Werk

Label: Article

Jahr: 1987

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?316342866_0028|log48

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
28,2(1987)

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN ESPACE VECTORIEL EN LA SOMME D'UN CONVEXE ET D'UN SOUS-ESPACE

Jacques BAIR

Résumé . Dans un premier stade, nous caractérisons complètement dans R^n les ensembles convexes A et les points a pour lesquels $A + Ra = R^n$: en-dehors du cas où l'ensemble A contient un hyperplan, il faut et il suffit que le cône d'ouverture intérieur de A contienne le point a ou son opposé -a. Ensuite, nous généralisons le problème dans tout espace vectoriel réel E en recherchant notamment quels convexes A et quels sous-espaces vectoriels B donnent lieu à l'égalité A + B = E : lorsque A est une cellule convexe, une condition nécessaire et suffisante est que le cône-barrière de A ne rencontre le sous-espace orthogonal à B qu'en l'origine.

Mots clefs : somme de Minkowski, ensemble convexe, cône d'ouverture intérieure, cône-barrière, sous-espace orthogonal.

Classification : 52 A 20, 52 A 05.

---

0. *Préliminaires*

A la suite de Gerstewitz et Iwanow [6], Zalinescu a étudié les espaces vectoriels réels qui peuvent se décomposer en la somme de Minkowski d'un ensemble convexe et d'un sous-espace vectoriel engendré par un point : il obtient une caractérisation complète lorsque l'ensemble convexe considéré est un cône et des conditions nécessaires dans le cas général [10]. Nous sommes en mesure d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes valables pour tout convexe (non nécessairement conique) et, au surplus, d'étendre ce problème au cas d'un sous-espace vectoriel de dimension quelconque.

Dans la première partie de cet article, nous nous placerons exclusivement dans l'espace euclidien R^n de dimension finie n (quelconque, avec toutefois n > 1); pour la seconde moitié, nous travaillerons dans un espace vectoriel réel E de dimension arbitraire (éventuellement infinie, mais néanmoins supérieure à 1).

Nous adopterons les notations et la terminologie qui nous sont familières. Notamment, pour tout ensemble non vide A d'un espace vectoriel réel E, nous désignerons par ${}^sA$, ${}^lA$, ${}^tA$, ${}^iA$, A^i et ${}^mA$ respectivement l'*enveloppe spatiale*, l'*enveloppe linéaire*, le *sous-espace vectoriel parallèle* (c'est-à-dire ${}^tA = {}^lA - {}^lA$), l'*internat*, l'*internat propre* et la *marge* de A [1 à 5, 8 à 10].

Dans R^n, nous exploiterons quelques cônes bien connus associés à un convexe fermé non vide A : le *cône asymptotique* $\mathbb{A}(A)$ (encore noté A_∞ [9] ou $0(A)$ [1]) qui coïncide avec $\{y \in R^n : \exists x \in A, \forall\lambda \geq 0, x + \lambda y \in A\}$, le *cône d'ouverture intérieure* $\mathbb{P}(A) = \{y \in R^n : \forall x \in R^n, \exists\lambda \geq 0, x + \lambda y \in A\} \cup \{0\}$ [1] et l'*espace caractéristique* $\mathbb{E}(A) = \mathbb{A}(A) \cap -\mathbb{A}(A)$ [1,4,8]. Rappelons encore que tout convexe non vide A de R^n est doué de points internes et que, dès lors, l'internat de l'adhérence $\overline{A}$ (pour la topologie naturelle sur R^n) coïncide avec ${}^iA$ [5], tandis que son internat propre est égal à son intérieur (pour la topologie naturelle sur R^n); par ailleurs, le cône asymptotique d'un convexe fermé non vide coïncide avec son cône de récession et aussi avec son cône d'infinitude [8; p. 332] et est de ce fait un cône convexe fermé [8; p. 328]; enfin, une *direction asymptote* de A est une demi-droite issue de l'origine dont un translaté est *asymptote* pour A (c'est-à-dire est disjoint de A tout en étant à distance nulle de A), tandis qu'une *direction marginale* est une demi-droite issue de l'origine et dont un translaté est inclus dans la marge de A [1; p. 237].

