COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20, 4 (1979)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНТЕГРАЛА РИМАНА-СТИЛТЬЕСА В ТЕОРИИ КОНСТРУКТИВНОГО ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА И ЕГО ОВОБЩЕНИЙ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH)

Содержание: Заметка посвящена конструктивной теории интеграла. В ней показано, что конструктивные интегралы (Лебега, Данжуа и Перрона) от измеримых объектов некоторого специального типа представимы в виде интеграла Римана-Стилтьеса. На основании этого доказан конструктивный аналог второй теоремы о среднем значении.

Ключевые слова: Конструктивная функция, интеграл Римана-Стилтьеса, теорема о среднем значении.

Classification: Primary 02E99, 26A42
Secondary 26A39

В следующем мы пользуемся без дальнейших ссылок обозначениями и определениями из [3],[6],[7] и [9] (в частности, переменными, перечисленными в [9]), определениями $\mathcal{J}$-интеграла [6], интегралов Данжуа и L-интегрируемости [8].

Вуквы ξ и η - с индексами или без них - служат переменными для псевдочисел (ПЧ). Мы заметим, что для всякого КДЧ существует равное ему ПЧ и для любого ПЧ можно построить равное ему АДЧ. Понятие "почти всюду" для ПЧ введено в [5].

Мы напомним, что 1) для любых функции $\mathcal{F}$ и слов P и Q, являющихся или КДЧ или ПЧ,

$D_{\text{кл}}(Q,\mathcal{F},P)$ значит: Q является значением псевдопроизводной функции $\mathcal{F}$ в P [10],

$\underline{D}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{F}, P)$ (соотв. $\overline{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{F}, P)$) значит: $-\infty$ (соотв. $+\infty$) является значением нижней (соотв. верхней) псевдопроизводной функции $\mathcal{F}$ в P [10];

2) Д обозначает почти равномерную дифференцируемость (см. [4] и [6] или [10], где вместо Д употребляется $Д^{[0]}$).

Определения. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\{G_n\}_n$ последовательность ступенчатых остовов,

$$\forall n (G_n \rightleftharpoons a_0^n \gamma a_1^n \ldots \gamma a_{m_n}^n \delta y_1^n \gamma y_2^n \ldots \gamma y_{m_n}^n),$$

${}^0y$ и ${}^1y$ КДЧ, ξ_0 и η_0 ПЧ, пусть $\Theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$. Тогда мы

1) скажем, что Θ объект типа $\mathcal{Y}_0$, если Θ объект типа $\mathcal{Y}$ слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ и выполнено $\{G_n\}_n \in L_1 \,\&\, \mathrm{Red}(\{G_n\}_n)$ (ср. замечание 4 из [9]);

2) определим $P(\eta_0, \{G_n\}_n, \xi_0) \rightleftharpoons (0 < \xi_0 < 1 \,\&\, \neg \exists n i (1 \le i \le m_n \,\&\, \xi_0 = a_i^n) \,\&\, \forall p \exists q \forall n i (1 \le i \le m_n \,\&\, a_{i-1}^n < \xi_0 < a_i^n \,\&\, q \le n \supset |y_i^n - \eta_0| < 2^{-p}))$, $\mathrm{Val}(\eta_0, \Theta, \xi_0) \rightleftharpoons \neg\neg(\xi_0 = 0 \,\&\, \eta_0 = {}^0y \vee P(\eta_0, \{G_n\}_n, \xi_0) \vee \xi_0 = 1 \,\&\, \eta_0 = {}^1y)$, $\mathrm{Pseudocont}(\Theta, \xi_0) \rightleftharpoons \exists \eta (\mathrm{Val}(\eta, \Theta, \xi_0) \,\&\, \forall p \neg\neg \exists q \forall \xi_1 \eta_1 (|\xi_1 - \xi_0| < 2^{-q} \,\&\, \mathrm{Val}(\eta_1, \Theta, \xi_1) \supset |\eta_1 - \eta| < 2^{-p}))$;

3) будем писать $\mathrm{der}^{[1]}(\mathcal{F}, \{G_n\}_n)$, если для почти всех ПЧ ξ из $0 \triangle 1$ выполнено $\exists \eta (P(\eta, \{G_n\}_n, \xi) \,\&\, D_{\text{кл}}(\eta, \mathcal{F}, \xi))$.

