COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

26,1 (1985)

ИНТЕГРАЛЫ ЭНЕРГИИ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПО ПЕТРОВСКОМУ

С.К.Годунов

Abstract: The paper is a survey of results achieved by the Novosibirsk mathematical school in construction of new energy integrals for general strongly hyperbolic equation. One utilizes the nonuniqueness of quadratic forms in Leray's construction (by separating operator) to obtain positive definiteness of the first quadratic form. The strongly hyperbolic equation may be reduced to a symmetric hyperbolic system in the sense of Friedrichs if this construction is possible. New energy integrals are used for initial-boundary value problems, e.g. for wave equation and gas dynamics.

Key words: Energy integral, symmetric hyperbolic system, strongly hyperbolic equation, separating operator, wave equation.

Classification: 35L25, 35L65, 35L05.

---

§ I. Постановка вопроса

Дифференциальное уравнение

$$\mathcal{P}_n\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u(t,x,y)\equiv$$

$$\equiv\mathcal{P}_n\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\dots,\frac{\partial}{\partial y_m}\right)u(t,x,y_1,y_2,\dots,y_m)=0 \qquad \text{(I.I)}$$

называется t-гиперболическим по Петровскому, если алгебраическое уравнение $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\eta)=0$, построенное по его алгебраическому полиному $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\eta)$ при любых вещественных ξ,η

This paper was presented on the International Spring School on Evolution Equations, Dobřichovice by Prague, May 21-25, 1984 (invited paper).

($\xi^2+\|\zeta\|^2>0$) имеет только вещественные и различные корни $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Мы предполагаем $\mathcal{P}_n(\tau, \xi, \zeta)$ однородным полиномом степени n

В 1937 году И.Г.Петровский [I], [2] показал, что гиперболичность - это условие необходимое и достаточное для корректности задачи Коши с начальными данными на плоскости $t=0$ для любых дифференциальных уравнений, у которых оператор $\mathcal{P}_n$ заменен на $\mathcal{P}_n\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) + \mathcal{R}_{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ возмущенный приписыванием произвольных членов с производными порядка меньше n.

В начале пятидесятых годов появились две важные принципиальные работы, содержащие дискуссионное обсуждение определения Петровского. Одна из этих работ принадлежит Фридрихсу [3], а другая - Лере [4].

Фридрихс в работе 1954 года отмечает, что системы уравнений математической физики с устойчиво корректной задачей Коши обычно описываются уравнениями, у которых матрицы коэффициентов при производных являются симметрическими (или эрмитовыми), а матрицы коэффициентов при производных по t - к тому же строго положительно определенными

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_j C_j \frac{\partial u}{\partial y_j} + Qu = 0 \tag{I.2}$$

$$A = A^* > 0, \quad B = B^*, \quad C_j = C_j^* .$$

Такие системы получили название симметрических t-гиперболических систем. Надо отметить, что связь физических интегралов энергии для систем из математической физики с теоремами существования отмечалась еще в 1928 г. в известной работе Куранта, Фридрихса, Леви [5], а для конкретных систем типа (I.2) и их трансформаций Лапласа в 1953 г. О.А.Ладыженской [6]. На решениях систем (I.2) выполнено содержащее символ дивергенции тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au,u)+\frac{\partial}{\partial x}(Bu,u)+\sum_j \frac{\partial}{\partial y_j}(C_j u,u)=(\mathcal{D}u,u), \qquad (I.3)$$

носящее название дифференциальной формы интеграла энергии. В случае постоянных коэффициентов матрица $\mathcal{D}$ квадратичной формы $(\mathcal{D}u,u)$, стоящей в правой части (I.3), определена равенством $\mathcal{D}=-Q-Q^*$. Собственно интегралом энергии называется интегральное тождество

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\dots\int([\tau A+\xi B+\sum_j \eta_j C_j]u,u)\,ds=\iint\limits_{\Omega}\dots\int(\mathcal{D}u,u)\,dV, \qquad (I.4)$$

вытекающее из приведенного выше дифференциального и содержащее поверхностный интеграл по границе $\partial\Omega$ некоторой области Ω от квадратичной формы с матрицей $\tau A+\xi B+\sum_j \eta_j C_j$ вещественные числовые коэффициенты τ, ξ, η в записи которой - это компоненты вектора единичной нормали к $\partial\Omega$.

Множество векторов $\{[\tau,\xi,\eta]\}$ таких, что матрица $\tau A+\xi B+\sum_j \eta_j C_j$ строго положительно определена, непусто и образует выпуклый конус, который можно назвать конусом Гамильтона-Якоби симметрической гиперболической системы. Интегралы энергии позволяют получать неравенства, с помощью которых известными приемами доказываются теоремы существования и единственности. Поверхности вида $\varphi(x,y,t)=const$ могут быть границей области единственности (см. [7]), если они удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},\frac{\partial\varphi}{\partial y_2},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\right)=0, \qquad (I.5)$$

где $h(\xi,\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)=-\tau^*(\xi,\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)$ - взятый с обратным знаком наибольший корень $\tau=\tau^*$ характеристического уравнения $\det[\tau A + \xi B + \sum_j \eta_j C_j] = 0$.

Фридрихс предлагает в основу понятия гиперболичности положить не вещественность и различие корней характеристического уравнения, а непосредственно возможность сведения уравнений к системе с симметрическими матрицами. В частности, он показывает, что задача Коши для любого гиперболического уравнения второго порядка эквивалентно сводится к задаче Коши для симметрической гиперболической системы.

В принстонских лекциях Лере [4] был проведен тщательный анализ работ Петровского и предложен новый метод исследования гиперболических по Петровскому уравнений, основанный на построении специальных интегралов энергии. Эти интегралы строятся по гиперболическому полиному $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\eta)$ с помощью вспомогательного гиперболического полинома $\mathcal{P}_{n-1}(\tau,\xi,\eta)$ - "разделяющего" для $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\eta)$. Говорят, что $\mathcal{P}_{n-1}$ разделяющий по отношению к $\mathcal{P}_n$, если корни $\tau_j(\xi,\eta)$, $\lambda_j(\xi,\eta)$ уравнений $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\eta)=0$, $\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\xi,\eta)=0$ при любых ξ,η $(\xi^2+\|\eta\|^2>0)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\tau_1 < \lambda_1 < \tau_2 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \tau_n \,. \tag{I.6}$$

