COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
23,3 (1982)

О БОРЕЛЕВЫХ ТИПАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH)

Содержание: В статье исследуются борелевы типы классов арифметических действительных чисел, введенных в [4], и некоторые свойства эффективно открытых множеств.

Ключевые слова: Арифметические действительные числа, борелевы множества, точка разрежения.

Classification: 03F65, 04A15

В [4] мы ввели классы арифметических действительных чисел (АДЧ) $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha^*$ и $\mathcal{A}_\beta$. На этой основе в настоящей статье исследуются некоторые свойства множеств АДЧ типов $G^{[0]}$, $G_\sigma^{[n]}$ и $G_{\sigma\delta}^{[n]}$. Показано, какое место в борелевой иерархии занимают названные классы АДЧ. Полученные результаты имеют важние приложения в теории конструктивных функций действительной переменной.

В следующем мы пользуемся без дальнейших ссылок определениями и обозначениями из [4] - в частности - перечисленными там переменными. Определения основных понятий конструктивного математического анализа содержатся, например, в [3].

Мы введем конструктивные аналоги борелевых множеств. Мы построим последовательность слов в алфавите $\{\sigma, \delta\}$. Пусть Q_0 пустое слово и для всякого НЧ k $Q_{2k+1} \rightleftharpoons Q_{2k}\sigma$ и $Q_{2k+2} \rightleftharpoons Q_{2k}\sigma\delta$. Для любого НЧ n можно индукцией по s опре-

делить множества АДЧ типа $G_{Q_s}^{[n]}$. Эти определения отличаются от классических ([2]) тем, что открытые множества и последовательности заданы эффективно относительно $\emptyset^{(n)}$, т.е. $[n]$ -эффективно. Так, например, мы о множествах АДЧ $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ скажем, что $\mathfrak{M}$ типа $G^{[n]}$ и $\mathfrak{N}$ типа $G_{\delta}^{[n]}$, если существуют НЧ m и $[n]$-ОРФ f такие, что $\mathfrak{M} = [W_m^{[n]}]$ и $\mathfrak{N} = \bigcap_k [W_{f(k)}^{[n]}]$, т.е. $\mathfrak{M}$ является $[n]$ -открытым множеством (см. [4]) и $\forall X (X \in \mathfrak{N} \equiv \forall k \neg\neg \exists \ell (! \langle f(k) \rangle^{[n]}(\ell) \,\&\, X \in \mathcal{L}^{0}(\ell)))$. Для таких $\mathfrak{N}$ и f существует НЧ t , для которого выполнено
$\forall k \ell (\langle f(k) \rangle^{[n]}(\ell) \simeq \langle t \rangle^{[n]}(k, \ell) \simeq \langle s_1^1(t, k) \rangle^{[n]}(\ell))$

и, следовательно, верно $\mathfrak{N} = \bigcap_k [W_{s_1^1(t,k)}^{[n]}]$. Аналогичные результаты имеют место и для типов $G_{Q_s}^{[n]}$, где $s \geq 2$. Так, например, множество АДЧ $\mathfrak{P}$ является множеством типа $G_{\delta\sigma}^{[n]}$ в том и только том случае, если существует ОРФ g такая, что $\mathfrak{P} = \hat{\bigcup_r} \bigcap_q [W_{g(r,q)}^{[n]}]$ (ср. теорему 2.9 из [3]).

Замечание 1. На основании определений, теоремы Шенфильда о предельной вычислимости [1] и s-m-n -теоремы для всяких НЧ n и s и множества АДЧ $\mathfrak{M}$ типа $G_{Q_s}^{[n]}$ верно: $\mathfrak{M}$ множество любого из типов $G_{Q_s}^{[n+1]}$, $G_{Q_{s+1}}^{[n]}$, $G_{Q_{s+2}}^{[n \dot{-} 1]}$ и $G_{Q_{s+2n}}^{[0]}$, а $\mathcal{A} \setminus \mathfrak{M}$ множество типа $G_{Q_{s+1}}^{[n \dot{-} 1]}$.

<u>Теорема 1</u>. 1) $\mathcal{A}_1$ множество типа $G_{\delta}^{[0]}$ и, следовательно, $\mathcal{A}_2$ типа $G_{\delta\sigma}^{[0]}$;

$\mathcal{A}_{\alpha}$ множество типа $G_{\delta\sigma}^{[1]}$ и, следовательно, $\mathcal{A}_{\alpha}$ типа $G_{\delta\sigma\delta\sigma}^{[0]}$ и $\mathcal{A}_{\beta}$ типа $G_{\delta\sigma\delta}^{[0]}$,

$\mathcal{A}_{\alpha}^{*}$ множество типа $G_{\delta\sigma}^{[0]}$.

2) Ни для какого НЧ n ни одно из множеств $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_{\alpha}$ и $\mathcal{A}_{\alpha}^{*}$ не является множеством типа $G_{\delta}^{[n]}$ и $\mathcal{A}_{\beta}$ не является множеством типа $G_{\delta\sigma}^{[n]}$;

$\mathcal{A}_\alpha$ не является множеством типа $G^{[0]}_{\delta\sigma\delta}$.