Dans un espace vectoriel réel E de dimension quelconque, on associe à toute partie A divers cônes composés de formes linéaires sur A, et donc contenus dans le dual algébrique E* de E. Nous utiliserons le *polaire* de A défini par $*A = \{x^* \in E^* : \langle x,x^*\rangle \leq 0, \forall x \in A\}$; nous aurons également recours au *cône-barrière* de A, à savoir $\mathbb{B}(A) = \{x^* \in E^* : \exists\alpha \in R, \langle x,x^*\rangle \leq \alpha, \forall x \in A\}$ [3,4,8]. Signalons à ce propos que si A est une variété linéaire non vide de E, $\mathbb{B}(A)$ est le sous-espace orthogonal de ${}^tA$, soit encore $\mathbb{B}(A) = {*}^tA$ [8; p. 340]; par ailleurs, ${*}^tA$ est l'ensemble des formes linéaires nulles sur ${}^tA$, c'est-à-dire des formes constantes sur A [3; p. 736 et 4; p. 57].

1. *Caractérisations dans* R^n

Pour uniformiser les notations, nous désignerons par ${}^s\{a\}$, et non plus Ra, l'enveloppe spatiale d'un singlet $\{a\}$.

Nous débutons par une remarque assez banale, mais qui s'avérera utile par la suite.

Proposition 1.1. *Dans* R^n, *pour un convexe non vide* A *et un point* a, $A + {}^s\{a\} = R^n$ *si et seulement si* $\overline{A} + {}^s\{a\} = R^n$, *ou encore si et seulement si* ${}^iA + {}^s\{a\} = R^n$.

Preuve. Si $\overline{A} + {}^s\{a\} = R^n$, l'égalité $R^n = {}^i(\overline{A} + {}^s\{a\})$ entraîne ${}^i\overline{A} + {}^{is}\{a\} = R^n$ [5; p. 34], soit ${}^iA + {}^s\{a\} = R^n$ puisque ${}^i\overline{A} = {}^iA$ et ${}^{is}\{a\} = {}^s\{a\}$; a fortiori, $A + {}^s\{a\} = R^n$.

La réciproque est évidente.

Ce premier résultat nous autorise donc à prendre désormais A fermé. Nous allons tout d'abord donner une première conséquence de l'égalité $A + {}^s\{a\} = R^n$.

Proposition 1.2. *Dans* R^n, *soient* A *un convexe fermé non vide et* a *un point quelconque; si* $A + {}^s\{a\} = R^n$, *l'intérieur de* A *n'est pas vide sauf dans le cas où* A *est un hyperplan qui ne contient pas* a.

Preuve. Nous pouvons supposer sans aucune restriction que l'origine appartient à A et que A diffère d'un hyperplan qui ne contient pas a.

Procédons par l'absurde et supposons vide l'intérieur de A. En vertu de nos hypothèses, il existe un point b dans ${}^lA\backslash A$, avec ${}^lA \neq R^n$. Il est clair que le point a ne peut pas être situé dans ${}^lA$, d'où a + b n'est évidemment pas un élément de $A + {}^s\{a\}$, ce qui est impossible.

Cet énoncé suggère l'examen de l'espace caractéristique $\mathbb{B}(A)$, pour savoir si A contient ou non un hyperplan : de fait, A inclut un hyperplan si et seulement si la dimension de $\mathbb{B}(A)$, notée dim $\mathbb{B}(A)$, vaut au moins n-1.

Voici la caractérisation complète des convexes A et des points a tels que $A + {}^s\{a\} = R^n$, ce qui fournit la réponse à une question soulevée implicitement par Zalinescu [10].

Proposition 1.3. *Dans* R^n, *soient* A *un convexe fermé non vide et* a *un point distinct de l'origine;* $A + {}^s\{a\} = R^n$ *si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :* (i) dim $\mathbb{B}(A) = n-1$ *et* $a \notin \mathbb{B}(A)$, *ou* (ii) $\{a, -a\} \cap \mathbb{P}(A) \neq \emptyset$.

