COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
23,3 (1982)

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH)

Содержание: В статье вводятся классы арифметических действительных чисел $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha^*$ и $\mathcal{A}_\beta$, исследование которых оказывается полезным для конструктивного математического анализа.

Ключевые слова: Арифметические действительные числа, предельная вычислимость, рекурсивно перечислимые множества рациональных интервалов.

Classification: 03F65

Введение и исследование Π_1- и Π_2-чисел [5] привело в конструктивном математическом анализе к важным результатам (см., например, [6],[7] и [8]). Дальнейшему развитию использованного при этом подхода служат понятия введенные в настоящей статье.

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [3]. Некоторые из них мы напомним. N обозначает множество всех натуральных чисел (НЧ), а Q - множество всех рациональных чисел (РЧ). Для любого НЧ m $[m]$ обозначает $\emptyset^{(m)}$, $\mathcal{D}_m$ - финитное множество НЧ с кодом m ([1], стр. 97), причем $\mathcal{D}_0 = \emptyset$, $\mathrm{D}^{[m]}$ - множество всех $[m]$-конструктивных действительных чисел ($[m]$-КДЧ), $\Pi^{[m]}$ - множество всех $[m]$-псевдочисел ($[m]$-ПЧ), а $\mathcal{A}$ - множество всех арифметических действительных чисел (АДЧ).

Ниже перечисленные буквы и выражения - с нижними индексами или без них - служат переменными: k, l, m, n, p, q, s и

t - для НЧ, i и j - для целых чисел (ЦЧ), a, b, c и d - для РЧ, $x^{[n]}$, $y^{[n]}$ и $z^{[n]}$ - для $[n]$-КДЧ, $\xi^{[n]}$ и $\eta^{[n]}$ для $[n]$-ПЧ, а X, Y и Z - для АДЧ. Выполнено $\mathcal{A} = \bigcup_n D^{[n]}$ и существуют $[0]$-отображения ([3], § 3) $\mathcal{D}upl$ и $\mathcal{P}seud$ такие, что

$$\forall n x^{[n+1]} \xi^{[n]} (\mathcal{P}seud(x^{[n+1]}) \in \Pi^{[n]} \,\&\, \mathcal{P}seud(x^{[n+1]}) = x^{[n+1]} \,\&\, \mathcal{D}upl(\xi^{[n]}) \in D^{[n+1]} \,\&\, \mathcal{D}upl(\xi^{[n]}) = \xi^{[n]})$$

([3], лемма 5.5). $[0]$-ПЧ ξ мы называем монотонным, если $\underline{\xi}$ (см. [3], стр. 37) монотонная последовательность РЧ.

Для $k \geq 2$ $\tau^k, \pi_1^k, \ldots, \pi_k^k$ общерекурсивные функции (ОРФ), введенные в [1], стр. 90. В частности, выполнено $\forall m(\tau^k(\pi_1^k(m), \ldots, \pi_k^k(m)) = m \,\&\, \forall i\,(1 \leq i \leq k \supset \pi_i^k(m) \leq m))$.

Для любого НЧ m $\langle m \rangle^{[n]}(p)$ универсальная функция для $[n]$-частичнорекурсивных функций ($[n]$-ЧРФ) одной переменной, $W_m^{[n]} = \{\ell \mid\, !\langle m \rangle^{[n]}(\ell)\}$, $W_0^{[n]} = \emptyset$, $\langle m \rangle^{[n]}(p_1, \ldots, p_k) \simeq \langle m \rangle^{[n]}(\tau^k(p_1, \ldots, p_k))$ $(2 \leq k)$ и $\langle m \rangle^{[n]}(p_1, \ldots, p_t, q_1, \ldots, q_s) \simeq \langle s_s^t(m, p_1, \ldots, p_t) \rangle^{[n]}(q_1, \ldots, q_s)$, где $1 \leq t \,\&\, 1 \leq s$ и s_s^t ОРФ. $\langle m \rangle^{[0]}$ и $W_m^{[0]}$ мы сокращаем до $\langle m \rangle$ и W_m.

$\mathcal{L}$ (соотв. $\mathcal{L}^o$) $[0]$-отображение, осуществляющее пересчет всех рациональных сегментов (соотв. интервалов), причем для всякого НЧ ℓ $\mathcal{L}^o(\ell) \equiv \partial_\lambda(\mathcal{L}(\ell)) \triangledown \partial_m(\mathcal{L}(\ell))$ (см. [3], стр. 41).

Для любого числового множества ([3], стр. 19) $\mathfrak{M}$ мы определим $[\mathfrak{M}] \rightleftharpoons \wedge X(\neg\neg \exists \ell(\ell \in \mathfrak{M} \,\&\, X \in \mathcal{L}^o(\ell)))$ и

$$[\mathfrak{M}]_c \rightleftharpoons \wedge X(\neg\neg \exists \ell(\ell \in \mathfrak{M} \,\&\, X \in \mathcal{L}(\ell))).$$

Знаки $\cap$, $\setminus$, $\cup$ и $\hat{\cup}$ обозначают соответственно операции пересечения, разности, объединения и квазиобъединения множеств. По определению, слово является элементом объединения (соотв. квазиобъединения) множеств, если оно является элементом хотя бы одного – определенного – из них (соотв. не может не быть элементом некоторого из них). В случае операций над множествами АДЧ мы будем $[\{\ell \mid \ell = m\}]$ (соотв. $[\{\ell \mid \ell = m\}]_c$) сокращать до $\mathcal{L}^0(m)$ (соотв. до $\mathcal{L}(m)$).