Определение. Для любых НЧ p и q мы посредством $T_0(q)$ (соотв. $T(p,q)$) обозначим: выполнено $\overline{S}_0(q)$ (соотв. $\overline{S}(p,q)$) и

$$\forall a(a \in \mathcal{I}_q \supset \neg\neg \exists s\, \ell (a \in \mathcal{L}^{\circ}(\ell) \,\&\, \mathcal{L}(\ell) \subseteq \hat{\bigcup_{k \le s}} [\mathcal{D}_{\lim(s_1^1(q,k))}]_c)) \,\&$$
$$\forall \ell \neg\neg (\mathcal{L}(\ell) \subseteq \mathcal{I}_q \vee \overline{\mu}_2(q \,\square\, \ell) < |\mathcal{L}(\ell)|).$$

Замечание 2. 1) Если для НЧ q выполнено $T_0(q)$, то $\mathcal{I}_q$ [1]-открытое множество АДЧ и $\mathcal{L}(\ell) \subseteq \mathcal{I}_q$ является [1]-общерекурсивным предикатом переменной ℓ.

2) Ввиду 1) и s-m-n-теоремы существует ОРФ $\mathcal{T}$ такая, что для всякого НЧ q, для которого верно $T_0(q)$, $\langle \mathcal{T}(q) \rangle^{[1]}$ [1]-ОРФ и $\forall \ell ((\langle \mathcal{T}(q) \rangle^{[1]}(\ell) = 0 \equiv \mathcal{L}(\ell) \subseteq \mathcal{I}_q) \,\&$
$(\langle \mathcal{T}(q) \rangle^{[1]}(\ell) > 0 \equiv \overline{\mu}_2(q \,\square\, \ell) < |\mathcal{L}(\ell)|))$.

<u>Теорема 2</u>. Существуют ОРФ $\overline{\tau}_0$ и $\overline{\tau}_1$ такие, что для всяких НЧ p, q и s верно

$$\overline{S}_0(q) \supset T_0(\overline{\tau}_1(q,s)) \,\&\, \mathcal{I}_q \subseteq \mathcal{I}_{\overline{\tau}_1(q,s)} \,\&\, \overline{\mu}_1(\overline{\tau}_1(q,s)) < \overline{\mu}_1(q) + 2^{-s}$$

и $\overline{S}(p,q) \supset T(\overline{\tau}_0(p,s), \overline{\tau}_1(q,s))$.

Лемма 1. Пусть $B(X \,\square\, m)$ словарный предикат и пусть t_0 и s НЧ, $1 \le s$, и ψ $[s]$-ЧРФ такие, что для всяких НЧ p, q и t, для которых выполнено

(1) $T(p,q) \,\&\, \mathcal{L}(t) \subseteq \mathcal{L}(t_0) \,\&\, \overline{\mu}_2(q \,\square\, t) < |\mathcal{L}(t)|$,

и для любого НЧ m имеет место

$$(2) \quad \begin{aligned} &!\psi(q,t,m) \,\&\, \mathcal{L}(\psi(q,t,m)) \subseteq \mathcal{L}(t) \,\&\, |\mathcal{L}(\psi(q,t,m))| \le \\ &\le \tfrac{1}{2} \cdot |\mathcal{L}(t)| \,\&\, \overline{\mu}_2(q \,\square\, \psi(q,t,m)) < |\mathcal{L}(\psi(q,t,m))| \end{aligned}$$

и

(3) $\forall X (X \in \mathcal{L}(\psi(q,t,m)) \setminus \mathcal{I}_q \supset B(X \,\square\, m))$.

Тогда существует $[s]$-КДЧ v такое, что

(4) $v \in \mathcal{A}_\beta \cap \mathcal{L}(t_0) \,\&\, \forall m\, B(v \sqcap m)$.

Доказательство. а) Легко построить ОРФ ε_0 и ε_1 и [1]-ЧРФ φ такие, что для всяких НЧ p_1, p_2, q_1, q_2 и t выполнено $\overline{S}_0(q_1) \,\&\, \overline{S}_0(q_2) \supset \overline{S}_0(\varepsilon_1(q_1, q_2)) \,\&\, \mathcal{J}_{q_1} \hat{\cup} \mathcal{J}_{q_2} = \mathcal{J}_{\varepsilon_1(q_1,q_2)}$,

$\overline{S}(p_1, q_1) \,\&\, \overline{S}(p_2, q_2) \supset \overline{S}(\varepsilon_0(p_1, p_2), \varepsilon_1(q_1, q_2))$ и

$\overline{S}_0(q_1) \,\&\, \overline{\mu}_2(q_1 \sqcap t) < |\mathcal{L}(t)| \supset\, !\varphi(q_1, t) \,\&\, \overline{\mu}_2(q_1 \sqcap t) + 2^{-\varphi(q_1,t)+2} < |\mathcal{L}(t)|$.

