funcional lineal sobre  $S_v$ .

Si  $a_n \geq 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) y  $a = L_v[a_n]$  entonces  $a = L_p[a_n]$  (Prop. 3), luego  $a \geq 0$  (pues  $L_p$  es positivo). Es decir,  $L_v$  es positivo.

La propiedad (L1) se demuestra como en la Prop. 9. Supongamos por último que  $a = L_v[a_n] = v\text{-lim } a_n$  y que  $b_k = a_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Entonces, si

$$v_n(a) = \frac{1}{n} [(b_1 - a)^2 + \dots + (b_n - a)^2]$$

$$\begin{aligned} \text{se tiene: } v_n(a) &= \frac{1}{n} [(a_2 - a)^2 + \dots + (a_{n+1} - a)^2] \\ &\leq \frac{1}{n+1} [(a_1 - a)^2 + \dots + (a_{n+1} - a)^2] \xrightarrow{\frac{n+1}{n}} 0 \end{aligned}$$

Luego  $a = v\text{-lim } b_n = L_v[b_n]$ , es decir, se cumple (L2).

### 3. Observaciones y Ejemplos.

(a) Si  $\alpha_n \longrightarrow a$  y  $\alpha_n^2 \longrightarrow a^2$  entonces  $a = v\text{-lim } a_n$ .

Este hecho se usó en la demostración de la Prop. 4; es una consecuencia inmediata de la ecuación (4).

(b) La  $v$ -convergencia es más poderosa que la convergencia ordinaria (cfr. con Prop. 4).

Ejemplo :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es un cuadrado.} \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Obviamente  $(a_n)$  no es convergente en el sentido ordinario. Por otra parte, como  $a_n^2 = a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), entonces  $\alpha_n = \alpha_n^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Ahora bien, cuando  $m^2 \leq n < (m+1)^2$ , se tiene  $\alpha_n = \frac{m}{n}$ , luego  $0 < \alpha_n = m \cdot \frac{1}{n} \leq m \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m} \leq \frac{2}{m+1} < \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ . Luego  $\alpha_n \rightarrow 0$  (y entonces también  $\alpha_n^2 \rightarrow 0$ ), concluyéndose, según (a), que  $(a_n)$  es v-convergente y que su v-límite es 0.

(c) La p-convergencia es más poderosa que la v-convergencia (cfr. con Prop. 3).

Ejemplo:

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es de la forma } 2^m. \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Veamos que  $(a_n)$  es p-convergente: Dados  $\varepsilon > 0$  y  $0 \leq \lambda < 1$ , sea  $n_1$  tal que  $(p/2^p) < 1 - \lambda$  si  $p \geq n_1$ , y sea  $n_0 = 2^{n_1}$ . Si  $n \geq n_0$  entonces existe  $p \geq n_1$  tal que  $2^p \leq n < 2^{p+1}$  teniéndose en este caso  $|a_k - 0| = 0 < \varepsilon$  para  $n - p$  valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Pero

$$n - p = n \left( 1 - \frac{p}{n} \right) \geq n \left( 1 - \frac{p}{2^p} \right) > n\lambda \geq [n\lambda].$$

Luego  $0 = p\text{-lim } a_n$ . Por otra parte:

$v_{2n}(0) = \frac{1}{2^n} (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}) = \frac{1}{3} (2^{n+2} - \frac{1}{2^{n-2}}) \rightarrow +\infty$ , y entonces  $(a_n)$  no es v-convergente.

(d) La v-convergencia no implica acotación (cfr. con Prop. 5). La sucesión

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{m} & \text{si } n = m^2 \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

no es acotada pero es  $v$ -convergente (hacia 0) .

Este mismo ejemplo muestra que el producto de dos sucesiones  $v$ -convergentes no es necesariamente  $v$ -convergente. En efecto, la sucesión  $a_n^2 = a_n \cdot a_n$  no es  $v$ -convergente.

Sin embargo, como el funcional  $L_p$  es una extensión del funcional  $L_v$  (véase Prop. 3), se cumple el siguiente resultado parcial (cfr. con Prop. 6, ii) : si  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  y  $(a_n b_n)$  son todas  $v$ -convergentes, entonces  $v\text{-}\lim a_n b_n = (v\text{-}\lim a_n) (v\text{-}\lim b_n)$ . Cabe anotar que la  $(C,1)$ -convergencia no goza de una propiedad análoga a esta.