<u>Замечание 1</u>. Согласно замечанию 4 из [9], теореме 2.2 из [10] и лемме 1 из [3] для любого объекта Θ типа $\mathcal{Y}_0$

а) для почти всех КДЧ x (соотв. ПЧ ξ) из $0 \triangle 1$ верно $\exists y \,\mathrm{Val}(y, \Theta, x)$ (соотв. $\exists \eta \,\mathrm{Val}(\eta, \Theta, \xi)$),

б) существует последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ – $\{v_s\}_s$ такая, что для всяких слов P и Q , являющихся или КДЧ или

ПЧ, выполнено $P \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg\, \exists b\, (P = v_b) \,\&\, Val\,(Q, \theta, P) \supset$ $Pseudocont\,(\theta, P)$.

Замечание 2. Чтобы избежать излишней громоздкости, мы будем пользоваться следующими обозначениями. Для данного объекта θ типа $\mathcal{G}_0$ и любых сегмента H, КДЧ $\varkappa$ и ПЧ ξ таких, что $H \subseteq 0 \vartriangle 1 \,\&\, \exists y\, Val\,(y, \theta, \varkappa) \,\&\, \exists \eta\, Val\,(\eta, \theta, \xi)$, мы обозначим посредством $M_{\theta,H}$, $W_{\theta,H}$ и $\theta_\varkappa$ КДЧ и посредством θ_ξ ПЧ, которые фиксированы в данном контексте и удовлетворяют условиям $\forall v w\, (v \in H \,\&\, Val\,(w, \theta, v) \supset |w| \leq M_{\theta,H}) \,\&\, \forall x_1 x_2 (\partial_\ell(H) \leq$ $\leq x_1 < x_2 \leq \partial_m(H) \,\&\, \forall i\, (1 \leq i \leq 2 \supset \exists y\, Val\,(y, \theta, x_i)) \supset$ $\supset BVS\,(W_{\theta,H}, \theta, x_1 \vartriangle x_2)) \,\&\, Val\,(\theta_\varkappa, \theta, \varkappa) \,\&$ $\&\, Val\,(\theta_\xi, \theta, \xi)$.

Замечание 3. Пусть θ, $\theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция.

1) Согласно лемме 4 и замечанию 3 из [9] для любого θ-допустимого сегмента H существуют КДЧ w и v такие, что $RS\,(w, \mathcal{F}, \theta, H) \,\&\, RS\,(v, \theta, \mathcal{F}, H)$, причем выполнено

$$|w| \leq \langle S, |\mathcal{F}| \rangle_{\llcorner H \lrcorner} \cdot W_{\theta,H},$$

$$\forall x\, (BVS\,(x, \mathcal{F}, H) \supset |v| \leq M_{\theta,H} \cdot x) \quad \text{и}$$

$$v = \mathcal{F}(\partial_m(H)) \cdot \theta_{\partial_m(H)} - \mathcal{F}(\partial_\ell(H)) \cdot \theta_{\partial_\ell(H)} - w$$

и, следовательно, $|v| \leq |\Delta(\mathcal{F}, H)| \cdot M_{\theta,H} + \langle \omega, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner H \lrcorner} \cdot W_{\theta,H}$.