Лере показал, что существует представление

$$\mathcal{P}_n\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u\cdot\mathcal{P}_{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u =$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{\substack{|\alpha|=n-1\\|\beta|=n-1}} A_{\alpha\beta}\mathcal{D}_\alpha u\,\mathcal{D}_\beta u\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{\substack{|\alpha|=n-1\\|\beta|=n-1}} B_{\alpha\beta}\mathcal{D}_\alpha u\,\mathcal{D}_\beta u\right)+$$

$$+\sum_j\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{\substack{|\alpha|=n-1\\|\beta|=n-1}} C_{j\alpha\beta}\mathcal{D}_\alpha u\,\mathcal{D}_\beta u\right), \tag{I.7}$$

где α , β - мультииндексы, $\mathcal{D}_\alpha u$, $\mathcal{D}_\beta u$ - пробегают все частные производные порядка $n-1$ от $u(t,x,y)$. На решениях гиперболического уравнения $\mathcal{P}_n\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0$ левая часть тождества Лере (I.7) обращается в нуль и это тождество оказывается дифференциальной формой некоторого энергетического тождества, аналогичного интегралам энергии для симметрических гиперболических систем. Они аналогичным образом могут быть использованы при доказательстве теорем существования и единственности.

Правда, в тождестве Лере матрицы $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, $C_{j\alpha\beta}$ определены существенно неоднозначно и, вообще говоря, положительную определенность матрицы $A_{\alpha\beta}$ доказать не удается. Лере предложил вместо положительной определенности пользоваться более слабым условием.

Каждому символу дифференцирования

$$\mathcal{D}^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_{00}}}{\partial t^{\alpha_{00}}}\,\frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial x^{\alpha_0}}\cdot\prod_j\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial y_j^{\alpha_j}}$$

сопоставим одночлен

$$\Delta^\alpha(\tau,\xi,\zeta)=\tau^{\alpha_{00}}\,\xi^{\alpha_0}\prod_j\zeta_j^{\alpha_j}$$

а квадратичной форме

$$\sum A_{\alpha\beta}\mathcal{D}^\alpha u\,\mathcal{D}^\beta u \tag{I.8}$$

однородный полином

$$F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\mu,\nu)=\sum A_{\alpha\beta}\Delta^\alpha(\tau,\xi,\zeta)\Delta^\beta(\lambda,\mu,\nu) \tag{I.9}$$

Лере показал, что положив $\mu=\xi$, $\nu=\zeta$, мы приходим к выражению, не зависящему от произвола, который возможен при выборе $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, $C_{j\alpha\beta}$ и установил неравенство

$$F(\tau,\xi,\zeta;\tau,\xi,\zeta) \geqslant a^2(\tau^2+\xi^2+\|\zeta\|^2)^{n-1}, \qquad (\text{I.10})$$

являющееся ослаблением условия положительной определенности формы (I.8). На самом деле, конструкция Лере несколько сложнее. Здесь она схематизирована, чтобы избежать не нужных нам подробностей, которые удлинили бы изложение. Оказалось, что ослабленной положительной определенности (I.10) достаточно для того, чтобы провести построение всей теории задачи Коши. При этом интегралы Лере используются совершенно аналогично тому, как применяются интегралы энергии симметрических гиперболических систем. Отличие состоит лишь в необходимости при оценках производных решения использовать еще и известное неравенство Гординга [8].

Сравнение предложений Фридрихса и Лере приводит к вопросу о том, нельзя ли все-таки воспользоваться произволом в выборе квадратичных форм интеграла Лере для того, чтобы добиться строгой положительной определенности формы (I.8). В этом случае конструкцию Лере можно было бы несколько развить и показать, что любое строго гиперболическое по Петровскому уравнение может быть эквивалентно сведено к симметрической гиперболической системе. Настоящий доклад посвящен обзору ряда работ, выполненных в Новосибирске и неправленных на то, чтобы выяснить, возможно ли такое сведение. При этом оказалось, что во всех рассмотренных случаях выяснение сводилось к изучению нетривиальных алгебраических фактов. Попутно были описаны новые интегралы энергии даже в классическом случае простейшего волнового уравнения, в том числе и с векторной неизвестной функцией. Эти интегралы были использованы для исследования смешанных задач. В частности, развитие этого круга идей привело к построению интегралов энергии, диссипирующихся на ударных волнах и к их использованию для обоснования новых теорем существования и единственности в газовой динамике.

§ 2. Симметризация и тождество Хермандера

Постараемся понять в чем состоит произвол выбора матриц $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, $C_{j\alpha\beta}$ представления Лере (I.7). Обозначим через $z[\tau,\xi,\eta]$ вектор-столбец с компонентами $z_p[\tau,\xi,\eta] = \tau^{\alpha_{00}}\xi^{\alpha_0}\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\dots\eta_m^{\alpha_m}$. При этом $\alpha_{00}+\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_m = n-1$, $p=1,2,\dots,N$, где N - число всевозможных мономов степени $n-1$. Через k обозначим числовой вектор размерности N с вещественными компонентами, а через A, B, C_j - эрмитовы $N\times N$ матрицы. Рассматривая равенство

$$\left(\tau A+\xi B+\sum_{j=1}^{m}\eta_j C_j\right)z[\tau,\xi,\eta]=\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\eta)k \qquad (2.1)$$

как однородную систему линейных уравнений для элементов матриц A, B, C_j и компонент вектора k, мы ее еще дополним равенствами, вытекающими из эрмитовости:

$$A=A^*,\ B=B^*,\ C_j=C_j^*. \qquad (2.2)$$

В работе [9] исследована разрешимость этой однородной системы, которая имеет место при любых n, m и любых полиномах $\mathcal{P}_n$, совсем не обязательно гиперболических. В частности, при $m=1$ (случай трех переменных t, x, y) размерность пространства решений равна $n(n^3-2n^2+3n+2)/4$. Зная какое-либо решение, можно получить систему первого порядка с эрмитовыми матрицами коэффициентов для всех производных $n-1$-го порядка от решения уравнения $\mathcal{P}_n\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0$, воспользовавшись равенством

$$\left[A\frac{\partial}{\partial t}+B\frac{\partial}{\partial x}+\sum_j C_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right] z\left[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right] u(t,x,y)=$$

$$=\mathcal{P}_n\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) u(t,x,y)\, k=0, \qquad (2.3)$$