Пусть p_0 и q_0 НЧ, для которых верно $\forall k l\, (\langle p_0 \rangle (k) \simeq \langle q_0 \rangle (k, l) \simeq 0)$. Тогда имеет место $T(p_0, q_0) \,\&\, \overline{\mu}_1(q_0) = 0 < |\mathcal{L}(t_0)|$. Мы используем ОРФ $\overline{\sigma}_0$, $\overline{\sigma}_1$, $\hat{\vartheta}_1$, $\overline{\tau}_0$ и $\overline{\tau}_1$ и [2]-ОРФ $\hat{\vartheta}_0$ из замечаний 4 и 8 из [4] и теоремы 2 и построим $[s]$-ЧРФ $\overline{g}$, g_1 и h и $[max(s,2)]$-ЧРФ g_0 такие, что $\overline{g}(0) \simeq 0$, $g_0(0) \simeq p_0$, $g_1(0) \simeq q_0$ и $h(0) \simeq t_0$ и для всяких НЧ m и i, $0 \le i \le 1$,

$$\overline{g}(m+1) \simeq \varphi(g_1(m), h(m)),$$

$$g_i(m+1) \simeq \overline{\tau}_i(\varepsilon_i(g_i(m), \overline{\sigma}_i(\hat{\vartheta}_i(m), \overline{g}(m+1))), \overline{g}(m+1)) \quad \text{и}$$

$$h(m+1) \simeq \psi(g_1(m+1), h(m), m).$$

б) Ввиду а), предположений нашей леммы, замечаний 4 и 8 из [4] и теоремы 2 для всякого НЧ m выполнено $!\overline{g}(m)$, $!g_0(m), !g_1(m), !h(m), T(g_0(m), g_1(m)), \hat{\bigcup}_{k<m} \gamma_{\hat{\vartheta}_1(k)} \subseteq \mathcal{J}_{g_1(m)} \subseteq \mathcal{J}_{g_1(m+1)}$, $\mathcal{J}_{g_1(m)}$ [1]-открытое множество (замечание 2), $\mathcal{L}(h(m+1)) \subseteq \mathcal{L}(h(m)) \subseteq \mathcal{L}(t_0)$, $|\mathcal{L}(h(m))| \le 2^{-m} \cdot |\mathcal{L}(t_0)|$, $\overline{\mu}_2(g_1(m) \sqcap h(m)) < |\mathcal{L}(h(m))|$ и

$\forall X (X \in \mathcal{L}(h(m)) \setminus \mathcal{J}_{g_1(m)} \supset \forall k (k < m \supset B(X \sqcap k)))$.

в) Существует $[s]$-КДЧ v такое, что $\forall m (v \in \mathcal{L}(h(m)))$. На основании б) и того, что

$\mathcal{A}_\alpha = \widehat{\bigcup_k} \mathcal{V}_{\widehat{\vartheta}_1(k)}$, мы сразу получаем (4).

Замечание 3. Пусть s НЧ и пусть $C(q, t, m, t_1)$ $[s]$-частичнорекурсивный предикат ($[s]$-ЧРП). Тогда, как известно, существует $[s]$-ЧРФ $\psi(q, t, m)$, для которой для всяких НЧ q, t и m выполнено $(!\psi(q, t, m) \equiv$
$\equiv \neg\neg\exists t_1 C(q, t, m, t_1)) \& (!\psi(q,t,m) \supset C(q, t, m, \psi(q, t, m)))$.

<u>Теорема 3</u>. Пусть n и t_0 НЧ и $\mathfrak{M}$ множество АДЧ типа $G_\sigma^{[n]}$. Тогда

1) если $\mathcal{A}_\alpha^* \cap \mathcal{L}(t_0) \subseteq \mathfrak{M}$, то существует $[max(n,1)]$-КДЧ v из $\mathcal{A}_\beta \cap \mathcal{L}(t_0) \cap \mathfrak{M}$;

2) если $\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}(t_0) \subseteq \mathcal{A}_\alpha$, то $[max(n+1, 2)]$-существуют НЧ p, q и t такие, что (1) и $\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}(t) \subseteq \mathcal{I}_q$ (ср. леммы 2 и 3 из [4]).

Доказательство. Существует ОРФ f такая, что $\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}(t_0) = \bigcap_m [W_{f(m)}^{[n]}]$. Мы используем лемму 1. Пусть

$B(X \square m) \rightleftharpoons X \in [W_{f(m)}^{[n]}]$ и

$C(q, t, m, t_1) \rightleftharpoons (\neg\neg\exists s(s \in W_{f(m)}^{[n]} \& \mathcal{L}(t_1) \subseteq \mathcal{L}(t) \cap \mathcal{L}^\circ(s))\ \&$
$|\mathcal{L}(t_1)| \leq \frac{1}{2} \cdot |\mathcal{L}(t)| \ \& \ !\langle \mathcal{T}(q)\rangle^{[1]}(t_1) \ \& \ \langle \mathcal{T}(q)\rangle^{[1]}(t_1) > 0)$.

Тогда C $[max(n, 1)]$-ЧРП. Согласно замечанию 3 существует $[max(n, 1)]$-ЧРФ ψ, обладающая описанными там свойствами.