Preuve. La nécessité est évidente. De fait, si dim $\mathbb{B}(A) = n - 1$ et $a \notin \mathbb{B}(A)$, on doit visiblement avoir $\mathbb{B}(A) + {}^s\{a\} = R^n$, d'où $A + {}^s\{a\} = R^n$; par ailleurs, si a ou -a appartient à $\mathbb{P}(A)$, un simple recours à la définition du cône d'ouverture intérieure permet de conclure.

Réciproquement, supposons vérifiée l'égalité $A + {}^s\{a\} = R^n$. Zalinescu a démontré qu'il peut alors exister un sous-espace vectoriel H, de codimension 1, tel que $a \notin H$ et $A = a + H$ ou $A^i =]\alpha,\beta[\ a + H$ pour deux réels α,B (avec $\alpha < \beta$) [10; Proposition 3.a),b) p. 545]; on a, dans ces conditions, $H = \mathbb{B}(A)$, d'où dim $\mathbb{B}(A) = n - 1$ et $a \notin \mathbb{B}(A)$. Si cette première éventualité n'est pas rencontrée, il vient obligatoirement $A +]0,\infty[\ a \subset A^i$ ou $A -]0,\infty[\ a \subset A^i$ [10; Proposition 3.c), d), p. 545]. Si $A +]0,\infty[\ a \subset A^i$, le point a est évidemment un élément du cône asymptotique $\mathbb{A}(A)$ de A, mais la demi-droite D = [0 : a) n'est pas une direction marginale ou asymptote de A : en effet, il est exclu qu'un translaté de D soit inclus dans la marge de A puisque $A +]0,\infty[\ a \subset A^i$, de même qu'il est interdit à D d'être une direction asymptote de A car un translaté $x_o + D$ de D qui serait asymptote pour A ne pourrait pas rencontrer $A + {}^s\{a\}$, ce qui est en contradiction avec l'égalité de départ; au total, le point a est bien un élément de $\mathbb{P}(A)$ grâce à la description géométrique de l'ouverture intérieure [1; Theorem 1, p. 237]. De même, si $A -]0,\infty[\ a \subset A^i$, le point -a appartient à $\mathbb{P}(A)$.

Pour illustrer simplement ce résultat, considérons, dans R^2, le convexe fermé $A = \{x \in R^2 : x_2 \geq x_1^2\} \cup \{x \in R^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$: $A + {}^s\{a\} = R^2$ pour tous les points $a = (a_1, a_2)$ tels que la première coordonnée a_1 soit nulle ou que le produit $a_1 a_2$ des coordonnées soit positif, et uniquement pour ceux-là; en particulier, $A + {}^s\{(1,0)\} = \{x \in R^2 : x_2 \geq 0\}$ diffère de R^2. Ce cas typique montre bien que l'ouverture intérieure $\mathbb{P}(A)$ ne peut pas toujours être remplacée par le cône asymptotique $\mathbb{A}(A)$ (qui est mieux connu et toujours fermé). Nous allons toutefois démontrer que ce cône asymptotique permet de caractériser parfaitement et fort simplement les ensembles continus qui jouissent de la propriété considérée; rappelons qu'un ensemble *continu* (au sens de Gale-Klee) est un convexe fermé dont la fonction-support est continue, tandis qu'un ensemble ***parabolique*** (au sens de Bourbaki) est un convexe fermé A tel que, pour tout z n'appartenant pas à A, il n'existe aucune demi-droite d'origine z contenue dans $z + \mathbb{A}(A)$ et ne rencontrant pas A, ces deux notions d'ensembles continus et paraboliques étant équivalentes [1; p. 238].

Proposition 1.4. *Dans* R^n, *soient* A *un convexe non vide continu et* a *un point distinct de l'origine;* $A + {}^s\{a\} = R^n$ *si et seulement si* $\{a, -a\} \cap \mathbb{A}(A) \neq \emptyset$.