2) Ввиду 1) существует равномерно непрерывная функция $\mathcal{SJ}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle$ такая, что $\mathcal{SJ}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle(0) = 0$ и для любого θ-допустимого сегмента H верно

$$RS\,(\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, H), \theta, \mathcal{F}, H).$$

Из 1) далее следует, что для любого сегмента L, $L \subseteq$ $\subseteq 0 \vartriangle 1$, выполнено

$|\Delta(\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,L)| \le |\Delta(\mathcal{F},L)|\cdot M_{\theta,L} + \langle\omega,\mathcal{F}\rangle_{\llcorner}L_{\lrcorner}\cdot W_{\theta,L}$

и $\langle\omega,\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle\rangle_{\llcorner}L_{\lrcorner} \le \langle\omega,\mathcal{F}\rangle_{\llcorner}L_{\lrcorner}\cdot(M_{\theta,L}+W_{\theta,L})$.

3) Ввиду 2) для любого ПЧ ξ верно

$\neg(\underline{D}_{кл}(-\infty,\mathcal{F},\xi)\vee\overline{D}_{кл}(+\infty,\mathcal{F},\xi))\supset$
$\neg(\underline{D}_{кл}(-\infty,\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\xi)\vee\overline{D}_{кл}(+\infty,\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\xi))$
и $D_{кл}(0,\mathcal{F},\xi)\supset D_{кл}(0,\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\xi)$.

4) Если $[\{F_n\}_n, {}^0\bar{y}, {}^1\bar{y}]$ объект типа $\mathcal{G}_0$ такой, что $\{F_n\}_n=\{G_n\}_n$, то согласно определению значения интеграла Римана-Стилтьеса выполнено $\mathcal{SI}\langle[\{F_n\}_n, {}^0\bar{y}, {}^1\bar{y}],\mathcal{F}\rangle = \mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle$.

На основании замечания 3 мы получаем следующее утверждение.

__Лемма 1__. Пусть θ объект типа $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ равномерно непрерывные функции и v и z КДЧ. Тогда

1) $\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_1\rangle = \mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle + \mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}_1\rangle$,

$\mathcal{SI}\langle\theta,v\cdot\mathcal{F}_0\rangle = v\cdot\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle$,

$|\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle| \le 2\cdot\langle S,|\mathcal{F}_0|\rangle_{\llcorner}0\triangle1_{\lrcorner}\cdot(M_{\theta,0\triangle1}+W_{\theta,0\triangle1})$,

$BVS(z,\mathcal{F}_0,0\triangle1)\supset BVS(z\cdot M_{\theta,0\triangle1},\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle,0\triangle1)$,

$\mathcal{a}(\mathcal{F}_0)\supset\mathcal{a}(\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle)$ и $\mathcal{a}_{кл}(\mathcal{F}_0)\supset\mathcal{a}_{кл}(\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle)$

(определения $\mathcal{a}$ и $\mathcal{a}_{кл}$ приведены в [7]);

2) для любой последовательности сегментов $\{H_n\}_n$, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_n\}_n)$ (см. [6]), выполнено: если ряд $\sum_n\langle\omega,\mathcal{F}_0\rangle_{\llcorner}H_{n\lrcorner}$ сходится (соотв. псевдосходится), то ряд

$\sum_n\langle\omega,\mathcal{SI}\langle\theta,\mathcal{F}_0\rangle\rangle_{\llcorner}H_{n\lrcorner}$ сходится (соотв. псевдосходится).

__Лемма 2__. Пусть θ, $\theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция и для любого i,

$0 \le i \le 1$, P_i слово, являющееся или КДЧ или ПЧ. Пусть $P_0 \in 0 \triangle 1 \,\&\, \mathcal{D}_{\text{кл}}(P_1, \mathcal{F}, P_0) \,\&\, \mathit{Pseudocont}(\theta, P_0)$.

Тогда $\mathcal{D}_{\text{кл}}(P_1 \cdot \theta_{P_0}, \mathcal{S}\mathcal{I}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle, P_0)$.

Доказательство. Мы напомним, что согласно [7] h_1 функция такая, что $\forall x\, (h_1(x) = \max(\min(x, 1), 0))$.