а) Пусть $\mathcal{A}_\alpha^* \cap \mathcal{L}(t_0) \subseteq \mathfrak{M}$ и пусть p, q и t НЧ, для которых верно (1) и, следовательно, $\langle \mathcal{T}(q)\rangle^{[1]}(t) > 0$ (замечание 2). Ввиду леммы 3 из [4] выполнено $\exists x^{[1]}(x^{[1]} \in$
$\in \mathcal{A}_\alpha^* \cap (\mathcal{L}(t) \setminus \mathcal{I}_q))$ и, таким образом, для всякого НЧ m верно $\neg\neg\exists t_1 C(q, t, m, t_1)$ и, следовательно, имеет место (2) и (3). Применением леммы 1, где $s \rightleftharpoons max(n, 1)$, доказатель-

ство части 1) завершено.

б) Пусть $\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}(t_0) \subseteq \mathcal{A}_\alpha$. Мы используем часть а) доказательства леммы 1, где $s \rightleftharpoons max(n, 1)$, и построим перечисленные там функции. Ясно, что $\neg \forall m\,(!\,h(m))$ и, таким образом, $[max(n+1, 2)]$-существует НЧ m_0, $m_0 \simeq \mu m(\neg !\,h(m))$. Выполнено $m_0 > 0$. Мы определим $p \rightleftharpoons g_0(m_0)$, $q \rightleftharpoons g_1(m_0)$ и $t \rightleftharpoons h(m_0 - 1)$. Тогда верно (1) и $\neg \exists t_1\, C(q, t, m_0 - 1, t_1)$ и, следовательно, $\mathcal{L}(t) \cap [W^{[n]}_{f(m_0-1)}] \subseteq \mathcal{T}_q$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть n и t_0 НЧ, f ОРФ и $\mathfrak{M}$ множество АДЧ такие, что $\mathfrak{M} = \hat{\bigcup_m} \bigcap_k [W^{[n]}_{f(m,k)}]$ и $\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}(t_0) \subseteq \mathcal{A}_\beta$. Тогда

1) существует $[max(n+1, 2)]$-ЧРФ ψ такая, что для всяких НЧ p, q и t, для которых верно (1), и для любого НЧ m имеет место (2) и

(5) $\bigcap_k [W^{[n]}_{f(m,k)}] \cap \mathcal{L}(\psi(q, m, t)) \subseteq \mathcal{T}_q$

и, следовательно,

2) существует $[max(n+1, 2)]$-КДЧ v из $\mathcal{A}_\beta \cap (\mathcal{L}(t_0) \setminus \mathfrak{M})$.

Доказательство. Пусть $B(X \,\square\, m) \rightleftharpoons \neg(X \in \bigcap_k [W^{[n]}_{f(m,k)}]$ и $C(q, t, m, t_1) \rightleftharpoons (\mathcal{L}(t_1) \subseteq \mathcal{L}(t) \,\&\, |\mathcal{L}(t_1)| \leq \frac{1}{2} \cdot |\mathcal{L}(t)| \,\&$ $\&\, !\langle \mathcal{T}(q)\rangle^{[1]}(t_1) \,\&\, \langle \mathcal{T}(q)\rangle^{[1]}(t_1) > 0 \,\&\, \neg\neg \exists k \neg \exists s\, \ell\, (s \in W^{[n]}_{f(m,k)} \,\&$ $\&\, \mathcal{L}(\ell) \subseteq \mathcal{L}(t_1) \cap \mathcal{L}^\circ(s) \,\&\, !\langle \mathcal{T}(q)\rangle^{[1]}(\ell) \,\&\, \langle \mathcal{T}(q)\rangle^{[1]}(\ell) > 0))$. Тогда C $[max(n+1, 2)]$-ЧРП и согласно замечанию 3 существует $[max(n+1, 2)]$-ЧРФ ψ, обладающая описанными там свойствами.

а) Пусть p, q и t НЧ, для которых верно (1). Ввиду леммы 2 из [4] существуют НЧ $\bar{p}$ и $\bar{q}$ такие, что $\hat{S}(\bar{p},\bar{q})$, $\mathcal{V}_{\bar{q}}$ множество типа $G_{\delta}^{[1]}$ (см. замечание 4 из [4]), которое содержится в $\mathcal{A}_{\alpha} \setminus \mathcal{I}_{q}$ и является псевдоплотным в $\mathcal{A} \setminus \mathcal{I}_{q}$. Следовательно, согласно предположениям нашей теоремы выполнено $\mathcal{V}_{\bar{q}} \cap \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}(t_0) = \emptyset$ и - в связи с этим - для любого НЧ m $\neg\neg\exists t_1 C(q,t,m,t_1)$. Но тогда верно (2) и (5). Таким образом, имеет место (3).

б) Ввиду а) для завершения доказательства достаточно применить лемму 1, где $s \rightleftharpoons max(m+1,2)$.

Лемма 2. Пусть t_0 НЧ и пусть $\mathfrak{M}$ множество АДЧ типа $G_{\delta\sigma}^{[0]}$ такие, что $\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}(t_0) \subseteq \mathcal{A}_{\alpha}$. Тогда существует [1]-КДЧ v из $\mathcal{A}_{\alpha} \cap (\mathcal{L}(t_0) \setminus \mathfrak{M})$.

Доказательство. Согласно замечанию 8 из [4] $\mathcal{A}_{\alpha}$ множество АДЧ [1]-меры нуль. Повторив доказательство леммы 4 из [4] для сегмента $\mathcal{L}(t_0)$, мы докажем нашу лемму.