автоматически следующим из (2.I). Составленная из (2.I),(2.2) система линейных уравнений является системой равенств для векторных полиномов от τ , ξ , ζ . Удобно, введя еще новые переменные λ , α , β $(\lambda,\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)$, свести ее к равенству между скалярными полиномами. Наряду с вектором $z[\tau,\xi,\zeta]$ рассмотрим вектор $z[\lambda,\alpha,\beta]$, а затем, используя эрмитовые скалярные произведения и положив

$$\left(k,\, z[\lambda,\alpha,\beta]\right)=\sum_{p=1}^{N} k_p\, z_p[\lambda,\alpha,\beta]=\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\alpha,\beta), \qquad (2.4)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(A z[\tau,\xi,\zeta],\, z[\lambda,\alpha,\beta]\right)=F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)\\
&\left(B z[\tau,\xi,\zeta],\, z[\lambda,\alpha,\beta]\right)=G(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)\\
&\left(C_j z[\tau,\xi,\zeta],\, z[\lambda,\alpha,\beta]\right)=H_j(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta),
\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

установим эквивалентность векторного равенства (2.I) скалярному равенству

$$\tau F+\xi G+\sum_{j=1}^{m}\zeta_j H_j=\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)\,\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\alpha,\beta) \qquad (2.6)$$

в котором:

$$
\left.\begin{aligned}
F &= F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta) = \overline{F(\lambda,\alpha,\beta;\tau,\xi,\zeta)} \\
G &= G(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta) = \overline{G(\lambda,\alpha,\beta;\tau,\xi,\zeta)} \\
H_j &= H_j(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta) = \overline{H_j(\lambda,\alpha,\beta;\tau,\xi,\zeta)}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)
$$

Таким образом, возможность симметризации оказывается эквивалентной возможности подбора вещественного $\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\alpha,\beta)$ и, вообще говоря, комплексных полиномов F, G, H_j, удовлетворяющих условиям симметрии (2.7). На самом деле положение несколько проще. Каковы бы ни были однородные полиномы $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)$, $\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\alpha,\beta)$ их произведение всегда допускает (и не единственным способом) представление в виде (2.6). К доказательству этого факта и сводится решение вопроса о возможности симметризации, если оставить в стороне выяснение возможности выбора положительно определенной матрицы A. Заметим, что из-за вещественности $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n-1}$ и из-за справедливости (2.7), одновременно с (2.6) справедливы и следующие равенства (2.8):

$$
\begin{aligned}
&\lambda F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)+\alpha G(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)+\sum_{j=1}^{m}\zeta_j H_j(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)= \\
&\quad =\mathcal{P}_n(\lambda,\alpha,\beta)\,\mathcal{P}_{n-1}(\tau,\xi,\zeta).
\end{aligned} \qquad (2.8)
$$

Складывая (2.6) с (2.8), приходим к равенству, называемому тождеством Хермандера

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)\,\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\alpha,\beta)+\mathcal{P}_n(\lambda,\alpha,\beta)\,\mathcal{P}_{n-1}(\tau,\xi,\zeta)= \\
&=(\tau+\lambda)F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)+(\xi+\alpha)G(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)+ \\
&+\sum_{j=1}^{m}(\zeta_j+\beta_j)H_j(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta).
\end{aligned} \qquad (2.9)
$$

По существу доказательство симметризуемости сводится к доказательству возможности представления левой части (2.9) в том виде, который указан в правой. Такое доказательство хорошо известно и может быть проведено многими способами. В нашей статье [9] приведена изящная конструкция Н.Г.Марчука, которая приводит к явным формулам, дающим F, G, H_j в одном из таких возможных представлений.

Все другие представления получаются добавлением к F, G, H_j решений так называемого однородного тождества Хермандера

$$(\tau+\lambda)F^0+(\xi+\alpha)G^0+\sum_j(\zeta_j+\beta_j)H_j^0=0, \tag{2.10}$$

у которого рассматриваются лишь решения, удовлетворяющие условиям симметрии (2.7).

Таким образом, чтобы получить описание всех возможных симметризаций, нужно суметь получить описание всех возможных решений однородного тождества Хермандера (2.10). После этого, конечно, еще остается открытым вопрос, существуют ли симметризации с положительно определенной матрицей A

§ 3. Симметризация гиперболического уравнения с тремя независимыми переменными

В случае трех независимых переменных τ, ξ, ζ описание всех решений однородного тождества Хермандера (2.10) с условиями симметрии (2.7) приведено в [9]. Эти решения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
F^0(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)&=i(\xi\beta-\alpha\zeta)K(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)\\
G^0(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)&=i(\lambda\zeta-\tau\beta)K(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)\\
H^0(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)&=i(\tau\alpha-\lambda\xi)K(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta),
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

в котором

$$K(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)=\sum_{p,q=1}^{p,q=n(n-1)/2} K_{pq}\, S_p[\tau,\xi,\zeta]\cdot S_q[\lambda,\alpha,\beta], \tag{3.2}$$

где K_{pq} образуют эрмитову матрицу, а $S_p[\tau,\xi,\zeta]$ пробегают все одночлены степени $n-2$. Вещественная размерность пространства решений однородного тождества Хермандера в этом случае равна $[n(n-1)/2]^2$. Размерность пространства всех допустимых симметризаций уравнения $\mathcal{P}_n\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0$, то есть размерность всех допустимых наборов матриц A, B, C равна сумме размерности $[n(n-1)/2]^2$ пространства решений однородного тождества Хермандера и размерности $n(n+1)/2$ пространства всех однородных полиномов $\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\alpha,\beta)$ степени $n-1$.

Каждому набору матриц A, B, C соответствует интеграл энергии. Множество интегралов энергии. таким образом, в рассматриваемом случае тоже образует линейное пространство размерности $[n(n-1)/2]^2+n(n+1)/2$. Однако нас интересуют только интегралы энергии и соответствующие им симметризации только для гиперболических $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)$ и только такие симметризации, у которых матрица A строго положительно определена. Такие интегралы энергии, если они существуют, образуют выпуклый конус в пространстве всех интегралов. В случае гиперболических уравнений с тремя независимыми переменными удалось установить [9] непустоту этого конуса. При этом удалось использовать решения тождества Хермандера (2.6), (2.7), построенные по произвольному гиперболическому $\mathcal{P}_{n-1}(\tau,\xi,\zeta)$, разделяющему $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)$.

