

Werk

Titel: Desarrollo asintótico de ...

Autor: Takeuchi, Y.

Jahr: 1968

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320387429_0002|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

DESARROLLO ASINTÓTICO DE LA FUNCIÓN $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^3}$

por

Yu TAKEUCHI

§1 INTRODUCCIÓN. La función de Bessel $J_0(2\sqrt{x})$, la función exponencial e^{-x} y otras, pertenecen a la familia de las siguientes funciones enteras:

$$(1) \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

En este artículo se halla un desarrollo asintótico de la función $f_3(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$; el procedimiento podrá servir para encontrar fórmulas asintóticas de $f_n(x)$ para cualquier n natural.

§2 UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA $f_n(x)$. Sea

$$(2) \quad h_n(t) = f_n(e^{nt}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{nkt}}{(k!)^n};$$

entonces $h_n(t)$ es una función entera. Derivando (2) con respecto a t , n veces, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^n h_n(t)}{dt^n} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(nk)^n e^{nkt}}{(k!)^n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{n^n e^{nkt}}{((k-1)!)^n} \\ &= -n^n e^{nt} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{nkt}}{(k!)^n} \end{aligned}$$

o bien

$$(3) \quad \frac{d^n h_n(t)}{dt^n} + n^n e^{nt} h_n(t) = 0$$

Sea $x = e^t$; entonces $d/dt = (dx/dt)(d/dx) = e^t d/dx = x d/dx$; por lo tanto, de (3), tenemos la siguiente ecuación diferencial para $f_n(x)$:

$$(4) \quad \left(x \frac{d}{dx}\right)^n f_n(x^n) + (n^n) x^n f_n(x^n) = 0$$

§3 SOLUCIÓN ASINTÓTICA DE LA ECUACIÓN (4) PARA EL CASO $n = 3$

Sea

$$(5) \quad F(x) = f_3(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k}}{(k!)^3};$$

entonces de (4), se tiene:

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^3 F(x) + 27x^3 F(x) = 0,$$

o,

$$(6) \quad \frac{d^3 F}{dx^3} + \frac{3}{x} \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{1}{x^2} \frac{dF}{dx} + 27F = 0$$

Para eliminar la segunda derivada, sea

$$(7) \quad F(x) = y(x)/x;$$

entonces (6) se transforma en

$$(8) \quad y'' + \frac{1}{x^2} y' + \left(27 - \frac{1}{x^3}\right) y = 0.$$

Sabemos que una ecuación diferencial del tipo (8) admite soluciones asintóticas de la siguiente forma

$$(9) \quad y \sim e^{ax} \left\{ 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \dots \right\}$$

cuando $x \rightarrow +\infty$ ([1], [2], [3]). Para encontrar los valores de los coeficientes $A_1, A_2, A_3, \dots$, primero derivamos

(9) con respecto a x :

$$(10) \left\{ \begin{aligned} y' &\sim \alpha e^{\alpha x} \left\{ 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2 - (A_1/\alpha)}{x^2} + \frac{A_3 - (2A_2/\alpha)}{x^3} + \dots \right\} \\ y'' &\sim \alpha^2 e^{\alpha x} \left\{ 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2 - (2A_1/\alpha)}{x^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_3 - (4A_2/\alpha) + (2A_1/\alpha^2)}{x^3} + \dots \right\} \\ y''' &\sim \alpha^3 e^{\alpha x} \left\{ 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2 - (3A_1/\alpha)}{x^2} + \frac{A_3 - (6A_2/\alpha) + (6A_1/\alpha^2)}{x^3} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

Reemplazando (9) y (10) en la ecuación (8), se tiene:

$$\begin{aligned} &\alpha^3 e^{\alpha x} \left\{ 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2 - (3A_1/\alpha)}{x^2} + \frac{A_3 - (6A_2/\alpha) + (6A_1/\alpha^2)}{x^3} + \dots \right\} \\ &+ \alpha e^{\alpha x} \left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2 - (A_1/\alpha)}{x^4} + \dots \right\} \\ &+ (27 - \frac{1}{3}) \left\{ e^{\alpha x} \right\} \left\{ 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \dots \right\} = 0 \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de 1 , $1/x$, $1/x^2$, $1/x^3$, ..., se obtiene:

$$(11) \quad \alpha = -3, -3\omega, -3\omega^2 \quad (\omega = (-1+i\sqrt{3})/2)$$

$$(12) \quad A_1 = 1/(3\alpha), A_2 = 2/(9\alpha^2), A_3 = 14/(81\alpha^3), \dots$$