Мы скажем, что множество АДЧ $\mathcal{P}$ является $[m]$-открытым, если существует НЧ m такое, что $\mathcal{P} = [W_m^{[m]}]$.

Релятивизацией результатов из [4] мы получаем понятия $S_6^{[m]}$-множества (см. также [3], стр. 58), $[m]$-измеримости множеств АДЧ и $[m]$-меры (т.е. измеримости и меры эффективной относительно $\emptyset^{(m)}$). Следует отметить, что $[m]$-открытые множества АДЧ, содержащиеся в некотором интервале, являются $[m+1]$-измеримыми, но могут не быть $[m]$-измеримыми.

Мы скажем, что множество АДЧ $\mathcal{P}$ является множеством $[m]$-меры нуль, если существует $[m]$-последовательность $S_6^{[m]}$-множеств $\{\mathcal{G}_k\}_k^{[m]}$ такая, что для всякого НЧ k $[m]$-мера $\mathcal{G}_k$ меньше чем 2^{-k} и $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{G}_k$.

Посредством φ_0 , ω_0 и π_0 мы обозначим ОРФ, а посредством $\mathcal{L}im$ и $\mathcal{M}is$ [1]-ЧРФ такие, что для любого НЧ m верно $\varphi_0(m,0)=0 \,\&\, \forall s(\mathcal{D}_{\varphi_0(m,s)} \subseteq \mathcal{D}_{\varphi_0(m,s+1)}) \,\&\, W_m = \bigcup_s \mathcal{D}_{\varphi_0(m,s)}$, $\langle\omega_0(m)\rangle$ и $\langle\pi_0(m)\rangle$ ОРФ, $\langle\omega_0(m)\rangle(0) = 0$ и для всякого НЧ k выполнено $\exists q(\langle\omega_0(m)\rangle(q) = k+1) \equiv (\forall p)_{p \le k}(!\langle m\rangle(p))$,

$$\forall q(\langle\omega_0(m)\rangle(q) \le \langle\omega_0(m)\rangle(q+1) \le \langle\omega_0(m)\rangle(q)+1)$$ и

$$W_{\langle\pi_0(m)\rangle(k)} = \{\ell \mid \exists q(\langle\omega_0(m)\rangle(q) = k+1) \,\&\, \ell \in W_{\langle m\rangle(k)} \vee \exists s q(k < s \,\&\, \langle\omega_0(m)\rangle(q) = s+1 \,\&\, \neg(\langle m\rangle(k) = \langle m\rangle(s)))\},$$

если $\langle m\rangle$ ОРФ, то $\mathcal{L}im(m) \simeq \lim\limits_{t\to\infty} \langle m\rangle(t)$ и

$\mathcal{M}is(m) \simeq \lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{t} sg(|\langle m\rangle(i) - \langle m\rangle(i \dot{-} 1)|)$ (Шёнфильд) и,

следовательно, $!\mathcal{Lim}(m) \supset \neg\neg \exists p\, \forall t\, ((t < p \supset W_{\langle \pi_0(m)\rangle(t)} = N)\, \&$
$(p \leq t \supset W_{\langle \pi_0(m)\rangle(t)} = W_{\mathcal{Lim}(m)}))\, \&\, [W_{\mathcal{Lim}(m)}] = \bigcap_t [W_{\langle \pi_0(m)\rangle(t)}]$.

Легко построить ОРФ ν_1, ν_2, un_1, un_2, $\overline{un}$, int, dif и $\overline{dif}$ такие, что для всяких НЧ m и t выполнено
$W_{\nu_1(m)} = \{ \ell \mid \exists s\, (s \in W_m\, \&\, \mathcal{L}(\ell) \subseteq \mathcal{L}^{\circ}(s))\}$,
$W_{\nu_2(m,t)} = \{ \ell \mid \exists s\, (s \in W_m\, \&\, \mathcal{L}(\ell) \subseteq \mathcal{L}^{\circ}(s) \cap \mathcal{L}^{\circ}(t))\}$
и, следовательно, $[W_m] = [W_{\nu_1(m)}] = [W_{\nu_1(m)}]_c$ и
$[W_m] \cap \mathcal{L}^{\circ}(t) = [W_{\nu_2(m,t)}] = [W_{\nu_2(m,t)}]_c$,
$W_{un_1(t)} = \bigcup_{n \in \mathcal{D}_t} W_n$, $W_{un_2(m,t)} = W_m \cup W_t$, $\mathcal{D}_{\overline{un}(m,t)} = \mathcal{D}_m \cup \mathcal{D}_t$,
$[W_{int(m,t)}] = [W_m] \cap [W_t]$, $[W_{dif(m,t)}] = [W_m] \setminus [\mathcal{D}_t]_c$ и
$[\mathcal{D}_{\overline{dif}(m,t)}] = [\mathcal{D}_m] \setminus [\mathcal{D}_t]_c$.

