COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
23,3 (1982)

MODULARITÉ ET DISTRIBUTIVITÉ AFFAIBLIES DANS LES LATTIS

René FOURNEAU

Resumé: Nous étudions en détail la notion de distributivité affaiblie que nous avons introduite à propos d'un exemple concret voici quelque temps. Nous fournissons notamment un théorème de complétion pour de tels lattis.

Mots clefs: Faiblement modulaire, faiblement distributif, lattis des idéaux.

Classification: 06C05, 06D99, 06B10

---

1. M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot ont introduit la notion de lattis modulaire affaibli [1,4,p. 68]: un lattis $\mathcal{L} = \langle L; \wedge, \vee \rangle$ avec minimum 0 est modulaire affaibli si

$$[a \leq \text{et } b \wedge c \neq 0] \Longrightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Guidé par cette définition, nous avons introduit [2], la notion de lattis faiblement distributif.

Nous dirons qu'un lattis $\mathcal{L} = \langle L; \wedge, \vee \rangle$ doué d'un minimum 0 est faiblement distributif si

$$[b, c \in L \text{ et } b \wedge c \neq 0] \Longrightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \ a \in L.$$

Ces lattis ne semblent pas avoir été étudies systématiquement jusqu'a présent. Nous avons rencontré un lattis faiblement distributif dans [2]. J. Varlet a prouvé par ailleurs que le lattis des convexes d'un tournoi est faiblement distributif [5], et a demandé une étude complète des lattis faiblement distributifs [6; Problème 2.3, p. 12].

2. *Tout lattis faiblement distributif est modulaire affaibli.*

C' est évident.

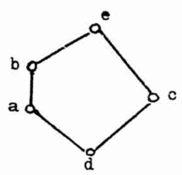
3. *Pour un lattis* $\mathscr{L}$ *avec minimum* 0, *les propositions suivantes sont équivalentes:*

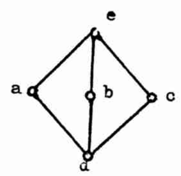
(a) $\mathscr{L}$ *est faiblement distributif*

(b) *tout filtre propre de* $\mathscr{L}$ *est un lattis distributif*

(c) *tout filtre principal propre de* $\mathscr{L}$ *est un lattis distributif*

(d) $\mathscr{L}$ *n'admet aucun sous-lattis isomorphe à l'un des lattis suivants*





où $d \neq 0$,

(e) *les relations*

$$a \vee c = b \vee c \text{ et } a \wedge c = b \wedge c \neq 0$$

impliquent $a = b$.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Soit F un filtre propre de $\mathscr{L}$. Quels que soient $a,b,c \in F$, $b \wedge c \in F$, donc $b \wedge c \neq 0$, et ainsi

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

(b) $\Longrightarrow$ (c). C'est banal.

(c) $\Longrightarrow$ (d). Il suffit d'appliquer le critère de distributivité de Birkhoff [3, theorem 1, p. 70] au filtre principal $[d)$.

(d) $\Longrightarrow$ (e). Si a différait de b,

$$\{a \wedge c, a, c, a \vee c, b \wedge c\}$$

constitueraient un sous-lattis de $\mathcal{L}$ isomorphe à l'un des lattis décrits sous (d).

(e) $\Longrightarrow$ (a). Soient $y,z \in L$ tels que $y \wedge z \neq 0$. On a, pour tout $x \in L$,

$$x \vee (y \wedge z) = [x \vee (y \wedge z)] \vee (y \wedge z).$$

La condition (e) assure que $[y \wedge z)$ est distributif [1, Déf. 2, p. 75], donc

$$\begin{aligned}[x \vee (y \wedge z)] \vee [(y \wedge z) &= [x \vee (y \wedge z) \vee y] \wedge [x \vee (y \wedge z) \vee z] \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z).\end{aligned}$$

De là, $\mathcal{L}$ est faiblement distributif.

4. <u>Un lattis</u> $\mathcal{L}$ <u>avec minimum</u> 0 <u>est faiblement distributif si et seulement s'il vérifie</u>

$$[a \wedge c \neq 0 \text{ et } a \wedge b \neq 0] \Longrightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

En effet, 3(d) assure que la condition précédente entraîne la distributivité affaiblie.

A l'inverse, si $\mathcal{L}$ est faiblement distributif, soient a,b,c tels que $a \wedge c \neq 0$ et $a \wedge b \neq 0$. On a

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = [(a \wedge b) \vee a] \wedge [(a \wedge b) \vee c] = a \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
$= a \wedge (b \vee c)$.