Por lo tanto, tenemos tres soluciones asintóticas de la ecuación (8), como sigue:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} y_1 &\sim e^{-3x} \left\{ 1 - \frac{1}{9x} + \frac{2}{81x^2} - \dots \right\} \sim 0 \quad (x \rightarrow +\infty) \\ y_2 &\sim e^{-3\omega x} \left\{ 1 - \frac{1}{9\omega x} + \frac{2}{81\omega^2 x^2} - \frac{14}{2187x^3} + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

$$y_3 \sim e^{-3\omega^2 x} \left\{ 1 - \frac{1}{9\omega^2 x} + \frac{2}{81\omega x} + \frac{14}{2187x^3} + \dots \right\}$$

donde hemos usado que $\omega^4 = \omega$. Entonces de (7) y (13) se obtiene un desarrollo asintótico de la función $F(x)$ como combinación lineal de y_2, y_3 :

$$(14) \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k}}{(k!)^3} \\ \sim B \frac{e^{-3\omega x}}{x} \left\{ 1 - \frac{1}{9\omega x} + \frac{2}{81\omega^2 x^2} - \frac{14}{2187x^3} + \dots \right\} \\ + C \frac{e^{-3\omega^2 x}}{x} \left\{ 1 - \frac{1}{9\omega^2 x} + \frac{2}{81\omega x^2} - \frac{14}{2187x^3} + \dots \right\}$$

donde B y C son constantes adecuadas.

§4 DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES EN (14)

A partir de la ecuación diferencial es imposible determinar los valores de las constantes B y C en (14). En este parágrafo emplearemos otro método para encontrar una aproximación de la función $F(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

LEMA 1. Sean

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

$(a_k, b_k \geq 0)$ dos series convergentes para todo $x > 0$;
si $b_k = a_k(1 + o(1))$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)/f(x) = 1$$

es decir, $g(x) \sim f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

Demostración: Sea

$$b_k = a_k(1 + c_k);$$

entonces

$$(15) \quad g(x)/f(x) = (\sum_0^{\infty} a_k x^k + \sum_0^{\infty} a_k c_k x^k) / (\sum_0^{\infty} a_k x^k)$$

$$= 1 + \frac{\sum_0^{\infty} a_k c_k x^k}{\sum_0^{\infty} a_k x^k}$$

Como $c_k = o(1)$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe N entero positivo tal que

$$(16) \quad k > N \text{ implica } |c_k| < \varepsilon/2$$

Para este N se tiene evidentemente que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sum_1^N |a_k c_k| x^k) / (\sum_0^{\infty} a_k x^k) = 0;$$

luego existe x_0 tal que

$$(17) \quad x > x_0 \text{ implica } (\sum_1^N |a_k c_k| x^k) / (\sum_0^{\infty} a_k x^k) < \varepsilon/2.$$

Por lo tanto, de (15), (16) y (17) tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right| &\leq \frac{\sum_0^{\infty} |a_k c_k| x^k}{\sum_0^{\infty} a_k x^k} \\ &= \frac{\sum_0^N |a_k c_k| x^k}{\sum_0^{\infty} a_k x^k} + \frac{\sum_{N+1}^{\infty} |a_k c_k| x^k}{\sum_0^{\infty} a_k x^k} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sum_{N+1}^{\infty} a_k x^k}{\sum_0^{\infty} a_k x^k} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

(i) Utilizando la fórmula de Stirling, tenemos:

$$(3k)! \sim \sqrt{(2\pi)} (3k)^{3k+1/2} \cdot e^{-3k} \quad (k \rightarrow +\infty)$$

$$(k!)^3 \sim (\sqrt{(2\pi)} k^{k+1/2} \cdot e^{-k})^3 = 2\pi \sqrt{(2\pi)} k^{3k+3/2} e^{-3k},$$

luego

$$(18) \quad (k!)^3 \sim \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{k(3k)!}{3^{3k}} \quad (k \rightarrow +\infty);$$

del lema 1 tenemos:

$$(19) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(k!)^3} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{(3x)^{3k}}{k(3k)!} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Por otra parte, si $\omega = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = (-1+i\sqrt{3})/2$ se tiene:

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 = 0, \quad \omega^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^2)^3 = 0;$$

entonces tenemos:

$$(20) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{3k}}{(k!)^3} = \frac{1}{3} \left\{ e^X + e^{\omega X} + e^{\omega^2 X} \right\}.$$

Integrando la identidad (20) de 0 a X, se obtiene: *

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{3k}}{(3k+1)(3k)!} = \frac{1}{3} \left\{ e^X + \frac{1}{\omega} e^{\omega X} + \frac{1}{\omega^2} e^{\omega^2 X} \right\};$$

entonces del lema 1 tenemos:

$$(21) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{3k}}{k(3k)!} \sim \frac{1}{X} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3X^{3k+1}}{(3k+1)(3k)!} \\ = \frac{1}{X} \left\{ e^X + \frac{1}{\omega} e^{\omega X} + \frac{1}{\omega^2} e^{\omega^2 X} \right\}.$$