Существуют [0]-отображения μ_0 типа $(N \longrightarrow Q)$, $\hat{\mu}_1$ типа $(N \longrightarrow \mathcal{D}^{[1]})$ и $\hat{\mu}_2$ типа $(N \,\square\, N \longrightarrow \mathcal{D}^{[1]})$ такие, что для всяких НЧ m и t верно: $\mu_0(m)$ - мера множества АДЧ $[\mathcal{D}_m]_c$, $\hat{\mu}_2(m \,\square\, t)$ - [1]-мера $[W_m] \cap \mathcal{L}^{\circ}(t)$, $\hat{\mu}_1(m) \leq 2$, а если $\hat{\mu}_1(m) < 2 \vee \neg \exists s\, (\mu_0(\varphi_0(m, s)) > 2)$, то $\hat{\mu}_1(m)$ [1]-мера $[W_m]$. Следует отметить, что $2^{-k} < \hat{\mu}_1(m)$ [0]-частичнорекурсивный предикат ([0]-ЧРП).

Легко построить ОРФ $\overline{Б}$ и $\hat{Б}$ такие, что для всяких НЧ m и k выполнено $[\mathcal{D}_{\overline{Б}(m,k)}]_c \subseteq [\mathcal{D}_m]_c\, \&\, \mu_0(\overline{Б}(m,k)) = min\,(\mu_0(m), 2^{-k})$,
$(\hat{\mu}_1(m) \leq 2^{-k} \supset [W_{\hat{Б}(m,k)}] = [W_m]\, \&\, (2^{-k} < \hat{\mu}_1(m) \supset$
$\supset \exists s\, ([\mathcal{D}_s]_c \subseteq [W_m]\, \&\, \mu_0(s) = 2^{-k}\, \&\, \mathcal{D}_s = W_{\hat{Б}(m,k)}))$.

<u>Замечание 1</u>. Согласно теореме 2 из [5] и ее доказательству существует НЧ z такое, что

а) для всякого НЧ k верно $!\langle z\rangle(k)$, $\hat{\mu}_1(\langle z\rangle(k)) \leq 2^{-k}$,

$\mathcal{D}^{[0]} \subseteq [W_{\langle z\rangle(k+1)}] \subseteq [W_{\langle z\rangle(k)}] = [W_{\langle z\rangle(k)}]_c$;

б) для любой ОРФ f , для которой имеет место $\forall m\ (\hat{\mu}_1(f(m)) \leq 2^{-m})$, выполнено $\forall p\ \exists q([W_{f(q)}] \subseteq [W_{\langle z\rangle(p)}])$ и, следовательно,

в) для любого [0]-ПЧ ξ верно

$\xi \in \Pi_1^{[0]} \equiv \mathcal{D}upl(\xi) \in \bigcap_k [W_{\langle z\rangle(k)}]$ и $\xi \in \Pi_2^{[0]} \equiv \neg(\xi \in \Pi_1^{[0]})$

(см. [5] и [8]).

Введение Π_1-чисел и Π_2-чисел оказалось очень полезным для исследования свойств [0]-конструктивных функций действительной переменной ([0]-КФДП), в частности, их псевдодифференцируемости (см., например, [6] - [8]).

Следует отметить, что ОРФ, обладающую свойствами ОРФ $\langle z\rangle$, впервые построил Мартин-Лёф (см. [2], стр. 118). Однако, Мартин-Лёф не изучал свойства действительных чисел содержащихся (соотв. несодержащихся) в $\bigcap_k [W_{\langle z\rangle(k)}]$.

<u>Определение</u>. Мы определим $\mathcal{A}_1 \rightleftharpoons \bigcap_k [W_{\langle z\rangle(k)}]$, $\mathcal{A}_2 \rightleftharpoons \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$.

Итак, $\mathcal{A}_1$ множество АДЧ [1]-меры нуль, $\mathcal{D}^{[0]} \subseteq \mathcal{A}_1$. Большинство результатов, полученных нами для $\Pi_1^{[0]}$ (соотв. $\Pi_2^{[0]}$) переносится на $\mathcal{A}_1$ (соотв. $\mathcal{A}_2$). Это следует из замечания 1 и следующего утверждения, которое легко доказать с помощью леммы 4 из [6].

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ всюду определенная [0]-КФДП. Тогда

$$\forall X(\mathcal{D}_{\kappa\lambda}(+\infty, \mathcal{F}, X) \supset X \in \mathcal{A}_1) .$$

<u>Определения</u>. Мы определим

1) для всяких НЧ p и q

а) $S_0(q) \rightleftharpoons \forall k\ell(!\langle q\rangle(k,\ell) \,\&\, !_t \lim_{t\to\infty} \langle q\rangle(k,t))$,

$\hat{S}_0(q) \rightleftharpoons (S_0(q) \,\&\, \forall k(\hat{\mu}_1(\mathcal{L}im(s_1^1(q,k))) \leq 2^{-k}))$,

$\overline{S}_0(q) \rightleftharpoons (S_0(q) \,\&\, \forall k\, (\mu_0 (\mathcal{L}im\,(s_1^1(q,k+1))) \leq 2^{-k-1}))$,

