$$\Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{(k!)^3} \sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{1}{(-3x)} \left\{ e^{-3x} + \frac{1}{\omega} e^{-3\omega x} + \frac{1}{\omega^2} e^{-3\omega^2 x} \right\}$$

Así se tendría inmediatamente el resultado (23), pero es muy poco probable justificar este procedimiento, puesto que el punto infinito es un punto singular esencial de la función entera $F(z)$, es decir, no puede haber una fórmula asintótica que sirva para todo $\operatorname{Arg} z$.

APÉNDICE. Podemos encontrar fórmulas de recurrencia entre las funciones de la familia (1), como sigue:

(i) Sea C un contorno cerrado alrededor del origen en el plano complejo- z; entonces tenemos

$$(26) \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_C (f_n(x/z) e^z/z) dz = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{(1)^k x^k}{(k!)^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^{k+1}} dz$$

$$= \Sigma_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^{n+1}}$$

$$= f_{n+1}(x).$$

(ii)

$$(27) \qquad \int_0^{\infty} f_{n+1}(xt) e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n+1}} x^k t^k e^{-t} dt$$

$$= \Sigma_{k=0} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n+1}} x^k \int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt$$

$$= \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n+1}} x^k (k!) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^n} x^k$$

REFERENCIAS

1 G.BIRKHOFF,G.C.ROTA, Ordinary Differential Equations, Blaisdell Pub.Co.,Waltham,1960.

2 E.A.CODDINGTON,N.LEVINSON, Theory of Ordinary Equations, McGraw Hill, N.Y.,1955.

3 E.L.INCE, Ordinary Differential Equations, Dover, Nueva York, 1956

4 ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI, Higher Trascendental Functions, Vol.I,II,III, Macgraw-Hill, New York, 1953.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

(Recibido en febrero de 1968)