Лемма 3. Пусть p, q и t НЧ и $\mathcal{P}$ множество АДЧ типа $G_{\delta\sigma}^{[0]}$ такие, что $\mathcal{A}_{\alpha} \cap \mathcal{L}(t) \subseteq \mathcal{P}$ и $T(p,q) \& \bar{\mu}_2(q \sqcap t) < |\mathcal{L}(t)|$. Тогда [1]-существуют НЧ p_1 и q_1 и [2]-существует НЧ t_1, для которых выполнено $T(p_1,q_1) \& \mathcal{I}_{q} \subseteq \mathcal{I}_{q_1} \& \mathcal{L}(t_1) \subseteq \mathcal{L}(t) \& |\mathcal{L}(t_1)| \leq \frac{1}{2}\cdot|\mathcal{L}(t)| \& \bar{\mu}_2(q_1 \sqcap t_1) < |\mathcal{L}(t_1)| \& \mathcal{L}(t_1) \setminus \mathcal{I}_{q_1} \subseteq \mathcal{P}$, и, следовательно, $\mathcal{P}$ содержит замкнутое множество АДЧ положительной [1]-меры.

На основании этой леммы можно способом близким использованному в доказательстве леммы 1 доказать следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть t_0 НЧ и $\mathfrak{M}$ множество АДЧ типа $G_{\delta\sigma\delta}^{[0]}$ такие, что $\mathcal{A}_{\alpha} \cap \mathcal{L}(t_0) \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда существует [2]-КДЧ

v из $\mathcal{A}_\beta \cap \mathcal{L}(t_0) \cap \mathfrak{M}$.

Доказательство теоремы 1. Часть 1) утверждения непосредственно следует из определений $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ и замечаний 3, 4 и 7 из [4] и замечания 1. $\mathcal{A}_2$ не может быть множеством типа $G_\delta^{[m]}$, ибо $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1$ типа $G_\delta^{[0]}$ и $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ всюду плотные множества АДЧ. Остаток части 2) утверждения прямо следует из теорем 3, 4 и 5.

Мы займемся эффективно открытыми (т.е. [0]-открытыми) множествами АДЧ, в частности, их точками разрежения.

Определения. Для любых НЧ m и n и АДЧ X

1) мы обозначим $\mathrm{Disp}_{\kappa\pi}(X,m) \rightleftharpoons \forall s \neg\neg \exists t \forall \ell (X \in \mathcal{L}^\circ(\ell) \,\&\, |\mathcal{L}(\ell)| < 2^{-t} \supset \hat{\mu}_2(m \sqcap \ell) < 2^{-s} \cdot |\mathcal{L}(\ell)|)$,

$\mathrm{Disp}^{[n]}(X,m) \rightleftharpoons \exists p \forall s (!\langle p \rangle^{[n]}(s) \,\&\, \forall \ell (X \in \mathcal{L}^\circ(\ell) \,\&\, |\mathcal{L}(\ell)| < 2^{-\langle p \rangle^{[n]}(s)} \supset \hat{\mu}_2(m \sqcap \ell) < 2^{-s} \cdot |\mathcal{L}(\ell)|))$;

2) если верно $\mathrm{Disp}_{\kappa\pi}(X,m)$ (соотв. $\mathrm{Disp}^{[n]}(X,m)$), мы скажем, что X является точкой псевдоразрежения (соотв. $[n]$-разрежения) множества АДЧ $[W_m]$.

Замечание 4. Для любых НЧ n и m и $[n]$-КДЧ v выполнено $\mathrm{Disp}_{\kappa\pi}(v,m) \supset \mathrm{Disp}^{[n+1]}(v,m)$.

<u>Теорема 6</u>. Существуют НЧ y и ψ, [0]-последовательности НЧ $\{y_p\}_p^{[0]}$ и $\{\psi_p\}_p^{[0]}$ и [1]-ОРФ $\bar{\varphi}$ такие, что $\hat{S}(y,\psi)$, для всякого НЧ p верно $\bar{S}(y_p,\psi_p)$, $\bar{\mu}_1(\psi_p) \leq 2^{-p}$ и $\mathcal{F}_{\psi_p}$ [1]-открытое множество АДЧ, $\mathcal{T}_\psi = \bigcap_k \mathcal{F}_{\psi_k}$, $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{T}_\psi$ и

1) для любых НЧ t и p и АДЧ X, для которых выполнено $|X| \leq 2^p \,\&\, \neg(X \in \mathcal{F}_{\psi_n}) \,\&\, \neg(X \in [W_\cdot])$ верно

$\forall k \ell (p \le k \,\&\, X \in \mathcal{L}^{o}(\ell) \,\&\, |\mathcal{L}(\ell)| < 2^{-\overline{\varphi}(t,k)} \supset \hat{\mu}_2 (t \,\square\, \ell) < 2^{-k} \cdot |\mathcal{L}(\ell)|)$

и, следовательно, $\mathrm{Disp}^{[1]}(X,t)$,

2) для всяких НЧ n и p, $1 \le n$, существует $[n]$-отображение ([3], стр. 33-34) типа $(D^{[n]} \square N \to N)$ $\mathcal{U}_{n,p}$ такое, что