$\mathcal{K}(p,q) \rightleftharpoons (\mathcal{K}_0(q) \,\&\, \forall k\, (!\langle p\rangle(k) \,\&\, \mathcal{M}is\,(s_1^1(q,k)) \leq \langle p\rangle(k)))$,

где $\mathcal{K}$ одно из выражений S , $\hat{S}$ и $\overline{S}$,

б) если верно $S_0(q)$, то

$$\mathcal{V}_q \rightleftharpoons \bigcap_m \widehat{\bigcup_{n\geq m}} [W_{\mathcal{L}im\,(s_1^1(q,n))}],$$

$$\mathcal{V}_q^* \rightleftharpoons \widehat{\bigcup_m} \bigcap_{n\geq m} [W_{\mathcal{L}im\,(s_1^1(q,n))}],$$

$$\mathcal{Z}_q \rightleftharpoons \widehat{\bigcup_k} [\mathcal{D}_{\mathcal{L}im\,(s_1^1(q,k))}]_c ,$$

в) ${}^{p}\mathcal{A}_\alpha \rightleftharpoons \wedge X(\neg\neg\, \exists m\, (\hat{S}(p,m) \,\&\, X \in \mathcal{V}_m))$;

г) $\mathcal{A}_\alpha \rightleftharpoons \wedge X(\neg\neg\, \exists p q\, (\hat{S}(p,q) \,\&\, X \in \mathcal{V}_q))$,

$\mathcal{A}_\alpha^* \rightleftharpoons \wedge X(\neg\neg\, \exists p\, q\, (\hat{S}(p,q) \,\&\, X \in \mathcal{V}_q^*))$,

$\mathcal{A}_\beta \rightleftharpoons \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_\alpha$.

Итак, если верно $S(p,q)$, то $\langle p\rangle$ ОРФ и для всякого НЧ k $\langle p\rangle(k)$ является верхней оценкой числа "ошибок" допущенных в ходе предельного вычисления НЧ $\mathcal{L}im\,(s_1^1(q,k))$ посредством [0]-последовательности НЧ $\{\langle q\rangle(k,\ell)\}_\ell^{[0]}$. (Ср. f-рекурсивную перечислимость [9].) Выполнено $\mathcal{A}_\alpha^* \subseteq \mathcal{A}_\alpha = \widehat{\bigcup_p} {}^{p}\mathcal{A}_\alpha$.

Легко построить НЧ p_0 и q_0 такие, что для всяких НЧ k и ℓ верно $\langle p_0\rangle(k) \simeq 0 \,\&\, \langle q_0\rangle(k,\ell) \simeq \langle z\rangle(k)$ и, следовательно, $\hat{S}(p_0,q_0) \,\&\, \mathcal{A}_1 = \mathcal{V}_{q_0}^* = \mathcal{V}_{q_0} \subseteq {}^{p_0}\mathcal{A}_\alpha$.

<u>Замечание 2</u>. 1) С помощью ОРФ ω_0 легко построить [0]-последовательность [1]-КДЧ $\{w_k\}_k^{[0]}$ такую, что для любого [1]-КДЧ v , которое равно сумме конечного числа монотонных [0]-ПЧ, верно $\exists k\, (v = w_k)$. С другой стороны ясно, что $\forall k\, (w_k \in \mathcal{A}_\alpha^*)$. Итак, согласно следствию 1 теоремы 5 из [5] $\mathcal{A}_\alpha^* \cap \mathcal{A}_2 \cap D^{[1]} \neq \emptyset$.

2) Исходя от Π_1-покрытия ([5], стр. 324) можно построить НЧ p и q такие, что $\hat{S}(p,q) \,\&\, \mathcal{T}_q^* \subseteq \mathcal{A}_2$ и для любой [1]-последовательности [1]-КДЧ $\{v_k\}_k^{[1]}$ выполнено $\exists x^{[1]}(x^{[1]} \in \mathcal{T}_q^* \,\&\, \neg \exists k (x^{[1]} = v_k))$.

Как видно, для всякого НЧ q, $\overline{S}_0(q)$, $\mathcal{I}_q$ является [1]-измеримым множеством АДЧ. Существуют [0]-отображения $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$ такие, что для всяких НЧ q и ℓ, где $\overline{S}_0(q)$, верно $!\,\bar{\mu}_1(q)$ и $!\,\bar{\mu}_2(q \,\square\, \ell)$ и $\bar{\mu}_1(q)$ (соотв. $\bar{\mu}_2(q \,\square\, \ell)$) [1]-КДЧ, являющееся [1]-мерой множества АДЧ $\mathcal{I}_q$ (соотв. $\mathcal{I}_q \cap \mathcal{B}(\ell)$).

Если для НЧ q верно $\overline{S}_0(q) \,\&\, 0 < \bar{\mu}_1(q)$, то существует $S_6^{[1]}$-множество $\mathcal{G}$ [1]-меры $\bar{\mu}_1(q)$, для которого выполнено $\mathcal{I}_q = \mathcal{G}$.