Как уже отмечалось в § 2, по заданным $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)$, $\mathcal{P}_{n-1}(\tau,\xi,\zeta)$ выражение для $F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)$ в тождестве Хермандера (2.9) определяется неоднозначно. Однако, как показал Лере, $F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\xi,\zeta)$ от произвола выбора решения однородного тождества Хермандера не зависит:

$$F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\xi,\zeta)=\frac{\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)\,\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\xi,\zeta)-\mathcal{P}_n(\lambda,\xi,\zeta)\,\mathcal{P}_{n-1}(\tau,\xi,\zeta)}{\tau-\lambda}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}F_{ij}(\xi,\zeta)\,\tau^{i-1}\lambda^{j-1}. \tag{3.3}$$

Матрица из полиномиальных коэффициентов $F_{ij}(\xi,\zeta)$ будет в (3.3) строго положительно определенной при $\xi^2+\zeta^2>0$. На основании известной теоремы Эрмита о безутиане это утверждение следует из того, что корни уравнений $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)=0$, $\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\xi,\zeta)=0$ разделяются. В [9] В.И.Костину удалось доказать возможность представления

$$F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\xi,\zeta)=\sum a_{pq}\,z_p[\tau,\xi,\zeta]\,z_q[\lambda,\xi,\zeta], \tag{3.4}$$

в котором коэффициенты a_{pq} образуют положительно определенную матрицу A. Он же сумел показать, что среди возможных $F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)$, полученных из решения тождества Хермандера (2.9), содержится

$$F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)=\sum a_{pq}\,z[\tau,\xi,\zeta]\,z_q[\lambda,\alpha,\beta]. \tag{3.5}$$

При этом было использовано представление (3.4) и даваемое формулами (3.I),(3.2) описание всех возможных решений однородного тождества Хермандера. Возможность же представления (3.4) с $A>0$ доказано со ссылкой на принадлежащую Розенблатту [I0] теорему, обобщающую известную теорему Фейера-Рисса.

Теорема Розенблатта. Если $\mathcal{D}(\varphi)=\sum\limits_{k=-K}^{k=+K} e^{ik\varphi}\mathcal{D}^{[k]}$ эрмитов положительно определенный матричный полином, то он допускает представление

$$\mathcal{D}(\varphi)=\Delta^{*}(\varphi)\cdot\Delta(\varphi)$$

через некоторый матричный полином

$$\Delta(\varphi)=\sum_{k=0}^{k=K} e^{ik\varphi}\Delta^{[k]}$$

Полином $\Delta(\varphi)$ может быть выбран таким, что матрица $\Delta^{[0]}$ окажется эрмитовой и положительно определенной, и что при $|\zeta|\leqslant 1$ справедливо неравенство $det\left[\sum\limits_{k=0}^{k=K}\zeta^{k}\Delta^{[k]}\right]\neq 0$ Этими условиями полином $\Delta(\varphi)$ определяется однозначно.

Приведенное Розенблаттом доказательство этой, по существу алгебраической, теоремы весьма схематично и основано на теории предсказания стационарных случайных последовательностей. Аналитическое доказательство теоремы Розенблатта, основанное на алгебраических соображениях, было предложено и опубликовано А.Н.Малышевым [II] .

Путь, по которому было проведено доказательство возможности сведения к симметрической гиперболической системе произвольного гиперболического уравнения с двумя пространственными переменными, не позволяет никак подступиться к уравнениям с большим числом независимых переменных и состояние вопроса о симметризации при этом выясняется лишь на ряде примеров, о которых пойдет речь ниже.

§ 4. Смешанная задача для волнового уравнения с двумя пространственными переменными

Рассмотрение примеров оказывается интересным даже в случае двух пространственных переменных. Например, нетривиальные симметризации и отвечающие им интегралы энергии удалось получить даже в таком, казалось бы, банальном примере, как волновое уравнение. Интересную конструкцию, возникшую при продумывании работы [I2] Миатаки предложил в этом примере В.М.Гордиенко [I3] , [I4] . Он изучал векторное волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad , \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \tag{4.I}$$

и смешанную задачу для него в области $t > 0$, $x > 0$ с граничным условием

$$\left[P\frac{\partial}{\partial t} + Q\frac{\partial}{\partial x} + R\frac{\partial}{\partial y} \right] u = 0 \tag{4.2}$$

при $x = 0$ и с начальными данными Коши при $t = 0$. Смешанная задача поставлена заведомо некорректно, если она допускает последовательность частных решений $(\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$ вида

$$e^{\kappa(\tau t + \zeta x \pm iy) - \sqrt{\kappa}} \cdot \overset{1}{u}$$

с $Re\, \tau > 0$, $Re\, \zeta < 0$. Эта последовательность аналогична последовательности, рассматриваемой в классическом примере Адамара некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа.

В.М.Гордиенко требовал, чтобы матрицы P , Q , R не допускали возможности построения таких примеров некорректности и чтобы некорректность не появлялась при достаточно малом возмущении матричных коэффициентов P , Q , R . Это условие принято называть равномерным условием Лопатинского.

Оказывается, что для выполнения равномерного условия Лопатинского необходимо и достаточно, чтобы матрица $P+R$ была невырожденной и чтобы $2n\times 2n$ матрица Λ :

$$\Lambda=\begin{pmatrix} P+R & 0 \\ 0 & P+R \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & P+R \\ -P+R & 2Q \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

имела все характеристические корни, лежащими строго в левой полуплоскости. В этом случае оказывается, что можно указать такое приведение векторного волнового уравнения к симметрической гиперболической системе, что соответствующие интегралы энергии будут, в силу граничного условия, диссипативными.

Построение интегралов энергии основано на следующем операторном тождестве, в котором можно узнать частный вид тождества (2.I), с помощью которого в § 2 описывалась схема симметризации произвольных гиперболических уравнений. Задавшись произвольными $n\times n$ эрмитовыми матрицами K , L , M , N , мы составим из них следующие эрмитовы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} K & L & M \\ L & K & iN \\ M & -iN & K \end{pmatrix}, \quad B=-\begin{pmatrix} L & K & iN \\ K & L & M \\ -iN & M & -L \end{pmatrix},$$

$$C=-\begin{pmatrix} M & -iN & K \\ iN & -M & L \\ K & L & M \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

и убедимся, что

$$[\tau A+\xi B+\zeta C]\begin{bmatrix}\tau I\\ \xi I\\ \zeta I\end{bmatrix}=(\tau^2-\xi^2-\zeta^2)\begin{bmatrix}K\\ L\\ M\end{bmatrix} \tag{4.5}$$

(I - единичная матрица размера $n\times n$).
Заменяя τ, ξ, ζ на операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и применяя тождество к вектору u, удовлетворяющему волновому уравнению, мы видим, что производные u_t, u_x, u_y этого вектора связаны симметрической системой

$$\left[A\frac{\partial}{\partial t}+B\frac{\partial}{\partial x}+C\frac{\partial}{\partial y}\right]\begin{pmatrix}u_t\\ u_x\\ u_y\end{pmatrix}=0, \tag{4.6}$$

а составленный из них вектор

$$U = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

входит в квадратичные формы следующего интеграла энергии, записанного в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(AU, U) + \frac{\partial}{\partial x}(BU, U) + \frac{\partial}{\partial y}(CU, U) = 0 . \tag{4.8}$$

Для завершения описанных построений необходимо суметь так подобрать K, L, M, N, чтобы скомпанованная из них матрица A (4.4), оказалась положительно определенной и чтобы граничное условие $Pu_t + Qu_x + Ru_y = 0$ при этом было диссипативным. На любых $3n$-мерных составных векторах U с n-мерными компонентами U_1, U_2, U_3, связанными соотношением $PU_1 + QU_2 + RU_3 = 0$, условие диссипативности состоит в справедливости для таких векторов неравенства $(BU, U) < 0$.