(e) Dada una sucesión  $(a_n)$  y un número  $a$  se tiene (véanse ecuaciones (2) y (3)) :

$$v_n(a) = a^2 - 2a \alpha_n + \alpha_n^2 \geq 0 .$$

En particular:  $v_n(\alpha_n) = \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \geq 0$  ,

luego  $\alpha_n^2 \leq \alpha_n^2 (= v_n(0))$  ,

es decir  $|\alpha_n| \leq \sqrt{v_n(0)}$  .

Entonces  $v_n(0) \longrightarrow 0$  implica  $\alpha_n \longrightarrow 0$  , es decir, si  $0 = v\text{-}\lim a_n$  entonces  $0 = (C,1)\text{-}\lim a_n$ . Aplicando este resultado a la sucesión  $(b_n) = (a_n - a)$  (teniendo en cuenta que  $a = v\text{-}\lim a_n$  sii  $0 = v\text{-}\lim b_n$  y que  $a = (C,1)\text{-}\lim a_n$  sii  $0 = (C,1)\text{-}\lim b_n$ ), puede afirmarse que: Si  $(a_n)$  es  $v$ -convergente y  $a = v\text{-}\lim a_n$ , entonces  $(a_n)$  es  $(C,1)$ -convergente y  $a = (C,1)\text{-}\lim a_n$ .

La recíproca de la afirmación anterior es, en general, falsa. Así, por ejemplo, la sucesión  $a_n = (-1)^{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) es  $(C,1)$ -convergente pero no es  $v$ -convergente .

(f) Sea  $(a_n)$  una sucesión  $v$ -convergente hacia  $a$  , es

decir :

$$v_n(a) = a^2 - 2a\alpha_n + \alpha_n^2 \longrightarrow 0 .$$

De acuerdo con (e) se tiene  $\alpha_n \longrightarrow a$  y entonces se concluye que  $(\alpha_n^2)$  es convergente (y su límite es  $a^2$ ). La  $v$ -convergencia es aquí una hipótesis imprescindible; en otras palabras, la convergencia de  $(\alpha_n)$  (es decir, la  $(C,1)$ -convergencia de  $(a_n)$ ) no implica necesariamente la convergencia de  $(\alpha_n^2)$ . En efecto si

$$a_n = (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right), \quad (n = 1, 2, \dots),$$

entonces  $\alpha_n \longrightarrow 0$  mientras que  $\alpha_n^2 \longrightarrow +\infty$ .

Observemos por último, que como  $v_n(a)$  es mínimo cuando  $a = \alpha_n$  entonces la  $v$ -convergencia de  $(a_n)$  implica que  $v_n(\alpha_n) \longrightarrow 0$ .

#### 4. La $p$ -sumabilidad.

Aplicando las dos nociones de convergencia introducidas en el parágrafo 2 a la sucesión de las sumas parciales de una serie se obtienen sendas definiciones de sumabilidad :

Definición 3. Diremos que una serie  $\sum x_k$  es  $p$ -sumable si la sucesión  $(S_n)$  de sus sumas parciales es  $p$ -convergente .

El  $p$ -límite de  $(S_n)$  se llama entonces la  $p$ -suma de la serie.

En forma enteramente análoga se define la  $v$ -sumabilidad. Naturalmente, todos los resultados antes obtenidos se aplican en este caso .

Pasamos ahora a enunciar y demostrar un teorema de tipo tauberiano para la  $p$ -sumabilidad, es decir, una proposición que a partir de la  $p$ -sumabilidad y una condi-

ción adicional (condición tauberiana) permite concluir la sumabilidad usual.

Proposición 10. Sea  $\sum x_k$  una serie real tal que:

(i)  $\sum x_k$  es p-sumable, y su p-suma es  $a$ .

(ii) Existen  $M > 0$  y  $\bar{k} \in \mathbb{N}$  tales que  $|x_k| \leq M/k$  para todo  $k \geq \bar{k}$ .

Entonces  $\sum x_k$  es convergente en el sentido usual y su suma es  $a$ .

Demostración. Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que se cumplen (i) y (ii) pero que  $(S_n)$  no converge hacia  $a$ . Entonces:

(a) Existe un número  $\varepsilon > 0$  y una sucesión creciente de enteros  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots \rightarrow +\infty$  tales que

$$|S_{k_i} - a| \geq 2\varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots$$

(b) Como  $0 < 1 / (\frac{\varepsilon}{2M} + 1) < 1$  entonces puede elegirse  $\lambda$  tal que

$$\max \left\{ 1 / \left( \frac{\varepsilon}{2M} + 1 \right), 1/2 \right\} < \lambda < 1.$$

Según esto,  $1 / (\frac{\varepsilon}{2M} + 1) < \lambda$  (lo cual equivale a  $M \frac{1-\lambda}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$ ) y  $\frac{1}{2} < \lambda$  (es decir  $\frac{1}{\lambda} < 2$ ).