$\forall x^{[n]} t (\neg (x^{[n]} \in \mathcal{J}_{\overline{\psi}_p}) \supset (\mathcal{U}_{n,p}(x^{[n]} \square\, t) = 0 \equiv x^{[n]} \in [W_t])),$

и, следовательно,

3) для любых НЧ n, $1 \le n$, и $[n]$-КДЧ v если верно $\neg (v \in \mathcal{T}_{\overline{\psi}})$ (и, тем более, если $v \in A_{\beta}$), то не может не существовать $[n]$-ОРФ f такая, что

$\forall t ((f(t) = 0 \equiv v \in [W_t]) \,\&\, (f(t) > 0 \equiv \mathrm{Disp}^{[1]}(v,t)))$.

<u>Теорема 7</u>. Существуют НЧ $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ такие, что $\hat{S}(\overline{\varphi}, \overline{\psi})$ и для всяких НЧ t и АДЧ X, для которых выполнено

$\neg (X \in \mathcal{T}^{*}_{\overline{\psi}}) \,\&\, \neg (X \in [W_t])$,

а) верно $\mathrm{Disp}_{КЛ}(X,t)$;

б) если n НЧ, $1 \le n$, и существует $[n]$-ОРФ h такая, что $\forall m (h(m) = 0 \equiv X \in [W_m])$, то $\mathrm{Disp}^{[n]}(X,t)$.

Замечание 5. Пусть f_0 и f_1 ОРФ. Тогда существуют НЧ p и q, для которых выполнено $\forall n\, \hat{S}_0(f_1(n)) \supset \hat{S}_0(q) \,\&\, \bigcup_n \mathcal{T}^{*}_{f_1(n)} \subseteq \mathcal{T}^{*}_{q}$ и $\forall n\, \hat{S}(f_0(n), f_1(n)) \supset \hat{S}(p,q)$.

Замечание 6. 1) Пусть ℓ и m НЧ, $\mathcal{L}^{o}(\ell) = [\mathcal{D}_m]$. Тогда существуют НЧ m_0 и m_1 такие, что $\mathcal{D}_{m_0} \cup \mathcal{D}_{m_1} \subseteq \mathcal{D}_m$, $\{\mathcal{L}^{o}(t)\}_{t \in \mathcal{D}_{m_0}}$ и $\{\mathcal{L}^{c}(t)\}_{t \in \mathcal{D}_{m_1}}$ системы дизъюнктных интервалов, $\mathcal{L}^{o}(\ell) = [\mathcal{D}_{m_0} \cup \mathcal{D}_{m_1}]$ и, следовательно, $|\mathcal{L}(\ell)| \le \mu_0(m_0) + \mu_0(m_1) \le 2 \cdot |\mathcal{L}(\ell)|$.

2) Существует ОРФ $\hat{\psi}$ такая, что для всяких НЧ t и k

верно $W_{\hat{\psi}(t,k)} = \{\ell \mid \hat{\mu}_2(t \sqcap \ell) > 2^{-k-1} \cdot |\mathcal{L}(\ell)|\}$ и, следовательно, ввиду 1) выполнено $\forall m (\hat{\mu}_1(t) \le 2^{-m-k-2} \supset \hat{\mu}_1(\hat{\psi}(t,k)) \le 2^{-m})$ и $[W_t] \subseteq [W_{\hat{\psi}}(t,k)]$.

Доказательство теорем 6 и 7. а) Пусть f_0 и f_1 ОРФ такие, что для всяких НЧ t и k выполнено $\mathcal{L}(f_0(k)) \equiv -2^{k+1} \triangle 2^{k+1}$ и $f_1(t,k) > k \;\&\; W_t = W_{f_1(t,k)}$.

Мы используем замечания 1 и 4 из [4] и замечание 6 и построим ОРФ $\hat{g}$ и НЧ φ и ψ, для которых для всяких НЧ m, k и ℓ выполнено

$$\langle \hat{g}(m) \rangle (k, \ell) \simeq$$

$$\simeq un_2(\langle z \rangle (k+1), \hat{\psi}(\langle \varkappa_1(\nu_2(m, f_0(k)), 2k+3) \rangle (\ell), k)),$$

$\langle \varphi \rangle (k) \simeq 2^{3k+5}$ и $\langle \psi \rangle (k, \ell) \simeq \langle \hat{g}(k) \rangle (k, \ell)$.

Тогда $\hat{S}(\varphi, \psi) \;\&\; \forall m\, \hat{S}(\varphi, \hat{g}(m))$ и согласно замечанию 5 существуют НЧ $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$, для которых выполнено $\hat{S}(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \;\&\; \hat{\bigcup\limits_m} \mathcal{T}^*_{\hat{g}(m)} \subseteq \mathcal{T}^*_{\bar{\psi}}$. Для всякого НЧ p мы определим $\varphi_p \rightleftharpoons \bar{\sigma}_0(\varphi, p+1)$ и $\psi_p \rightleftharpoons \bar{\sigma}_1(\psi, p+1)$ (см. замечание 4 из [4]).