<u>Замечание 3.</u> Для всякого НЧ q, $S_0(q)$, выполнено

$$\mathcal{T}_q = \bigcap_m \widehat{\bigcup_{n \geq m}} \bigcap_t [W_{\langle \pi_0(s_1^1(q,n))\rangle(t)}] \quad \text{и}$$

$$\mathcal{T}_q^* = \widehat{\bigcup_m} \bigcap_{n \geq m} \bigcap_t [W_{\langle \pi_0(s_1^1(q,n))\rangle(t)}].$$

<u>Замечание 4.</u> 1) Существуют ОРФ $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ такие, что для всяких НЧ m и k имеет место

а) $\langle \varkappa_2(m,k)\rangle(0) \simeq 0$ и для любых НЧ ℓ и n_ℓ, где $n_\ell = \overline{dif}(\varphi_0(\nu_1(m), \ell+1), \langle \varkappa_2(m,k)\rangle(\ell))$, верно $(\mu_0(n_\ell) \leq 2^{-k} \supset \langle \varkappa_2(m,k)\rangle(\ell+1) \simeq \langle \varkappa_2(m,k)\rangle(\ell)) \,\&$

$(2^{-k} < \mu_0(n_\ell) \supset \langle \varkappa_2(m,k)\rangle(\ell+1) \simeq \varphi_0(\nu_1(m), \ell+1))$;

б) для любого НЧ ℓ $\langle \varkappa_1(m,k)\rangle(\ell) \simeq dif(\nu_1(m), \langle \varkappa_2(m,k)\rangle(\ell))$.

Итак, если для НЧ m и ЦЧ i выполнено $\forall s(\mu_0(\varphi_0(m,s)) \leq \leq 2^i)$, то для всякого НЧ k и $j = 1,2$ имеет место

$!\,Lim(\varkappa_j(m,k)) \,\&\, Mis(\varkappa_j(m,k)) \leq 2^{k+i} \,\&\, \hat{\mu}_1(Lim(\varkappa_1(m,k))) \leq 2^{-k}$

и $[W_m] = [W_{Lim(\varkappa_1(m,k))}] \,\hat{\cup}\, [\mathcal{D}_{Lim(\varkappa_2(m,k))}]_c =$
$= \widehat{\bigcup_{t \geq k}} [\mathcal{D}_{Lim(\varkappa_2(m,t))}]_c$

2) На основании ОРФ $\varkappa_2$ и $\hat{b}$ легко построить ОРФ $\overline{\sigma}_0$ и $\overline{\sigma}_1$ такие, что для всяких НЧ p, q и t выполнено

$$(\hat{S}_0(q) \supset \overline{S}_0(\overline{\sigma}_1(q,t)) \,\&\, \mathcal{I}_{\overline{\sigma}_1(q,t)} = \widehat{\bigcup_{s \geq t}} [W_{lim(s_1^1(q,s))}] \,\&$$

$$\overline{\mu}_1(\overline{\sigma}_1(q,t)) \leq 2^{-t+1}) \,\&\, (\hat{S}(p,q) \supset \overline{S}(\overline{\sigma}_0(p,t), \overline{\sigma}_1(q,t))).$$

Следовательно, для любых НЧ q и t, $\hat{S}_0(q)$, $\mathcal{I}_{\overline{\sigma}_1(q,t)}$ [1]-открытое множество, $\mathcal{Y}_q^* \subseteq \mathcal{Y}_q = \widehat{\bigcap_s} \mathcal{I}_{\overline{\sigma}_1(q,s)}$ и, таким образом, $\mathcal{Y}_q^*$ и $\mathcal{Y}_q$ множества АДЧ [1]-меры нуль.

<u>Лемма 2</u>. Пусть p и q НЧ, $\overline{S}_0(q)$. Тогда существуют НЧ $\overline{p}$ и $\overline{q}$ и [0]-последовательность НЧ $\{\overline{q}_s\}_s^{[0]}$ такие, что

а) $\hat{S}_0(\overline{q}) \,\&\, \forall s\, \overline{S}_0(\overline{q}_s) \,\&\, \widehat{\bigcup_s} \mathcal{Y}^*_{\overline{q}_s} \subseteq \mathcal{Y}_{\overline{q}} \subseteq \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}_q \,\&$

$$\forall s((\overline{\mu}_2(q \,\square\, s) = |\mathcal{L}(s)| \supset \mathcal{L}(s) \setminus \mathcal{I}_q = \mathcal{Y}^*_{\overline{q}_s} = \mathcal{Y}_{\overline{q}} \cap \mathcal{L}(s)) \,\&$$

$$(\overline{\mu}_2(q \,\square\, s) < |\mathcal{L}(s)| \supset \exists x^{[2]}(x^{[2]} \in \mathcal{Y}^*_{\overline{q}_s} \subseteq \mathcal{L}(s)) \,\&$$

$$\exists x^{[1]}(x^{[1]} \in \mathcal{Y}_{\overline{q}} \cap \mathcal{L}(s))))$$

и, следовательно, множество $\mathcal{Y}_{\overline{q}}$ является псевдоплотным (т.е. плотным в классическом смысле) в $\mathcal{A} \setminus \mathcal{I}_q$;

б) $\overline{S}(p,q) \supset \hat{S}(\overline{p},\overline{q}) \,\&\, \forall s\, \hat{S}(\overline{p},\overline{q}_s)$.