Preuve. Observons d'emblée que $\mathbb{A}(A)$ et $\mathbb{P}(A)$ coïncident en vertu de l'hypothèse de continuité faite sur A [1; Theorem 2, p. 238].

La conclusion découle directement de la proposition précédente, sachant que la dimension de $\mathbb{B}(A)$ ne peut pas être égale à n - 1. En effet, si dim $\mathbb{B}(A)$ = n - 1, A doit coïncider avec un hyperplan, l'enveloppe convexe de la réunion des deux hyperplans parallèles ou encore un demi-espace fermé, ce qui est absurde puisque ces types d'ensembles ne sont évidemment pas paraboliques.

Par ailleurs, notons encore que notre proposition 1.3 redonne immédiatement, dans R^n, la proposition 4(ii) de Zalinescu [10; p. 548], ce qui livre une condition suffisante (mais non nécessaire ainsi qu'en atteste l'exemple ci-dessus) pour atteindre l'égalité $A + {}^s\{a\} = R^n$.

Proposition 1.5. *Dans* R^n, *soit* A *un convexe fermé et* a *un point distinct de l'origine; si* a *est un point intérieur de* $\mathbb{A}(A)$, *alors* $A + {}^s\{a\} = R^n$.

Preuve. Il suffit à nouveau d'appliquer notre proposition 1.3, puisque l'intérieur de $\mathbb{A}(A)$ est inclus dans $\mathbb{P}(A)$ [2; pp. 180-181].

Signalons néanmoins qu'il n'est pas requis d'avoir le cône asymptotique $\mathbb{A}(A)$ de dimension maximale pour avoir $A + {}^s\{a\} = R^n$; pour preuve, toujours dans R^2, l'ensemble parabolique $A = \{x \in R^2 : x_2 \geq x_1^2\}$ et le point $a = (1,0)$: $\mathbb{A}(A) = \mathbb{P}(A) = \{\lambda a : \lambda \geq 0\}$ et, conformément à la proposition 1.3, $A + {}^s\{a\} = R^2$. Ce deuxième exemple montre que, malheureusement, la formule $A + {}^s\{a\} = R^n$ ne va pas toujours de pair avec $\mathbb{A}(A) + {}^s\{a\} = R^n$. Il est toutefois une circonstance où ces deux égalités sont équivalentes, à savoir lorsque A est *hyperbolique* (c'est-à-dire lorsque A est un convexe fermé non borné qui est inclus dans la somme d'un convexe compact C et du cône asymptotique $\mathbb{A}(A)$ [2; p. 182]).

Proposition 1.6. *Dans* R^n, *soient* A *un convexe hyperbolique et* a *un point distinct de l'origine;* $A + {}^s\{a\} = R^n$ *si et seulement si* $\mathbb{A}(A) + {}^s\{a\} = R^n$, *ou encore si et seulement si* $\{a,-a\} \cap [\mathbb{A}(A)]^i \neq \emptyset$ *à moins que* $\mathbb{A}(A)$ *ne soit un hyperplan qui ne contienne pas le point* a.

Preuve. L'égalité $A + {}^s\{a\} = R^n$ entraîne, pour le convexe compact C intervenant dans la définition d'un ensemble hyperbolique, $C + \mathbb{A}(A) + {}^s\{a\} = R^n = C + R^n$, d'où $\mathbb{A}(A) + {}^s\{a\} = R^n$ grâce à un théorème de simplification [7; Théorème 1, p. 532]; d'après un résultat de Zalinescu qui caractérise les cônes convexes dont la somme avec l'enveloppe spatiale d'un singlet redonne tout l'espace [10; Proposition 1, p. 544], on sait alors que $\mathbb{A}(A)$ est un hyperplan qui ne contient pas a ou que l'intérieur de $\mathbb{A}(A)$ comprend un des deux points a, -a.

Il est aisé de conclure en remarquant que l'égalité $\mathbb{A}(A) + {}^s\{a\} = R^n$ entraîne toujours $A + {}^s\{a\} = R^n$ puisque $A = A + \mathbb{A}(A)$ [8; 5.5, p. 332].