5. <u>Tout sous-lattis d'un lattis faiblement distributif est faiblement distributif</u>.

Si un sous-lattis de $\mathcal{L}$ n'est pas faiblement distributif, il admet un filtre principal propre F non distributif; le filtre principal de $\mathcal{L}$ engendré par le même élément que F n'est pas distributif non plus, donc $\mathcal{L}$ n'est pas faiblement distributif.

6. Nous désignerons par $\underset{\sim}{I}(\mathcal{L})$ le lattis des idéaux du lattis $\mathcal{L}$.

<u>Le lattis $\underset{\sim}{I}(\mathcal{L})$ est faiblement distributif si et seulement si $\mathcal{L}$ est faiblement distributif</u>.

La condition est nécessaire. De fait, $\mathcal{L}$ est isomorphe au sous-lattis

$$\{(x] : x \in L\}$$

de $\underset{\sim}{I}(\mathcal{L})$ [1, coroll. 1, p. 156], donc à un lattis faiblement distributif vu 5. La condition est suffisante.

Soient A, des idéaux de $\mathcal{L}$ tels que $A \cap C \neq \{0\}$ et $A \cap B \neq \{0\}$. D'après 4, il suffit d'établir la relation $A \cap (B \vee C) \subset (A \cap B) \vee (A \cap C)$. Choisissons $a \in A$ $(B \vee C)$. On a alors $a \leq b \vee c$ où $b \in B$ et $c \in C$. Soient b', c' tels que $b' \in (A \cap B) \setminus \{0\}$ et c' $(A \cap C) \setminus \{0\}$. Posons $a' = a \vee b' \vee c'$. On a alors

$$a' = a \vee b' \vee c' \leq (b \vee b') \vee (c \vee c'),$$

et vient, vu 4,

$a \leq a' = (a \vee b' \vee c') \wedge [(b \vee b') \vee (c \vee c')] =$
$= [a' \wedge (b \vee b')] \vee [a' \wedge (c \vee c')] \in (A \cap B) \vee (A \cap C)$.

is faiblement distributif est isomorphe à un
-lattis d'un lattis faiblement distributif complet.

De fait, $\mathcal{L}$ est isomorphe à un sous-lattis de $\underset{\sim}{I}(\mathcal{L})$, ce dernier étant complet, puisque $\mathcal{L}$ possède un minimum, et faiblement distributif.

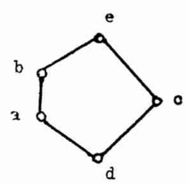
8. Les lattis modulaires affaiblis jouissent de propriétés analogues aux précédentes. Citons sans preuve:

Pour un lattis $\mathcal{L}$ *avec minimum* 0, *les propositions suivantes sont équivalentes*:

(a) $\mathcal{L}$ *est modulaire affaibli*,

(b) *tout filtre propre de* $\mathcal{L}$ *est un lattis modulaire*,

(c) $\mathcal{L}$ *ne possède aucun sous-lattis isomorphe au lattis suivant*



où $d \neq 0$

(d) *les relations*

$$a \vee c = b \vee c, \quad a \wedge c = b \wedge c \neq 0, \qquad a \leq b,$$

impliquent $a = b$.

9. *Remerciements*. Nous devons au referee la proposition 4 et la simplification de la preuve de 6 qui en résulte.

B i b l i o g r a p h i e

[1] M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT: Leçons sur la théorie des treillis, des structures ordonnées et des treillis géométriques, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[2] R. FOURNEAU: Lattis de fermés convexes, Bull. Soc. Roy. Sc., Liège, 41(1972), 468-483.

[3] G. GRÄTZER: Lattice theory, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1971.

[4] G. SZASZ: Théorie des treillis (trad. Chambadal), Dunod, Paris, 1971.

[5] J. VARLET: Some algebraic aspects of tournament theory, Colloquium Math. 33(1975), 189-199.

[6] J. VARLET: Structures algébriques ordonnées, séminaires dirigés par F. Jongmans et J. Varlet, éd. ronéotypée, Liège, 1975.

Institut Supérieur Industriel Liégeois 2, rue Armand Stévart B-4000 Liège

Institut de Mathématique- Université de Liège, 15, avenue des Tilleuls, B-4000 Liège - Belgique

(Oblatum 25.9. 1981)