В.М.Гордиенко показал, что удовлетворить всем этим требованиям можно задавшись произвольной $2n \times 2n$ положительно определенной матрицей G, по которой из уравнения Ляпунова:

$$\Lambda^* H + H\Lambda = -G \tag{4.9}$$

находится эрмитова $2n \times 2n$ матрица H. Из-за того, что все характеристические корни Λ (4.3) имеют отрицательную вещественную часть (следствие выполнения равномерного условия Лопатинского), уравнение Ляпунова однозначно разрешимо и решение H строго положительно определено.

Записав H в виде, составленном из четырех квадратных клеток

$$H = H^* = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{21}^* \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

и положив

$$\left.\begin{aligned} K = K^* &= \frac{1}{2}\left(H_{11} + H_{22}\right) \\ M = M^* &= \frac{1}{2}\left(H_{22} - H_{11}\right) \\ L = L^* &= -\frac{1}{2}\left(H_{21} + H_{21}^*\right) \\ N = N^* &= -\frac{i}{2}\left(H_{21} - H_{21}^*\right) \end{aligned}\right\} , \tag{4.11}$$

мы и приходим к решению поставленной задачи. При этом

$$H = \begin{pmatrix} K - M & -L - iN \\ -L + iN & K + M \end{pmatrix} . \tag{4.12}$$

Из положительной определенности H (4.12) вытекает положительная определенность A (4.4). Интересно отметить, что из положительной определенности A не следует, что H, составленная по правилу (4.12), будет положительно определена, однако, как показал Н.Г.Марчук [15], положительная определенность H является необходимым и достаточным условием того, чтобы конус Гамильтона-Якоби векторов τ, ξ, η, при которых матрица $\tau A+\xi B+\eta C$ положительно определена (см. § I), совпадал с конусом $\tau>\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, который естественно назвать конусом Гамильтона-Якоби волнового уравнения. При этом совпадают области единственности волнового уравнения и построенной симметрической гиперболической системы. В общем случае из положительной определенности A следует лишь, что область единственности симметрической системы является частью области единственности волнового уравнения.

В работе Н.Г.Марчука [I6] доказано, что построение В.М.Гордиенко не только сопоставляет каждому решению задачи Коши для векторного волнового уравнение решение специальной задачи Коши для некоторой симметрической гиперболической системы, но и наоборот - каждое решение этой специальной задачи для системы однозначно определяет соответствующее решение векторного волнового уравнения.

Доказательство Н.Г.Марчука основано на использовании и подробном изучении нового, специально построенного интеграла энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(A_1W,W\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(B_1W,W\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(C_1W,W\right)=0 \qquad (4.I3)$$

для составного вектора W, векторные компоненты W_1, W_2, W_3, W_4 которого составлены из производных от компонент вектора U, являющегося решением системы В.М.Гордиенко (см. (3.6)):

$$\left[A\frac{\partial}{\partial t}+B\frac{\partial}{\partial x}+C\frac{\partial}{\partial y}\right]U=0 \qquad (4.I4)$$

по формулам:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= U_{1t} - U_{2x} - U_{3y} \\ W_2 &= U_{2t} - U_{1y} \\ W_3 &= U_{3t} - U_{1y} \\ W_4 &= U_{2y} - U_{3x} \end{aligned}\right\} \qquad (4.15)$$

При этом коэффициентные матрицы A_1, B_1, C_1 нового интеграла энергии оказались окаймлениями матриц A, B, C интеграла Гордиенко или матриц, отличающихся от них лишь знаком:

$$A_1 = \begin{pmatrix} K & L & M & iN \\ L & K & iN & M \\ M & -iN & K & -L \\ -iN & M & -L & K \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} L & K & iN & M \\ K & L & M & iN \\ -iN & M & -L & K \\ M & -iN & K & -L \end{pmatrix},$$

(4.16)

$$C_1 = \begin{pmatrix} M & -iN & K & -L \\ iN & -M & L & -K \\ K & L & M & iN \\ -L & -K & -iN & -M \end{pmatrix}.$$

Несколько удивительно, что построенный Н.Г.Марчуком интеграл энергии не связан с симметрической гиперболической системой для W, имеющей A_1, B_1, C_1 матрицами коэффициентов. Такой системе вектор W не удовлетворяет:

$$\left[A_1\frac{\partial}{\partial t} + B_1\frac{\partial}{\partial x} + C_1\frac{\partial}{\partial y}\right]W \neq 0. \qquad (4.17)$$

§ 5. Смешанная задача для волнового уравнения с любым числом пространственных переменных и приложения к газовой динамике

До сих пор речь шла только об интегралах энергии для векторного уравнения с двумя пространственными переменными x, y. В случае большего числа пространственных переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ насколько нам известно, аналогичная теория интегралов энергии развита лишь в случае скалярного волнового уравнения. Критерий выполнения равномерного условия Лопатинского в смешанной задаче был в этом случае получен Миатаки [12]. В работе [17] А.Н.Малышевым было продемонстрировано, что смешанная задача в полупространстве $x > 0$ для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - \sum_{j=1}^{m} u_{y_j y_j} = 0 \qquad (5.1)$$

с граничным условием при $x = 0$:

$$p u_t + q u_x + \sum_{j=1}^{m} r_j u_{y_j} = 0. \qquad (5.2)$$

удовлетворяющим равномерному условию Лопатинского, может быть преобразованием Лоренца, не изменяющим волнового уравнения (5.I), преобразована в задачу с более простым граничным условием

$$p'u_t + q'u_x + r'u_{y_1} = 0, \tag{5.3}$$

в которое не входят производные $u_{y_2}, u_{y_3}, \dots, u_{y_m}$. Это обстоятельство позволило использовать описанные выше интегралы, строившиеся в случае двух пространственных переменных, и отталкиваясь от них, дать конструкцию интегралов, диссипирующихся в силу заданного граничного условия и в общем случае. Обобщение удалось провести так, что оно позволило утверждать как совпадение областей единственности симметризации и исходного уравнения, так и возможность из решений сконструированной симметрической системы вывести теорему существования решения смешанной задачи у волнового уравнения. Надо отметить, что в работе Малышева [I7] также, как и в работе Гордиенко [I4] рассматривается не само волновое уравнение, а произвольное t-гиперболическое уравнение второго порядка.