Доказательство. Достаточно построить ОРФ g и НЧ $\overline{p}$, q_0 и $\overline{q}$ и [0]-последовательность НЧ $\{\overline{q}_s\}_s^{[0]}$ такие, что для всяких НЧ s, k и ℓ выполнено

$$\ell \in W_{g(s,k)} \equiv (\mathcal{L}^0(\ell) \,\underline{\Xi}\, (\partial_l(\mathcal{L}(s)) - 2^{-k-3}) \,\triangledown\, (\partial_m(\mathcal{L}(s)) + 2^{-k-3})),$$

$$\langle \overline{p} \rangle (k) \simeq \sum_{i=0}^{k+1} \langle p \rangle (i),$$

$$\langle q_0 \rangle (s, 0, \ell) \simeq \hat{b}(dif(g(s,0), \overline{un}(\langle q \rangle (0,\ell), \langle q \rangle (1,\ell))), 0),$$

$$\langle q_0 \rangle (s, k+1, \ell) \simeq$$

$$\simeq \hat{b}(dif(int(g(s,k+1), \langle q_0 \rangle (s,k,\ell)), \langle q \rangle (k+2,\ell)), k+1),$$

$\overline{q}_s = s_2^1(q_0, s)$ и $\langle \overline{q} \rangle (k.\ell) \simeq \langle q_0 \rangle (\pi_1^2(k), k, \ell)$.

Аналогичным способом можно доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 3</u>. Пусть p, q, s и t НЧ такие, что $\overline{S}_0(q)\,\&$ $\overline{\mu}_2(q\,\square\, s) < (1-2^{-t})\cdot|\mathcal{L}(s)|$. Тогда можно построить НЧ $\overline{p}$ и $\overline{q}$ и [1]-КДЧ v, для которых выполнено $\hat{S}_0(\overline{q})\,\&$
$\forall X(X\in \mathcal{Y}^{*}_{\overline{q}} \equiv X=v)\,\&\, v\in \mathcal{L}^{0}(s)\setminus \mathcal{Y}_{q}\,\&\,(\overline{S}(p,q)\supset \hat{S}(\overline{p},\overline{q}))$.

<u>Замечание 5</u>. Согласно леммам 2 и 3 и замечанию 4 для всяких НЧ p и q

а) если $\overline{S}(p,q)$, то множество $\mathcal{A}^{*}_{\alpha}\setminus \mathcal{Y}_{q}$ является псевдоплотным в $\mathcal{A}\setminus\mathcal{Y}_{q}$;

б) если $\hat{S}(p,q)$, то множество $(\mathcal{A}^{*}_{\alpha}\setminus\mathcal{Y}_{q})\cap D^{[1]}$ является плотным в $\mathcal{A}$.

<u>Замечание 6</u>. 1) Для всяких НЧ p_1, p_2, q_1 и q_2 легко построить НЧ p и q такие, что $\overline{S}_0(q_1)\,\&\,\overline{S}_0(q_2)\supset\overline{S}_0(q)\,\&$ $\mathcal{Y}_q=\mathcal{Y}_{q_1}\,\hat{\cup}\,\mathcal{Y}_{q_2}$ и $\overline{S}(p_1,q_1)\,\&\,\overline{S}(p_2,q_2)\supset\overline{S}(p,q)$.

2) Пусть f_0 и f_1 ОРФ и пусть ψ ОРФ и p, q_0 и q НЧ, для которых для всяких НЧ k и ℓ выполнено

$$\psi(k)=\tau^2(\pi_1^2(k),\pi_2^2(k)+1),\ \langle p\rangle(k)\simeq\sum_{t=k+1}^{\psi(k)}\langle f_0(\pi_1^2(k))\rangle(t),$$

$$!\langle q_0\rangle(k,\ell)\equiv\forall m(k+1\le m\le\psi(k)\supset\,!\langle f_1(\pi_1^2(k))\rangle(m,\ell)),$$

$$!\langle q_0\rangle(k,\ell)\supset\forall t(t\in\mathcal{D}_{\langle q_0\rangle(k,\ell)}\equiv\exists m(k+1\le m\le\psi(k)\,\&$$

$$\langle f_1(\pi_1^2(k))\rangle(m,\ell)\simeq t)),$$

$$\langle q\rangle(k,\ell)\simeq un_1(\langle q_0\rangle(k,\ell)).$$

Тогда $\forall m\,\hat{S}_0(f_1(m))\supset\hat{S}_0(q)\,\&\,\hat{\bigcup\limits_m}\mathcal{Y}_{f_1(m)}\subseteq\mathcal{Y}_q$ и $\forall m\,\hat{S}(f_0(m),f_1(m))\supset\hat{S}(p,q)$. Если область значений ОРФ f_1 не является бесконечной, то $\hat{\bigcup\limits_m}\mathcal{Y}_{f_1(m)}=\mathcal{Y}_q$.

Замечание 7. Наличие в предикатах S, $\hat{S}$ и $\bar{S}$ номера ОРФ, мажорирующей "число возможных ошибок", позволяет нам получить некоторое универсальное представление соответствующих объектов.