Существуют [1]-ОРФ g_1, g_2, g, $\bar{F}$ и $\bar{\varphi}$ такие, что для всяких НЧ m, k и i, $1 \le i \le 2$, верно

$g_i(m,k) \simeq \mathcal{L}im(\varkappa_i(\nu_2(m, f_0(k)), 2k+3))$,

$g(m,k) \simeq \mathcal{L}im(s_1^1(\hat{g}(m), k))$,

$\bar{F}(m,k) \simeq \mu s(\forall \ell a(\ell \in \mathcal{D}_{g_2(m,k)} \;\&\; (a = \partial_\ell(\mathcal{L}(\ell)) \vee a = \partial_m(\mathcal{L}(\ell))) \supset (a - 2^{-s}) \triangle (a + 2^{-s}) \subseteq [W_{\langle z \rangle (k+1)}]))$

и $\bar{\varphi}(m,k) \simeq \bar{F}(f_1(m,k), f_1(m,k))$ и, следовательно, $[W_m] \cap \mathcal{L}^\circ(f_0(k)) = [W_{g_1(m,k)}] \,\hat{\cup}\, [\mathcal{D}_{g_2(m,k)}]_c$ и $[W_{g_1(m,k)}] \,\hat{\cup}\, \hat{\cup}\, [W_{\langle z \rangle (k+1)}] \subseteq [W_{g(m,k)}]$.

б) Пусть m, k и ℓ НЧ и X АДЧ, для которых выполнено $|X| \le 2^k \;\&\; X \in \mathcal{L}^\circ(\ell) \;\&\; |\mathcal{L}(\ell)| < 2^{-\bar{F}(m,k)} \;\&\; \neg(X \in [W_{g(m,k)}])$.

Тогда $X \in [W_m] \equiv \mathcal{L}(\ell) \cap [\mathcal{D}_{g_2(m,k)}]_c \neq \emptyset$ и если верно

$\neg(X \in [W_m])$, то $\hat{\mu}_2(m \square \ell) = \hat{\mu}_2(g_1(m,k) \square \ell) \le 2^{-k-1} \cdot |\mathcal{L}(\ell)|$.

в) Для любых НЧ n, p и t и $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ $[max(n,1)]$-существуют НЧ k и ℓ такие, что

$$(6)\quad p \le k \,\&\, |x^{[n]}| \le 2^{k} \,\&\, x^{[n]} \in \mathcal{L}^{o}(\ell) \,\&\, |\mathcal{L}(\ell)| < 2^{-\varphi(t,k)}.$$

Если верно $\neg(x^{[n]} \in \mathcal{F}_{\varphi_p})$ и (6), то $\neg(x^{[n]} \in [W_{g(f_1(t,k), f_1(t,k))}])$ и согласно б) и свойствам ОРФ f_1 имеет место $x^{[n]} \in [W_t] \equiv \mathcal{L}(\ell) \cap [\mathcal{D}_{g_2(f_1(t,k), f_1(t,k))}]_c \ne \emptyset$ и $\neg(x^{[n]} \in [W_t]) \supset \hat{\mu}_2(t \square \ell) < 2^{-k} \cdot |\mathcal{L}(\ell)|$.

Итак, мы доказали теорему 6. Что касается теоремы 7, то ввиду б) достаточно отметить, что для любых НЧ m и АДЧ X верность $\neg(X \in \mathcal{T}^{*}_{g(m)})$ равносильна инфинитности числового множества $\{k \mid \neg(X \in [W_{g(m,k)}])\}$.

Замечание 7. 1) Пусть m и s НЧ и пусть $\hat{\mu}_2(m \square s) \in \mathcal{A}_1$ (т.е. [1]-мера множества $[W_m] \cap \mathcal{L}^{o}(s)$ равна Π_1-числу). Тогда согласно [5] существуют ОРФ g и [1]-ОРФ h, для которых выполнено

$$\forall k(\hat{\mu}_1(g(k)) < 2^{-k} \,\&\, [W_m] \cap \mathcal{L}^{o}(s) = [W_{g(k)}] \,\hat{\cup}\, [\mathcal{D}_{h(k)}]_c).$$

Ввиду этого, замечания 1 из [4] и замечания 6 легко показать, что для всякого АДЧ X такого, что $X \in \mathcal{L}^{o}(s) \setminus [W_m]$, верно $\exists k \neg(X \in [W_{\langle g \rangle(k)}]) \supset \mathrm{Disp}^{[1]}(X, m)$ и, следовательно, $X \in \mathcal{A}_2 \supset \neg\neg\, \mathrm{Disp}^{[1]}(X, m)$.

2) На основании Π_1-покрытия (см. [5], стр. 324) можно построить НЧ m и [1]-КДЧ v такие, что $v \in \mathcal{A}_2 \,\&\, \forall X(X \in [W_m] \equiv$ $\equiv 0 < X < v)$ и, следовательно, $\neg\, \mathrm{Disp}_{\text{кл}}(v, m)$.