Интегралы энергии волнового уравнения сыграли важную роль в исследованиях корректности газодинамических задач с ударными волнами. Такие исследования выполнены А.М.Блохиным одновременно с описанными в §§ 4,5 исследованиями волнового уравнения. Надо сказать, что эти два направления исследований все время влияли друг на друга и друг друга стимулировали.

Когда сверхзвуковой плоскопараллельный поток газа натекает на слабо искривленный фронт ударной волны, расположенный около плоскости $x = 0$, то за фронтом этой волны (при $x > 0$) для описания распространения малых возмущений компонент скорости u, v, давления p и энтропии S можно пользоваться уравнениями акустики, которые при определенном способе обезразмеривания приводятся к следующей системе:

$$\left[\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}+\begin{pmatrix}M&1&0&0\\1&M&0&0\\0&0&M&0\\0&0&0&M\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right]\begin{pmatrix}p\\u\\v\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Параметр M здесь обозначает число Маха за фронтом ударной волны $(0<M<1)$. Эта система является симметрической t-гиперболической. Граничные условия на ударной волне могут быть для малых возмущений записаны в виде следующих соотношений между величинами на плоскости $x=0$:

$$u+\beta p=0\,,\quad v+\sigma F_y=0\,,\quad \mu p+F_t=0\,,\quad s+\nu p=0. \tag{5.5}$$

Здесь β , σ , μ , ν – постоянные коэффициенты, а функция $F(t,y)$ описывает отклонение фронта ударной волны от плоскости $x=0$. Нетрудно показать, что исключив из приведенной системы неизвестные u , v , s , мы придем к волновому уравнению для давления p :

$$p_{tt}+2Mp_{tx}-(1-M^2)p_{xx}-p_{yy}=0 \tag{5.6}$$

с граничным условием (при $x=0$), связывающим вторые производные искомой функции

$$(\beta+M)p_{tt}-(1-M^2)p_{tx}+\lambda M p_{yy}=0 \tag{5.7}$$

$$(\lambda=\sigma\mu).$$

Для того, чтобы выписать интегралы энергии волнового уравнения, диссипирующиеся на границе в силу граничного условия (5.7), возможен, например, следующий подход.

Первые производные P_t , P_y удовлетворяют каждая одному и тому же волновому уравнению

$$\left.\begin{aligned} (P_t)_{tt} + 2M(P_t)_{tx} - (1-M^2)(P_t)_{xx} - (P_t)_{yy} = 0 \\ (P_y)_{tt} + 2M(P_y)_{tx} - (1-M^2)(P_y)_{xx} - (P_y)_{yy} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

и следующим граничным условиям при $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} \left[(\beta+M)\tfrac{\partial}{\partial t} - (1-M^2)\tfrac{\partial}{\partial x}\right]P_t + \lambda M \tfrac{\partial}{\partial y} P_y = 0 \\ \tfrac{\partial}{\partial t} P_y - \tfrac{\partial}{\partial y} P_t = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{5.9}$$

Это построение приводит естественным путем к смешанной задаче для векторного волнового уравнения с граничными условиями, связывающими первые производные от неизвестных функций. Надо заметить, что несложным преобразованием координатной системы волновое уравнение, рассмотренное выше, может быть приведено к стандартному виду

$$P_{t't'} - P_{x'x'} - P_{y'y'} = 0 . \tag{5.10}$$

Детально развивая и углубляя намеченную здесь идею, А.М.Блохин сумел построить интегралы энергии, которые в линеаризованной теории ударных волн диссипируются во всех случаях, когда уравнение состояния газа обеспечивает корректность постановки задачи, то есть выполнение равномерного условия Лопатинского.

Критерии выполнения этого условия следуют из [18], [19]. Техника интегралов энергии позволила перенести результаты, первоначально полученные в линейной теории, на квазилинейные уравнения газовой динамики с двумя и с тремя пространственными переменными и использовать для изучения гладких течений в окрестности гладкой ударной волны. Для таких, содержащих ударную волну, течений А.М.Блохину удалось, развивая методы книги С.Л. Соболева [20], с помощью построенных интегралов энергии доказать теоремы существования и единственности. Этим вопросам посвящены обзорные статьи [21], [22], [23] и содержащие подробные доказательства работы [24], [25], [26], а также книга [27].

Заметим, что с помощью псевдодифференциальных операторов несколько позже похожие факты были установлены в [28].

§ 6. Уравнения, инвариантные относительно ортогональных преобразований пространственных переменных и близкие к ним

Вернемся теперь к рассмотрению гиперболических уравнений

$$\mathcal{P}_n\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}\right)u = 0 \qquad (6.1)$$

произвольной степени в пространстве произвольной размерности. Вопрос о том, может ли быть такое уравнение сведено к симметрической гиперболической системе, остается открытым. Однако удалось показать, что допускают симметризацию уравнения, инвариантные относительно ортогональных преобразований пространственных переменных, и все достаточно близкие к ним. Впервые это было продемонстрировано в работе В.И.Костина [29] . Тем самым оказалось, что в пространстве коэффициентов, каждой точке которого соответствует полином $\mathcal{P}_n(\tau, \xi, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$, имеющий коэффициенты, равные декартовым координатам этой точки, существует область, состоящая из симметризуемых гиперболических полиномов. В каком-то смысле выяснилось, что симметризуемых гиперболических полиномов достаточно много.

Впоследствии Т.Ю.Михайлова [30] дала новое доказательство этому факту и существенно его уточнила. Ею доказано, что инвариантные относительно ортогональных преобразований пространственных координат, гиперболические уравнения и все достаточно близкие к ним допускают симметризацию с конусом Гамильтона-Якоби, обеспечивающим совпадение области единственности симметрической гиперболической системы с областью единственности исходного гиперболического уравнения. Это утверждение аналогично утверждениям, полученным при симметризации смешанной задачи Н.Г.Марчуком (см. § 4) и А.Н.Малышевым (см. § 5).

Доказательство Т.Ю.Михайловой состоит в построении явных формул симметризации инвариантного уравнения и в исследовании характеристического уравнения полученной симметрической системы.