Существуют ОРФ $\hat{g}_0$, $\hat{g}_1$, σ_1, $\hat{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_1$ и [2]-ОРФ $\hat{\sigma}_0$ такие, что для всяких НЧ p, q, k и ℓ выполнено

$$\langle\hat{g}_0(q)\rangle(k,0)\simeq 0,\ \langle\hat{g}_0(q)\rangle(k,\ell+1)\simeq\langle q\rangle(k,\ell),$$

$$\hat{g}_1(p,q,k,\ell)\simeq\mu m(\langle\omega_0(p)\rangle(\ell)\leq k\vee\langle\omega_0(q)\rangle(\ell)\leq$$

$$\leq\tau^2(k,k+m)\vee\langle\omega_0(p)\rangle(\ell)>k\ \&\ \langle\omega_0(q)\rangle(\ell)>\tau^2(k,k+m)\ \&$$

$$\langle p\rangle(k)<\sum_{s=0}^{m} sg(|\langle q\rangle(k,s)-\langle q\rangle(k,s\dot{-}1)|)),$$

$$\langle\sigma_1(p,q)\rangle(k,\ell)\simeq\langle\hat{g}_0(q)\rangle(k,\hat{g}_1(p,q,k,\ell)),$$

$$\langle\hat{\sigma}_1(p,q)\rangle(k,\ell)\simeq\hat{b}(\langle\sigma_1(p,q)\rangle(k,\ell),k),$$

$$\langle\bar{\sigma}_1(p,q)\rangle(0,\ell)\simeq\langle\sigma_1(p,q)\rangle(0,\ell),$$

$$\langle\bar{\sigma}_1(p,q)\rangle(k+1,\ell)\simeq\bar{b}(\langle\sigma_1(p,q)\rangle(k+1,\ell),k+1),$$

$$\langle\hat{\sigma}_0(p)\rangle(k)\simeq\begin{cases}\langle p\rangle(k)+1 & \text{если } (\forall t)_{t\leq k}(!\langle p\rangle(t));\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть $\mathcal{K}$, ψ любая из пар S, σ_1 - $\hat{S}$, $\hat{\sigma}_1$ и $\bar{S}$, $\bar{\sigma}_1$. Тогда для всяких НЧ p и q выполнено

1) а) $\mathcal{K}(\hat{\sigma}_0(p),\psi(p,q))$,

б) если $\langle p\rangle$ ОРФ, то $\neg\neg\exists m(\mathcal{K}(p,m)\ \&$ $\forall k(\mathcal{L}im(s_1^1(m,k))=\mathcal{L}im(s_1^1(\psi(p,q),k)))$.

в) если $\neg\forall k\ell(!\langle p\rangle(k)\ \&\ !\langle q\rangle(k,\ell))$, то $\neg\neg\exists t\,\forall k(t\leq k\supset\mathcal{L}im(s_1^1(\sigma_1(p,q),k))=0)$

и, следовательно, $\mathcal{T}^*_{\hat{\sigma}_1(p,q)}=\mathcal{T}_{\hat{\sigma}_1(p,q)}=\emptyset$;

2) $S(p,q)\supset\forall k(\mathcal{L}im(s_1^1(q,k))=\mathcal{L}im(s_1^1(\sigma_1(p,q),k)))$,

$\hat{S}(p,q) \supset \mathcal{V}_q = \mathcal{V}_{\hat{\vartheta}_1(p,q)} \ \& \ \mathcal{V}^*_q = \mathcal{V}^*_{\hat{\vartheta}_1(p,q)}$, $\bar{S}(p,q) \supset \mathcal{V}_q = \mathcal{V}_{\hat{\vartheta}_1(p,q)}$.

Таким образом, $\mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{p,q} \mathcal{V}_{\hat{\vartheta}_1(p,q)}$, $\mathcal{A}^*_\alpha = \bigcup_{p,q} \mathcal{V}^*_{\hat{\vartheta}_1(p,q)}$

и для всякого НЧ p верно ${}^p\mathcal{A}_\alpha = \bigcup_q \mathcal{V}_{\hat{\vartheta}_1(p,q)}$.

Замечание 8. Согласно замечаниям 6 и 7 существуют НЧ u, ОРФ $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\vartheta}_1$ и [2]-ОРФ $\hat{\vartheta}_0$ такие, что

а) $\hat{S}_0(u) \ \& \ \mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_u$ и, следовательно, ввиду замечания 4 $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{A}^*_\alpha$ множества АДЧ [1]-меры нуль и, таким образом, для всякого НЧ m, $1 \leq m$, почти все $[m]$-КДЧ принадлежат множеству $\mathcal{A}_\beta$;

б) для всякого НЧ p такого, что $\langle p \rangle$ ОРФ, верно $\hat{S}(\hat{\lambda}_0(p), \hat{\lambda}_1(p)) \ \& \ \bigcup_q \mathcal{V}_{\hat{\vartheta}_1(p,q)} = {}^p\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_{\hat{\lambda}_1(p)}$ и, следовательно, ввиду замечания 5 $(\mathcal{A}^*_\alpha \setminus {}^p\mathcal{A}_\alpha) \cap D^{[1]}$ является плотным в $\mathcal{A}$;

в) $\forall k (\hat{S}(\hat{\vartheta}_0(k), \hat{\vartheta}_1(k)) \ \& \ {}^k\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_{\hat{\vartheta}_1(k)} \subseteq \mathcal{V}_{\hat{\vartheta}_1(k+1)}) \ \&$
$\mathcal{A}_\alpha = \bigcup_k \mathcal{V}_{\hat{\vartheta}_1(k)}$.