Пусть k НЧ. Тогда не может не существовать НЧ ℓ такое, что

$$\forall xy\, (x \le P_0 \le y \,\&\, 0 < y - x < 2^{-\ell} \supset |\Delta(\mathcal{F}, x \triangle y) - P_1 \cdot (y - x)| \le$$

(1) $$2^{-k-2} \cdot |y - x|) \,\&\, \forall xy\, (|x - P_0| < 2^{-\ell} \,\&\, \mathit{Val}(y, \theta, x) \supset$$

$$|y - \theta_{P_0}| < 2^{-k-1}).$$

Пусть ℓ НЧ, для которого выполнено (1). Пусть $v \triangle w$ θ-допустимый сегмент и x_0 и x_1 КДЧ такие, что
$v \le P_0 \le w \,\&\, |v \triangle w| < 2^{-\ell} \,\&\, |x_0 - \theta_{P_0}| < 2^{-k-1} \,\&\, |x_1 - P_1| < 2^{-k-1} \,\&$
$|x_1 \cdot x_0 - P_1 \cdot \theta_{P_0}| < 2^{-k}$
и пусть $\bar{\theta} \rightleftharpoons [\{G_m\}_m - \{0 \gamma 1 \delta x_0\}_m, {}^0y - x_0, {}^1y - x_0]$. Тогда $\bar{\theta}$ объект типа φ_0 и

(2) $$M_{\bar{\theta}, v \triangle w} < 2^{-k}.$$

Согласно лемме 1 выполнено $\Delta(\mathcal{S}\mathcal{I}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle, v \triangle w) - P_1 \cdot \theta_{P_0} \cdot (w - v) =$
$\Delta(\mathcal{S}\mathcal{I}\langle \theta, \mathcal{F} - x_1 \cdot h_1 \rangle, v \triangle w) + x_1 \cdot \Delta(\mathcal{S}\mathcal{I}\langle \bar{\theta}, h_1 \rangle, v \triangle w) +$
$(x_1 \cdot x_0 - P_1 \cdot \theta_{P_0}) \cdot (w - v)$
и, следовательно, ввиду (1),(2) и замечания 3 верно

$\langle \omega, \mathcal{F} - x_1 \cdot h_1 \rangle_{\llcorner v \triangle w \lrcorner} \le 2^{-k} \cdot |w - v|$ и

$|\Delta(\mathcal{S}\mathcal{I}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle, v \triangle w) - P_1 \cdot \theta_{P_0} \cdot (w - v)| \le$

$2^{-k} \cdot (M_{\theta, 0 \triangle 1} + W_{\theta, 0 \triangle 1} + |P_1| + 2^{-k-1} + 1) \cdot |w - v|$.

Лемма 3. Пусть θ объект типа φ_0, $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов и φ равномерно непрерывная функция такие, что $\overline{\mathcal{K}}(\{H_m\}_m) \,\&\, \forall x\, (|\varphi(x)| > 0 \supset \exists m\, (x \in (H_m)^{\circ}))$.

Тогда $AC([\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle, \{H_n\}_n])$ и для почти всех КДЧ x из $0\triangle 1$ выполнено

$$\neg\exists n(x\in H_n)\supset D(0,[\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle,\{H_n\}_n],x).$$

Доказательство. Мы пользуемся обозначениями из [6]. Ввиду наших предположений выполнено $\langle\omega,\varphi\rangle_{\llcorner}H_{n\lrcorner}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $\forall n(\varphi(\partial_\lambda(H_n))=\varphi(\partial_n(H_n))=0)$ и ряд $\sum_n\varphi^{[H_n]}$ равномерно сходится к φ. Следовательно, согласно замечанию 3 и лемме 1 ряд $\sum_n|\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle,H_n)|$ сходится и ряд $\sum_p\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi^{[H_p]}\rangle$ равномерно сходится к $\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle$. Итак,

$$[\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle,\{H_n\}_n]=\sum_{p=1}^{\infty}[\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi^{[H_p]}\rangle,\{H_n\}_n]$$

и для всякого НЧ p верно $AC([\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi^{[H_p]}\rangle,\{H_n\}_n])$ и $BVS(|\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi\rangle,H_p)|,[\mathcal{SJ}\langle\theta,\varphi^{[H_p]}\rangle,\{H_n\}_n],0\triangle 1)$.