Оказывается, что наибольший характеристический корень этой системы некратный и совпадает с наибольшим же характеристическим корнем исходного гиперболического оператора. Так как характеристический полином системы, полученной симметризацией, всегда делится на характеристический полином исходного уравнения, то удается доказать совпадение наибольших характеристических корней у исходного уравнения и симметризации и в случае, когда симметризуется (некоторым специальным образом) уравнение, достаточно близкое к инвариантному. Возможность такой симметризации вытекает из несложного приема, предложенного В.И.Костиным. Инвариантный относительно ортогональной группы гиперболический полином $\mathcal{P}_n(\tau, \xi, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m) \equiv$

$\equiv \mathcal{P}_n(\tau, \xi, \zeta)$ допускает представление

$$\mathcal{P}_n(\tau, \xi, \zeta) = z^n \Phi_n\left(\frac{\tau}{z}\right) \tag{6.2}$$

$$z = \sqrt{\xi^2 + \|\zeta\|^2}$$

через полином от одного переменного $\Phi_n(\omega)$ с вещественными корнями. Выбирая полином $\Phi_{n-1}(\omega)$, вещественные корни которого разделяются с корнями $\Phi_n(\omega)$, мы в качестве разделяющего полинома выберем

$$\mathcal{P}_{n-1}(\tau, \xi, \zeta) = z^{n-1} \Phi_{n-1}\left(\frac{\tau}{z}\right). \tag{6.3}$$

Будем предполагать, что старшие коэффициенты полиномов $\Phi_n(\omega)$ $\Phi_{n-1}(\omega)$ положительны. При этих условиях, как это хорошо известно из анализа, по данной паре полиномов можно однозначно построить цепочку полиномов $\Phi_k(\omega)$ с положительными старшими коэффициентами так, чтобы они были связаны рекуррентными соотношениями

$$\omega \Phi_k(\omega) - C_{k-1} \Phi_{k-1}(\omega) - C_k \Phi_{k+1}(\omega) = 0, \tag{6.4}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $C_{-1} = 0$, $\Phi_{-1}(\omega) = 0$ и все $C_k > 0$ при $k \geqslant 0$. Полином $\Phi_k(\omega)$ имеет k вещественных и различных корней, корни полиномов $\Phi_k(\omega)$ и $\Phi_{k+1}(\omega)$ перемежаются. Полиномы $\Phi_k(\omega)$ обязательно содержат либо только четные, ~~либо только четные,~~ либо только нечетные степени ω в зависимости от четности или нечетности k .

Положив

$$\mathcal{P}_\varkappa(\tau,\xi,\eta) = \tau^\varkappa \Phi_\varkappa\left(\frac{\tau}{\tau}\right), \tag{6.5}$$

мы придем к соотношениям между этими полиномами

$$\tau\mathcal{P}_\varkappa(\tau,\xi,\eta) - c_{\varkappa-1}\Big(\xi^2+\sum_{\ell=1}^{m}\eta_m^2\Big)\mathcal{P}_{\varkappa-1}(\tau,\xi,\eta) - c_\varkappa\mathcal{P}_{\varkappa+1}(\tau,\xi,\eta)=0 \tag{6.6}$$

$$\varkappa = 0,\ 1, 2, \dots, n-1.$$

Введя обозначения

$$(\eta,\beta) = \sum_{j=1}^{m}\eta_j\beta_j,$$

$$F(\tau,\xi,\eta;\lambda,\alpha,\beta) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1}[\xi\alpha+(\eta,\beta)]^{n-1-\varkappa}\mathcal{P}_\varkappa(\tau,\xi,\eta)\mathcal{P}_\varkappa(\lambda,\alpha,\beta),$$

$$G(\tau,\xi,\eta;\lambda,\alpha,\beta) =$$

$$= -\sum_{\varkappa=1}^{n-1}c_{\varkappa-1}[\xi\alpha+(\eta,\beta)]^{n-1-\varkappa}\left[\xi\mathcal{P}_{\varkappa-1}(\tau,\xi,\eta)\mathcal{P}_\varkappa(\lambda,\alpha,\beta)+\alpha\mathcal{P}_{\varkappa-1}(\lambda,\alpha,\beta)\mathcal{P}_\varkappa(\tau,\xi,\eta)\right],$$

$$H_j(\tau,\xi,\eta;\lambda,\alpha,\beta) =$$

$$= -\sum_{\varkappa=1}^{n-1}c_{\varkappa-1}[\xi\alpha+(\eta,\beta)]^{n-1-\varkappa}\left[\eta_j\mathcal{P}_{\varkappa-1}(\tau,\xi,\eta)\mathcal{P}_\varkappa(\lambda,\alpha,\beta)+\beta_j\mathcal{P}_{\varkappa-1}(\lambda,\alpha,\beta)\mathcal{P}_\varkappa(\tau,\xi,\eta)\right]. \tag{6.7}$$

С помощью соотношений (6.6) можно получить тождество

$$c_{n-1}\left[\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)\,\mathcal{P}_{n-1}(\lambda,\alpha,\beta)+\mathcal{P}_n(\lambda,\alpha,\beta)\,\mathcal{P}_{n-1}(\tau,\xi,\zeta)\right]=$$

$$=(\tau+\lambda)F(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)+(\xi+\alpha)\,G(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(\zeta_j+\beta_j)\,H_j(\tau,\xi,\zeta;\lambda,\alpha,\beta), \tag{6.8}$$

которое можно рассматривать как тождество Хермандера для $\mathcal{P}_n(\tau,\xi,\zeta)$ и разделяющего $c_{n-1}\,\mathcal{P}_{n-1}(\tau,\xi,\zeta)$. Как мы уже отмечали выше, каждому такому тождеству, после выбора базиса в пространстве однородных полиномов степени $n-1$, однозначно соответствует симметрическая гиперболическая система, которой сопоставляется интеграл энергии для исходного гиперболического оператора. В работе [30] предлагается выбрать базис из полиномов

$$\pi_k^{\ell L}(\tau,\xi,\zeta)=\sqrt{\frac{(n-1-k)!}{(n-1-k-M)!\,\ell!}}\;\xi^{\,n-1-k-L}\,\zeta_1^{\ell_1}\zeta_2^{\ell_2}\cdots\zeta_m^{\ell_m}\,\mathcal{P}_k(\tau,\xi,\zeta)$$

$$\ell=(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_m),\quad L=\ell_1+\ell_2+\dots+\ell_m.$$

При этом матрица A при производных $\frac{\partial}{\partial t}$ в симметрической системе окажется единичной, а следовательно, и положительно определенной.