La hipótesis (i), es decir, la p-convergencia de  $(S_n)$  permite asegurar que:

(c) Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n > n_0$  entonces

$$|S_h - a| < \varepsilon$$

para, por lo menos,  $[\lambda n]$  valores de  $h$  ( $1 \leq h \leq n$ ).

(d) Como  $k_i \rightarrow +\infty$ , puede elegirse  $k_{i_0}$  tal que

$$[\lambda k_{i_0}] \geq \max \{ n_0, \bar{k}, 4M/\varepsilon \}.$$

Obsérvese que, como  $\lambda < 1$  entonces  $k_{i_0} > [\lambda k_{i_0}]$ .

(Nota: Se concluye, en particular, que  $k_{i_0} > 4M/\varepsilon$ , es

decir,  $2 \frac{M}{k_{i_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$  . )

Vemos ahora que  $k_{i_0} > n_0$  (puesto que  $[\lambda k_{i_0}] \geq n_0$ ) y entonces, según (c), debe tenerse  $|S_h - a| < \varepsilon$  para, por lo menos,  $[\lambda k_{i_0}]$  valores de  $h$  ( $1 \leq h \leq k_{i_0}$ ) pudiendo entonces asegurarse que :

(e) Existe  $h_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $[\lambda k_{i_0}] \leq h_0 \leq k_{i_0}$  y

$$|S_{h_0} - a| < \varepsilon .$$

Pero, según (a),

$$|S_{k_{i_0}} - a| \geq 2\varepsilon .$$

Concluyéndose que

$$|S_{k_{i_0}} - S_{h_0}| > \varepsilon$$

Se observa que  $k_{i_0} \neq h_0$  (pues en caso contrario se tendría  $\varepsilon < 0$ ) ; como además  $h_0 \leq k_{i_0}$  entonces  $h_0 < k_{i_0}$ . Sea ahora  $p = k_{i_0} - h_0$ . Recordando que  $h_0 \geq [\lambda k_{i_0}] > \bar{k}$  y la hipótesis (ii), tenemos :

$$\begin{aligned} \varepsilon &< |S_{k_{i_0}} - S_{h_0}| = |S_{h_0+p} - S_{h_0}| = |x_{h_0+1} + \dots + x_{h_0+p}| \leq \\ &\leq |x_{h_0+1}| + \dots + |x_{h_0+p}| \leq M \left( \frac{1}{h_0+1} + \dots + \frac{1}{h_0+p} \right) \\ &< M \frac{p}{h_0+1} . \end{aligned}$$

Pero como  $p = k_{i_0} - h_0$  y  $[\lambda k_{i_0}] \leq h_0$ , entonces:

$$p \leq k_{i_0} - [\lambda k_{i_0}] \leq k_{i_0} + 1 - \lambda k_{i_0} = (1 - \lambda) k_{i_0} + 1 .$$

Y por otra parte :  $h_0 + 1 \geq [\lambda k_{i_0}] + 1 \geq \lambda k_{i_0}$ , es decir:

$$\frac{1}{h_0+1} \leq \frac{1}{\lambda k_{i_0}}$$

Se tiene entonces :

$$\varepsilon < M \frac{(1 - \lambda) k_{i_0} + 1}{\lambda k_{i_0}} = M \frac{1 - \lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{M}{k_{i_0}}$$

Teniendo en cuenta la elección de  $\lambda$  (véase (b)) y de  $k_{i_0}$  (véase (d), Nota), se concluye que

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo cual es absurdo .

Como la  $v$ -sumabilidad implica la  $p$ -sumabilidad, la proposición anterior vale, en particular, si se sustituye la hipótesis de  $p$ -sumabilidad por la de  $v$ -sumabilidad.

Debido a que la  $v$ -sumabilidad implica también la  $(C,1)$ -sumabilidad, este caso particular de la Prop. 10 puede igualmente derivarse de un teorema tauberiano de mostrado por G. H. Hardy en el cual , a partir de la  $(C,1)$ -sumabilidad y de la condición (ii) se concluye la convergencia usual. Debemos esta observación al Profesor Y. Takeuchi.

#### BIBLIOGRAFIA

ZAMANSKY, M. "La sommation des séries divergentes," Gauthiers-Villars, 1954 .

(Recibido en marzo de 1968)