Лемма 4. Существуют НЧ p и q такие, что $\hat{S}(p,q) \ \&$ $\forall s \exists x^{[1]} (x^{[1]} \in (\mathcal{V}_q \setminus \mathcal{A}^*_\alpha) \cap \mathcal{L}^0(s))$.

Доказательство. На основании замечаний 3 и 7 можно построить ОРФ f такую, что $\mathcal{A}^*_\alpha = \bigcup_m \bigcap_n [W_{f(m,n)}]$ и
$\forall m (\forall n ([W_{f(m,n+1)}] \subseteq [W_{f(m,n)}]) \ \&$
$\& \ \forall k \neg\neg \exists n (\hat{\mu}_1(f(m,n)) \leq 2^{-k}))$.

Согласно части 2 замечания 6 мы можем ограничиться построением НЧ p_0 и q_0 и [1]-КДЧ v, для которых верно

(1) $$\hat{S}(p_0,q_0) \ \& \ v \in (\mathcal{V}_{q_0} \setminus \mathcal{A}^*_\alpha) \cap 0 \triangle 1 .$$

Пусть p_0 НЧ и g и h ОРФ такие, что для всяких НЧ k

и s выполнено $\langle p_0 \rangle (k) \simeq 2^{k}$, $\mathcal{L}(g(k,s)) \equiv$
$\equiv s.2^{-k} \triangle (s+1).2^{-k}$, $\forall \ell (\ell \in W_{h(k)} \equiv \ell = k)$.

Мы построим ОРФ $\psi(k,\ell)$ возвратной рекурсией по k.

а) Пусть $\forall \ell (\psi(0,\ell) \simeq 0)$.

б) Пусть k НЧ, $0 < k$, и пусть
$\forall t (0 \leq t < k \supset \forall \ell (\psi(t,\ell) \leq \psi(t,\ell+1) < 2^{t}))$.
Существуют возрастающая система НЧ $\{m_i\}_{i=0}^{r_0}$ и НЧ σ_0 и ε_0 такие, что $k = \sum_{i=0}^{r_0} 2^{m_i}$, $\sigma_0 = k - 2^{m_{r_0}}$, $W_{\varepsilon_0} = \bigcup_{i=0}^{r_0} W_{f(i,m_i)}$.

Для всякого НЧ ℓ мы определим

$$\psi(k,\ell) \simeq \mu s (\psi(\sigma_0,\ell).2^{-\sigma_0} \leq s.2^{-k} <$$
$$< (\psi(\sigma_0,\ell)+1).2^{-\sigma_0} \mathbin{\&} \mu_0(\varphi_0(\nu_2(\varepsilon_0, g(k,s)),\ell)) \leq$$
$$\leq \frac{1}{4}\cdot\sum_{i=0}^{r_0} 2^{-i-k} \vee (s+1).2^{-k} = (\psi(\sigma_0,\ell)+1).2^{-\sigma_0}).$$

Пусть q_0 НЧ такое, что $\forall k \ell (\langle q_0 \rangle (k,\ell) \simeq h(g(k,\psi(k,\ell))))$.
Тогда $\hat{S}(p_0,q_0)$.

Пусть $\overline{\varphi}_1$ и $\overline{\varphi}_2$ [1]-ОРФ и v [1]-КДЧ такие, что
$\overline{\varphi}_1(0) \simeq \mu m (\hat{\mu}_1(f(0,m)) \leq \frac{1}{4})$ и для всякого НЧ t выполнено
$\overline{\varphi}_2(t) \simeq \sum_{i=0}^{t} 2^{\overline{\varphi}_1(i)}$,
$\overline{\varphi}_1(t+1) \simeq \mu m (\overline{\varphi}_1(t) < m \mathbin{\&} \hat{\mu}_1(f(t+1,m)) \leq \frac{1}{4}\cdot 2^{-t-1-\overline{\varphi}_2(t)})$
и $v \in \mathcal{L}(g(\overline{\varphi}_2(t), \lim_{\ell\to\infty} \psi(\overline{\varphi}_2(t),\ell)))$.

Тогда верно (1).

Литература

[1] ОДЖЕРС Х.: Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Москва 1972.

[2] МАРТИН-ЛЕФ П.: Очерки по конструктивной математике, Москва 1975.

[3] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae - Math. et Physica 19(1978), 15-60.

[4] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 463-492.

[5] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[6] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[7] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 111-126.

[8] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы К.М. Гарга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 21(1980), 457-472.

[9] EPSTEIN R.L.: Degrees of Unsolvability: Structure and Theory, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1979.

Matematicko-fyzikální fakulta, Universita Karlova, Malostranské nám. 25, Praha 1, Czechoslovakia

(Oblatum 8.3. 1982)