Пример 1. Существуют НЧ m_0 и для любого НЧ n, $1 \le n$, $[n]$-КДЧ v_n, для которых выполнено а) $\neg(v_n \in [W_{m_0}]) \& v_n \in 0 \triangledown 1 \setminus \mathcal{A}_\alpha^*$ и тогда согласно теореме 7 и замечанию 4 верно $\mathrm{Disp}^{[n+1]}(v_n, m_0)$,

б) $\neg \mathrm{Disp}^{[n]}(v_n, m_0)$ и, следовательно,

в) не существует $[n]$-ОРФ h такая, что $\forall s(h(s) = 0 \equiv v_n \in [W_s])$.

На основании замечания 4 из [4] для всяких НЧ m и t, для которых выполнено $\forall s(\mu_0(\varphi_0(m, s)) \leq 2^t)$, легко построить НЧ p и q такие, что $\bar{S}(p, q) \& \mathcal{V}_q = [W_m]$. Как мы увидим, часть результатов, которые мы получили для [0]-открытых множеств АДЧ, можно перенести на множества $\mathcal{V}_q$, где $\exists p\, \bar{S}(p, q)$. Следует отметить, что для всяких НЧ m, s, p и q, где $\bar{S}(p, q)$, [1]-КДЧ $\hat{\mu}_1(m)$, $\hat{\mu}_2(m \square s)$; $\bar{\mu}_1(q)$ и $\bar{\mu}_2(q \square s)$ являются элементами $\mathcal{A}_\alpha^*$.

Замечание 8. Пусть f_0 и f_1 ОРФ. Тогда существуют НЧ p, q и $\hat{q}$ такие, что

а) если верно $\forall n(\bar{S}_0(f_1(n)) \& \bar{\mu}_1(f_1(n+1)) \leq 2^{-n-1})$, то имеет место $\bar{S}_0(q) \& \hat{S}_0(\hat{q}) \& \mathcal{V}_q = \hat{\bigcup_n} \mathcal{V}_{f_1(n)}$,

$\forall t(\hat{\bigcup_{n>t}} \mathcal{V}_{f_1(n)} \subseteq \mathcal{V}_{\bar{\sigma}_1(\hat{q}, t)})$ (см. замечание 4 из [4]), и, следовательно, $\bigcap_t \hat{\bigcup_{n \geq t}} \mathcal{V}_{f_1(n)} \subseteq \mathcal{V}_{\hat{q}}$;

б) выполнено

$\forall n(\bar{S}(f_0(n), f_1(n)) \& \bar{\mu}_1(f_1(n+1)) \leq 2^{-n-1}) \supset \bar{S}(p, q) \& \hat{S}(p, \hat{q})$.

На основании этого замечания, замечания 4 из [4] и замечания 6 легко доказать следующие утверждения.

<u>Теорема 8</u>. Для АДЧ X выполнено $X \in \mathcal{A}_\alpha$ в том и только том случае, если не могут не существовать ОРФ f_0 и f_1 такие, что

$\forall m\,(\bar{S}(f_0(m), f_1(m))\,\&\,\bar{\mu}_1(f_1(m)) \le 2^{-m}\,\&\,X \in \mathcal{F}_{f_1(m)})$.

<u>Теорема 9</u>. Для всяких НЧ p и q и АДЧ X , для которых выполнено $\bar{S}(p,q)\ \&\ X \in \mathcal{A}_\beta$, верно
$\neg\neg(X \in \mathcal{F}_q \vee \exists p\, \forall s\,(!\langle p\rangle^{[1]}(s)\,\&\,\forall \ell\,(X \in \mathcal{L}^{\circ}(\ell)\,\&$
$|\mathcal{L}(\ell)| < 2^{-\langle p\rangle^{[1]}(s)} \supset \bar{\mu}_2(q \sqcap \ell) < 2^{-s}\cdot|\mathcal{L}(\ell)|)))$,
т.е. если выполнено $\neg(X \in \mathcal{F}_q)$, то X не может не быть точкой [1]-разрежения множества АДЧ $\mathcal{F}_q$.

Пример 2. Существуют НЧ p и q и [1]-КДЧ v такие, что
$\bar{S}(p,q)\,\&\,\neg(v \in \mathcal{F}_q)\,\&\,\neg(v \in \mathcal{A}^{*}_{\alpha})$ и
$\forall k\,\neg\neg\,\exists \ell\,(v \in \mathcal{L}^{\circ}(\ell)\,\&\,|\mathcal{L}(\ell)| < 2^{-k}\,\&\,\bar{\mu}_2(q \sqcap \ell) > \frac{1}{2}\cdot|\mathcal{L}(\ell)|)$
и, следовательно, v не является точкой псевдоразрежения множества АДЧ $\mathcal{F}_q$.

Литература

[1] GOLD E.M.: Limiting recursion, J. Symbolic Logic 30(1965), 28-48.

[2] АЛЕКСАНДРОВ П.С.: Введение в общую теорию множеств и функций, Москва 1948.

[3] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19(1978), 15-60.

[4] ДЕМУТ О.: О некоторых классах арифметических действительных чисел, Comment. Math. Univ. Carolinae 23(1982), 453-465.

[5] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

Matematicko-fyzikální fakulta
Universita Karlova
Malostranské nám. 25, Praha
Czechoslovakia

(Oblatum 16.4. 1982)