COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNVERSITATIS CAROLINAE

26,2 (1985)

RETOUR SUR LES CARACTERES FERME ET RELATIVEMENT OUVERT DU CONE-BARRIERE D'UN CONVEXE

Jacques BAIR

Résumé. Nous caractérisons les convexes de dimension finie dont le cône-barrière, éventuellement privé de certains de ses sommets, est relativement ouvert. Ensuite, nous décrivons les convexes de R^n dont la barrière est fermée, à la condition que leur cône d'infinitude soit polyédrique (ce qui est toujours le cas dans le plan).

Mots clefs : convexe, cône-barrière, relativement continu, hyperbolique.

Classification : 52 A 20.

Brøndsted a obtenu une condition nécessaire et suffisante permettant de reconnaître les ensembles convexes A de l'espace numérique R^n pour lesquels le cône-barrière, noté $\mathbb{B}(A)$, est ouvert à la condition de lui enlever l'origine [IV; Corollary (i), p. 338] ; ce résultat excluait le cas d'ensembles convexes contenant des droites puisque la barrière est alors forcément de dimension strictement inférieure à n. Récemment, nous avons levé cette restriction en caractérisant géométriquement les convexes A de R^n pour lesquels $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ est algébriquement ouvert, c'est-à-dire relativement ouvert ou encore ouvert dans leur enveloppe linéaire [I; 42, p. 739] ; dans cette étude, nous avons travaillé (sans l'expliciter assez clairement) sur des corps convexes, c'est-à-dire sur des convexes dont l'intérieur n'est pas vide; malheureusement, le résultat annoncé ne peut pas être étendu tel quel à des convexes de dimension inférieure à n, ainsi qu'en atteste, dans R^3, l'ensemble $A = \{x \in R^3 : x_3 = 0, x_2 > x_1^2\}$, pour lequel $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\} = \{x \in R^3 : x_2 < 0\} \cup \{x \in R^3 : x_1 = x_2 = 0,\ x_3 \neq 0\}$ n'est pas ouvert bien que A soit relativement continu (c'est-à-dire continu dans son enveloppe linéaire [I; p. 739]).

En fait, on peut vérifier que, pour tout convexe non vide A de R^n, la barrière relative $\hat{\mathbb{B}}(A) = \{x \in {}^{1}A : \sup_{y\in A} \langle x,y \rangle < +\infty\}$, où ${}^{1}A$ désigne l'enveloppe linéaire (affine hull) de A, donne lieu à l'égalité suivante : $\mathbb{B}(A)\setminus{}^{\perp}A = (\hat{\mathbb{B}}(A)\setminus\{a\}) + {}^{\perp}A$, où ${}^{\perp}A$ désigne le sous-espace vectoriel orthogonal au sous-espace vectoriel ${}^{1}A - {}^{1}A$ parallèle à A et a est le point (unique) où ${}^{1}A$ rencontre

${}^{\perp}A$. Comme $\mathbb{B}(A)\setminus {}^{\perp}A$ et $\hat{\mathbb{B}}(A)\setminus\{a\}$ sont visiblement algébriquement ouverts simultanément, le raisonnement utilisé en [I] conduit à ce résultat (qui rectifie l'énoncé 4.2 de [I]).

Proposition 1. *Soit* A *un convexe non vide de* R^n . *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathbb{B}(A)\setminus {}^{\perp}A$ *est algébriquement ouvert;*

b) $\hat{\mathbb{B}}(A)\setminus\{a\}$ *est algébriquement ouvert;*

c) $\bar{A}$ *est la somme directe d'un ensemble relativement continu et d'un sous-espace vectoriel.*

Il est à noter que le corollaire 4.3 de [I] reste d'application: pour tout ensemble laminé A (à savoir A est un convexe non borné pour lequel existe un borné B tel que A soit inclus dans la somme vectorielle de B et du sous-espace caractéristique $\mathbb{E}(A)$ composé de l'origine et de toutes les droites homogènes dont un translaté au moins est contenu dans A [I ; p. 736]), $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ est algébriquement ouvert [I; p.739] , puisque $\mathbb{B}(A)$ coïncide alors avec le sous-espace vectoriel orthogonal à $\mathbb{E}(A)$. Par ailleurs, un convexe A non borné et non laminé pour lequel $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ est algébriquement ouvert doit être de dimension égale à n, sinon la crête (ou ensemble des sommets) de $\mathbb{B}(A)$ contiendrait le sous-espace vectoriel ${}^{\perp}A$ qui ne se réduirait pas à $\{0\}$, ce qui serait en contradiction avec le caractère relativement ouvert de $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$. En conclusion, on peut obtenir cet énoncé:

Proposition 2. *Pour un convexe* A *de* R^n, $\mathbb{B}(A)\setminus\{0\}$ *est algébriquement ouvert si et seulement si* $\bar{A}$ *est un ensemble continu (soit un compact, soit un corps non borné et relativement continu), ou* A *est laminé.*

Terminons cette brève mise au point concernant le caractère algébriquement ouvert du cône-barrière en constatant que la barrière $\mathbb{B}(A)$ elle-même est algébriquement ouverte sous la condition nécessaire et suffisante qu'elle coïncide avec un sous-espace vectoriel, soit l'espace R^n tout entier, soit un sous-espace de dimension inférieure à n. Cette observation conduit au résultat suivant:

Proposition 3. *Pour un convexe* A *de* R^n , *le cône-barrière* $\mathbb{B}(A)$ *est relativement ouvert si et seulement si* A *est borné ou laminé.*

Quant au caractère fermé de la barrière, il est étroitement relié à la notion d'ensemble hyperbolique introduite par Sablon [V] , à la suite d'une suggestion du Professeur Valette. Rappelons que nous qualifions d'hyperbolique tout convexe A non borné pour lequel existe un borné B tel que A soit inclus dans la somme vectorielle de B et du cône d'infinitude $\mathbb{I}(A)$ composé de l'origine et de toutes les **demi-droites, pointées en 0, dont un translaté au moins est** inclus dans A [II; p. 182] . Bien entendu, la barrière d'un hyperbolique A est fermée car elle est le polaire de $\mathbb{I}(A)$; nous avons démontré la réciproque de cette propriété par une argumentation faite essentiellement dans R^2 (sans qu'il le soit d'ailleurs explicitement indiqué) [II; Proposition 5, p. 183]. Voici un exemple montrant qu'il n'y a pas équivalence, hors de R^2, entre les hyperboliques et les convexes à barrière fermée: dans R^3, si C désigne le cône circulaire droit $\{x \in R^3 : x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ et B l'ensemble infini $\{y_p = p.k_p\ (\cos\frac{1}{p},\ \sin\frac{1}{p},\ \cos\frac{1}{p}) : k_p = \frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2p}}$, pour tout entier naturel $p = 1, 2, 3, \ldots \}$, l'enveloppe convexe fermée A de la réunion $B \cup C$ est telle que $\mathbb{I}(A) = C$, $\mathbb{B}(A) = \{x \in R^3 : x_3 \leq -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$, tandis que $d(y_p, C) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,p$, ce qui montre que $\mathbb{B}(A)$ est fermé et qu'il n'existe aucun borné dont la somme avec $\mathbb{I}(A)$ inclut A. L'idée originale de cet exemple est due à Goossens qui publiera, avec plus de détails, ce passage et donnera des résultats nouveaux sur le sujet. Pour notre part, contentons-nous de donner, dans R^n, cette généralisation de la caractérisation des convexes de dimension 2 dont la barrière est fermée: elle concerne les convexes non bornés dont le cône d'infinitude est polyédrique, condition qui est automatiquement satisfaite dans le plan.

Proposition 4. *Soit* A *un convexe non borné de* R^n *dont le cône d'infinitude* $\mathbb{I}(A)$ *est polyédrique;* $\mathbb{B}(A)$ *est fermé si et seulement si* A *est hyperbolique.*

De fait, si A est hyperbolique, on a toujours $\mathbb{B}(A) = {}^{\star}\mathbb{I}(A)$, où ${}^{\star}\mathbb{I}(A)$ désigne le polaire de $\mathbb{I}(A)$ à savoir le cône $\{y \in R^n : \langle x,y \rangle \leq 0,\ \ \forall x \in \mathbb{I}(A)\}$; il en résulte que $\mathbb{B}(A)$ est fermé sans aucune restriction sur $\mathbb{I}(A)$. Réciproquement, supposons $\mathbb{B}(A)$ fermé, donc coïncidant avec ${}^{\star}\mathbb{I}(A)$; si $\mathbb{I}(A)$ est polyédrique, il existe des formes linéaires f_i non nulles telles que $\mathbb{I}(A) = \bigcap_{i=1}^{p}\{x : f_i(x) \leq 0\}$; pour tout indice i de 1 à p, f_i appartient à ${}^{\star}\mathbb{I}(A)$, donc à $\mathbb{B}(A)$, ce qui garantit l'existence d'un réel λ_i pour lequel $A \subset \{x : f_i(x) \leq \lambda_i\}$; dès lors, A est inclus dans $P = \bigcap_{i=1}^{p} \{x : f_i(x) \leq \lambda_i\}$; P est un polyèdre convexe dont le cône d'infinitude n'est autre que $\bigcap_{i=1}^{p} \{x : f_i(x) \leq 0\}$ [III;III.1.3, p. 54] . P peut s'écrire comme la somme d'un polytope B et de $\mathbb{I}(A)$ [III;III.3.2, p. 70] ; au total, A est hyperbolique puisqu'il est inclus dans $B + \mathbb{I}(A)$.

<u>Bibliographie</u>

[I] J. BAIR, Quelques questions soulevées par le cône-barrière d'un convexe, Comment. Math. Univ. Carolinae 24,4 (1983), 731-740.

[II] J. BAIR, Liens entre le cône d'ouverture interne et l'internat du cône asymptotique d'un convexe, Bull. Soc. Math. Belgique XXXV, série B (1983), 177-187.

[III] J. BAIR - R. FOURNEAU, Etude géométrique des espaces vectoriels II: les polyèdres et polytopes convexes, Lecture Notes in Math., vol 802, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York, 1980.

[IV] A. BRØNDSTED, The inner aperture of a convex set, Pacific J. Math. 72 (1977), 335-340.

[V] D. SABLON, Ensembles convexes et cônes associés, mémoire de licence, Bruxelles, édition ronéotypée, 1980.

Institut de Mathématique
Université de Liège
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 Liège (Belgique)

(Oblatum 16.11. 1984)