Entonces de (19) y (21) tenemos:

$$(22) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(k!)^3} \sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{1}{3x} \left\{ e^{3x} + \frac{e^{3\omega x}}{\omega} + \frac{e^{3\omega^2 x}}{\omega^2} \right\}.$$

(ii) Utilizando la fórmula de Stirling tenemos:

$$(18') \quad ((2k)!)^3 \sim \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{2k}{3^{6k}} (6k)! \quad (k \rightarrow +\infty)$$

entonces:

$$(19') \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^3)^{2k}}{((2k)!)^3} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3} (3x)^{6k}}{2 \cdot 2\pi k(6k)!}$$

Sea

$$\tau = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = (1+i\sqrt{3})/2 = -\omega^2,$$

entonces por un procedimiento análogo a (i), se tiene la siguiente fórmula asintótica, cuando $x \rightarrow +\infty$:

* $1 + (1/\omega) + (1/\omega^2) = 0$

$$(22') \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^3)^{2k}}{((2k)!)^3} \sim \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2\pi^3 x} \left[e^{3x} + \frac{e^{3\tau x}}{\tau} + \frac{e^{3\tau^2 x}}{\tau^2} + \frac{e^{3\tau^3 x}}{\tau^3} + \frac{e^{3\tau^4 x}}{\tau^4} + \frac{e^{3\tau^5 x}}{\tau^5} \right] \cdot \blacksquare$$

(iii) Teniendo en cuenta la relación $\tau^2 = \omega$ se tiene de (22) y (22') la siguiente fórmula asintótica:

$$(23) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k}}{(k!)^3} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^3)^{2k}}{((2k)!)^3} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(k!)^3} \\ \sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{1}{3x} \left\{ \frac{e^{3\tau x}}{\tau} + \frac{e^{3\tau^2 x}}{3} + \frac{e^{3\tau^5 x}}{5} \right\} \\ = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \frac{1}{x} \left\{ \frac{e^{-3\omega^2 x}}{-\omega^2} + \frac{e^{3\omega x}}{-\omega} - e^{-3x} \right\}.$$

Comparando (14) con (23) tenemos:

$$(24) \quad B = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \frac{1}{-\omega} = (1+i\sqrt{3})/4\pi\sqrt{3} \\ C = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \frac{1}{-\omega^2} = (1-i\sqrt{3})/4\pi\sqrt{3}.$$

Reemplazando (24) en (14), obtenemos finalmente:

$$(25) \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k}}{(k!)^3} \\ \sim \frac{1}{\sqrt{3}x} \frac{e^{3x/2}}{x} \left[\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{9x} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2}{81x^2} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \pi\right) - \frac{14}{2187x^3} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{5}{3}\pi\right) + \dots \right]$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (22) sirve solamente para $x \rightarrow +\infty$, pero si se pudiera utilizar la misma fórmula (22) para $x \rightarrow -\infty$, se tendría:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{(k!)^3} \sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{1}{(-3x)} \left\{ e^{-3x} + \frac{1}{\omega} e^{-3\omega x} + \frac{1}{\omega^2} e^{-3\omega^2 x} \right\}$$

Así se tendría inmediatamente el resultado (23), pero es muy poco probable justificar este procedimiento, puesto que el punto infinito es un punto singular esencial de la función entera $F(z)$, es decir, no puede haber una fórmula asintótica que sirva para todo $\text{Arg } z$.

APÉNDICE. Podemos encontrar fórmulas de recurrencia entre las funciones de la familia (1), como sigue:

(i) Sea C un contorno cerrado alrededor del origen en el plano complejo- z ; entonces tenemos

$$\begin{aligned} (26) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C (f_n(x/z) e^{z/z}) dz &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)^k x^k}{(k!)^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^{k+1}} dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^{n+1}} \\ &= f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad (27) \quad \int_0^{\infty} f_{n+1}(xt) e^{-t} dt &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n+1}} x^k t^k e^{-t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n+1}} x^k \int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n+1}} x^k (k!) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^n} x^k \end{aligned}$$

REFERENCIAS

- 1 G.BIRKHOFF, G.C.ROTA, Ordinary Differential Equations, Blaisdell Pub.Co., Waltham, 1960.
- 2 E.A.CODDINGTON, N.LEVINSON, Theory of Ordinary Equations, McGraw Hill, N.Y., 1955.

- 3 E.L.INCE, Ordinary Differential Equations, Dover,
Nueva York, 1956
- 4 ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI, Higher
Trascendental Functions, Vol.I,II,III, Macgraw-
Hill, New York, 1953.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

(Recibido en febrero de 1968)