Матрица B при производных $\frac{\partial}{\partial x}$ тоже будет весьма простой, - состоящей из клеток с ненулевыми элементами лишь на двух диагоналях, окаймляющих нулевую главную диагональ. Матрицы C_j имеют более сложную структуру, которая не потребовала детального анализа.

В силу того, что система инвариантна относительно ортогональных преобразований пространственных переменных, ее характеристические корни $\tau = \tau(\xi, \eta)$ имеют вид $\tau = \omega\sqrt{\xi^2 + \|\eta\|^2}$ и могут быть определены лишь по их значениям $\tau = \omega|\xi|$, которые получаются при $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_m = 0$, то есть через корни уравнения $\det(\tau A + \xi B) = 0$, что сводится к вычислению характеристических корней матрицы B. Следствием структуры B является то, что эти корни распадаются на группы корней характеристических уравнений $\mathcal{D}^{l}_{n-l}(\omega) = 0$ якобиевых матриц с нулевой главной диагональю, на побочных диагоналях которой стоят элементы вида $-c_{k-1}\sqrt{\frac{n-l-k}{n-k}}$. Известно, что максимальные корни таких матриц монотонно зависят от элементов побочной диагонали. Поэтому максимальный корень уравнения $\mathcal{D}^{l}_{k-l}(\omega) = 0$ строго меньше максимального корня характеристического уравнения $\mathcal{D}_k(\omega) = 0$ якобиевой матрицы с нулевой главной диагональю, на побочной диагонали которой стоят элементы $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{k-2}$. Оказывается, что $\mathcal{D}_n(\omega) = \Phi_n(\omega)$. С помощью перемежаемости нулей после этого легко доказывается, что все корни ω всех уравнений $\mathcal{D}^{l}_{n-l}(\omega) = 0$ строго меньше максимального корня $\Phi_n(\omega)$, откуда и вытекает основное утверждение о совпадении конусов Гамильтона-Якоби для симметрической системы и для гиперболического уравнения, из которого она была получена.

Еще раз подчеркнем, что все утверждения этой работы используют специально выбранный базис в пространстве производных, которые являются решениями симметризованной системы. Именно этот базис позволил свести вычисление и исследование характеристических корней к получению и исследованию корней специальных якобиевых матриц.

Литература

I. Петровский И.Г. Ueber das Cauchysche Problem für system von partiellen Differentialgleichungen. - Матем. сб., 1937, 2(44), с. 815-870.

2. Петровский И.Г. О проблеме Cauchy для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. М., Бюлл. ун-та (А), 1938, I:7, с. I-72.

3. Friedrichs K.O. Symmetric hyperbolic linear differential equations. - Comm.Pure and Appl.Math., 1954, v.VII, No 2, p.345-392.

4. Leray J. Hyperbolic differential equations with variable coefficients. Princeton, Inst. for Adv.Study, 1952.

5. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики, УМН, 1940, т. 8, с. 125-160.

6. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехиздат, 1953.

7. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., Наука, 1979.

8. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., ИЛ, 1961.

9. Годунов С.К., Костин В.И. Приведение гиперболического уравнения к симметрической гиперболической системе в случае двух пространственных переменных. - Сиб.мат.ж., 1980, т. 21, № 6, с. 3-20.

IO. Rosenblatt M. A multidimensional prediction problem. - Arkiv för matematik, 1958, Bd. 3, No 5, S. 407-424.

II. Малышев А.Н. Факторизация матричных полиномов. - Сиб.мат.ж., 1982, т. 23, № 3, с. 136-146.

12. Miyatake S. Mixed problem for hyperbolic equations of second order with first order complex boundary operators. - Japanese J.Math., 1975, v. 1, N° 1, p. 111-158.

13. Gordienko V.M. Un problème mixte pour de l'équation vectorielle des ondes: Cas de dissipation de l'énergie; Cas mal posés. - C.r. Acad. Sci., 1979, t. 288, N° 10, Série A, p. 547 - 550.

14. Гордиенко В.М. Симметризация смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными. - Сиб.мат.ж., 1981, т. 22, № 2, с. 84-104.

15. Марчук Н.Г. О существовании решений смешанной задачи для векторного волнового уравнения. Новосибирск, Б.и., 1980. - 22 с. (Препринт/ВЦ СО АН СССР, 216).

16. Марчук Н.Г. О существовании решений смешанной задачи для векторного волнового уравнения. Докл. АН СССР, 1980, 252, № 3, с. 546-550.

17. Малышев А.Н. Смешанная задача для гиперболического уравнения второго порядка с комплексным граничным условием первого порядка. - Сиб.мат.ж., 1983, т. 24, № 6, с. 102-121.

18. Дьяков С.П. Об устойчивости ударных волн. - Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1954, т. 27, № 3(9), с. 288-296.

19. Иорданский С.В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны. - Прикл.математика и механика, 1957, т. 21, вып. 4, с. 465-472.

20. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. - Л.: Изд. ЛГУ, 1950. - 255 с.
21. Блохин А.М. Смешанная задача для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне. - Изв. СО АН СССР. Серия техн.наук, 1979, № 13, вып. 3, с. 25-33.
22. Блохин А.М. Интегралы энергии в смешанной задаче для уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне. - В сб.: Исследование газодинамической устойчивости с помощью ЭВМ под ред. К.И.Бабенко, ИПМ им.Н.В.Келдыша АН СССР, 1981, с. 198-228.
23. Godunov S.K., Blokhin A.M. Energy Integrals in the Theory of Shock Wave Stability. Nonlinear Deformation Waves.IUTAM Symposium, Tallinn 1982, Springer-Verlag 1983, p.18-29.
24. Блохин А.М. Смешанная задача для симметрических t -гиперболических систем акустического типа. - В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 52, 1981, с. 11-29.
25. Блохин А.М. Оценка интеграла энергии в смешанной задаче для уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне. - Сиб.мат.ж., 1981, т. 22, № 4, с. 23-51.
26. Блохин А.М. Единственность классического решения смешанной задачи для уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне. - Сиб.мат.ж.,1982, т.23, № 5, с. 17-30.
27. Блохин А.М. Интегралы энергии в задаче об устойчивости ударной волны. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1982. - 176 с.
28. Majda A. The stability of multi-dimensional shock fronts. - Memoire of the American Mathematical Society, 1983, Vol.41, No 275, 95 p.
29. Костин В.И. О симметризации гиперболических операторов. - В сб.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1980, с. 112-116.

30. Михайлова Т.Ю. Симметризация инвариантных гиперболических уравнений. - ДАН, 1983, т. 270, № 3, с. 246-250.

СССР, 630 090 НОВОСИБИРСК, 90, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

(Oblatum 25.5. 1984)