2. *Généralisation dans un espace vectoriel de dimension quelconque*

Nous allons aborder le problème en adoptant un autre point de vue et en le généralisant. Nous nous proposons en effet de caractériser, dans un espace vectoriel réel E de dimension quelconque (mais supérieure à 1), quels convexes A et quels ensembles B (non nécessairement uniponctuels) donnent lieu à l'égalité $A + {}^sB = E$.

Nous obtenons un premier résultat en faisant appel à la propriété d'intersection; rappelons à ce propos qu'une famille finie $(A_j)_{j \in J}$ de sous-ensembles de E est dite avoir la *propriété d'intersection* lorsque, pour toute famille $(x_j)_{j \in J}$ de points de E, l'ensemble $\bigcap_{j \in J} (x_j + A_j)$ n'est pas vide [9; p. 449].

Proposition 2.1. *Dans un espace vectoriel* E, *pour un convexe non vide* A *et un ensemble non vide* B, *les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $A + {}^sB = E$;
(ii) *la famille* $(A, {}^sB)$ *possède la propriété d'intersection;*
(iii) *tout translaté du sous-espace* ${}^sB$ *rencontre* A.

Preuve. L'équivalence des deux premières propriétés résulte du théorème 2.8 de Vangeldère [9; 2.8; p. 450], compte tenu de l'égalité ${}^sB = -{}^sB$, tandis que celle des deux dernières découle de l'énoncé 2.7 de Vangeldère [9; 2.7, p. 450].

Lorsque A est une *cellule convexe,* c'est-à-dire un convexe d'internat non vide [4; p. 3], on peut être plus précis en ayant recours à certains cônes associés à A et introduits dans le dual algébrique E*.

Proposition 2.2. *Dans un espace vectoriel* E, *soient* A *une cellule convexe et* B *un ensemble non vide; les trois assertions de l'énoncé précédent sont équivalentes aux suivantes :*
(iv) $\mathbb{B}(A) \cap {}^{*s}B = \{0\}$;
(v) *pour toute forme linéaire* f *non nulle sur* E, $f(B) \neq \{0\}$ *ou* $f(A) = R$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 2.10 de Vangeldère [9; 2.10, p. 451] pour régler directement le sort de la propriété (iv). Ce même énoncé [9; 2.10, p. 451] assure l'équivalence des quatre premières assertions (i) à (iv) avec la propriété suivante : pour toute forme linéaire f non nulle sur E, $f(A) - f({}^sB) = R$; la conclusion est alors immédiate puisque $f(B) \neq \{0\}$ entraîne $f({}^sB) = R$, tandis que $f(B) = \{0\}$ implique $f(A) = f(A) - f({}^sB)$.

Notons que dans le cas particulier où $B = \{a\}$ avec $a \neq 0$, les deux résultats ci-dessus résolvent le problème initialement étudié et traité en partie par Zalinescu [10], à savoir caractériser complètement les convexes A (éventuellement doués d'un internat non vide) et les poins a tels que $A + {}^s\{a\} = E$. D'un autre côté, pour $B = {}^sB$, les deux dernières propositions livrent des critères pour reconnaître quand la somme d'un convexe et d'un sous-espace coïncide avec tout l'espace. Dans le même ordre d'idée, nous pouvons caractériser les convexes A et les sous-espaces vectoriels B pour lesquels $A + B = {}^{1}A$.

Proposition 2.3. *Dans un espace vectoriel* E, *soient* A *un convexe non vide et* B *un sous-espace;* $A + B = {}^{1}A$ *si et seulement si* B *est inclus dans* ${}^{t}A$ *et tout translaté de* B *qui rencontre* ${}^{1}A$ *possède également une intersection non vide avec* A.

Preuve. Si $A + B \subset {}^{1}A$, il est clair que B doit être contenu dans ${}^{t}A$, tandis qu'un translaté de B qui rencontre ${}^{1}A$ en $x_0 = a + b$, avec $a \in A$ et $b \in B$, coïncide nécessairement avec $a + B$ et rencontre de ce fait A.

Réciproquement, $B \subset {}^{t}A$ implique $A + B \subset {}^{1}A + {}^{t}A = {}^{1}A$. Par ailleurs, si x est un point arbitraire de ${}^{1}A$, le translaté $x + B$ de B rencontre ${}^{1}A$, donc aussi A en vertu de l'hypothèse, ce qui veut dire que x appartient également à $A - B = A + B$.

Proposition 2.4. *Dans un espace vectoriel* E, *soient* A *une cellule convexe et* B *un sous-espace;* $A + B = {}^{1}A$ *si et seulement si* ${}^{*t}A = \mathbb{B}(A) \cap {}^{*}B$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que $\mathbb{B}(A+B) = \mathbb{B}(A) \cap \mathbb{B}(B)$, $\mathbb{B}(B) = {}^{*}B$ et $\mathbb{B}({}^{1}A) = {}^{*t}A$ [8; 6.18, p. 340].

Si $A + B = {}^{1}A$, on a $\mathbb{B}(A+B) = \mathbb{B}({}^{1}A)$ d'où, en vertu des lignes précédentes, $\mathbb{B}(A) \cap {}^{*}B = {}^{*t}A$.

Réciproquement, ${}^{*t}A \subset {}^{*}B$ entraîne ${}^{**}B \subset {}^{**t}A$ ou $B \subset {}^{t}A$ [8; 6.2 et 6.4, p. 336], et dès lors $A + B \subset A + {}^{t}A = {}^{1}A$. Pour démontrer l'autre inclusion, procédons par l'absurde et supposons l'existence d'un point x_0 situé dans ${}^{1}A$, mais non dans A+B. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer sans restriction que ${}^{1}A$ est un sous-espace (forcément égal à ${}^{t}A$) et que A+B est donc une cellule proprement convexe au sein du sous-espace ${}^{t}A$ [5; p. 34]. Par un théorème classique de séparation, il existe un hyperplan H dans ${}^{t}A$ qui sépare franchement A+B de $\{x_0\}$; il est alors possible de construire, dans l'espace entier E, un hyperplan $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$, où f désigne une forme linéaire non nulle sur E et α un réel, qui sépare franchement A+B de $\{x_0\}$ dans E : on peut même s'arranger pour avoir $A+B \subset \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$; la forme f n'appartient pas à ${}^{*t}A$, car elle n'est pas constante sur A; par contre, f est un élément de $\mathbb{B}(A+B) = \mathbb{B}(A) \cap {}^{*}B$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Bibliographie

[1] J. BAIR : A geometric description of the inner aperture of a convex set, Acta Math. Sc. Hung. 38(1981), 237-240.

[2] J. BAIR : Liens entre le cône d'ouverture interne et l'internat du cône asymptotique d'un convexe, Bull. Soc. Math. Belgique XXXV(1983), 177-187.

[3] J. BAIR : Quelques questions soulevées par le cône barrière d'un convexe, Comment. Math. Univ. Carolinae 24(1983), 731-740.

[4] J. BAIR : Structure asymptotique et propriétés de séparation en géométrie convexe, Université de Liège (Faculté des Sciences), 1984.

[5] J. BAIR - R. FOURNEAU : Etude géométrique des espaces vectoriels - une introduction, Lecture Notes in Mathematics 489, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[6] C. GERSTEWITZ - E. IWANOW : Dualität für nichtkonvexe Vektoroptimierungs-probleme, Wiss. Z. th. Ilmenau 31(1985), 61-81.

[7] F. JONGMANS : Sur les complications d'une loi de simplification dans les espaces vectoriels, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 42(1973), 529-534.

[8] F. JONGMANS : Cris et chuchotements des cônes, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 49(1980), 312-346.

[9] J. VANGELDERE : Propriété de l'intersection en dimension quelconque, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 48(1979), 444-460.

[10] C. ZALINESCU : On a class of convex sets, Comment. Math. Univ. Carolinae 27(1986), 543-549.

Institut de Mathématique
Université de Liège
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 Liège (Belgique).

(Oblatum 2.3. 1987)