Для завершения доказательства достаточно применить теорему 8 из [8], теоремы 1 и 2 из [3] и теорему 2.5 из [10].

Лемма 4. Пусть θ, $\theta\rightleftharpoons[\{G_n\}_n,{}^0y,{}^1y]$, объект типа $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывная на $0\triangle 1$ функция. Тогда

а) функция $\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle$ абсолютно непрерывна на $0\triangle 1$,

б) существуют $\{F_n\}_n\in L_1$ и $\{\bar F_n\}_n\in L_1$ такие, что

(3) $\forall x(0\le x\le 1\supset\mathcal{F}(x)-\mathcal{F}(0)=\int_0^x\{F_n\}_n)$,

(4) $\forall x(0\le x\le 1\supset\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle(x)=\int_0^x\{\bar F_n\}_n)$,

$\{\bar F_n\}_n=\{F_n\}_n\cdot\{G_n\}_n\ \&\ \{F_n\}_n\cdot\{G_n\}_n\in S\ \&$

$Д(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle,\{F_n\}_n\cdot\{G_n\}_n)$.

Доказательство. В следующем мы пользуемся обозначениями из [3].

1) Ввиду лемм 1 и 4 из [9] и определения предиката Val видно, что для любой равномерно непрерывной функции $\mathcal{G}$ по-

следовательность $\{\mathcal{SI}\langle[\{G_p\}_m, {}^0y, {}^1y], \mathcal{G}\rangle\}_p$ сходится к функции $\mathcal{SI}\langle\Theta, \mathcal{G}\rangle$.

2) Пусть F ступенчатый остов. Согласно определению выражения $F\cdot\{G_m\}_m$ и лемме 1 из [3] $[F\cdot\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$ объект типа $\mathcal{Y}_0$. Непосредственно можно убедиться в том, что для любого НЧ p выполнено $\mathcal{SI}\langle[\{G_p\}_m, {}^0y, {}^1y], \tilde{\mathcal{C}}_F\rangle = \tilde{\mathcal{C}}_{F\delta G_p}$.

Ввиду этого, 1) и теоремы 1 из [3]

$$\forall x(0 \le x \le 1 \supset \mathcal{SI}\langle\Theta, \tilde{\mathcal{C}}_F\rangle(x) = \int_0^x F\cdot\{G_m\}_m) \,\&\, AC(\mathcal{SI}\langle\Theta, \tilde{\mathcal{C}}_F\rangle).$$

Мы заметим, что $BVS({}^0\!\int_0^1 |F|_0, \tilde{\mathcal{C}}_F, 0\Delta 1)$ [3].

3) Согласно теореме 2 из [3] существует $\{F_n\}_n \in L_1$ такое, что (3). Следовательно, $\forall n k\, BVS(2^{-n+1}, \tilde{\mathcal{C}}_{F_n} - \tilde{\mathcal{C}}_{F_{n+k}}, 0\Delta 1)$ и мы на основании теоремы 1 из [3] и леммы 1 получаем $\forall n\, BVS(2^{-n+1}, \tilde{\mathcal{C}}_{F_n} - \mathcal{F}, 0\Delta 1)$ и $\forall n\, BVS(2^{-n+1}\cdot M_{\Theta,0\Delta 1}$, $\mathcal{SI}\langle\Theta, \tilde{\mathcal{C}}_{F_n}\rangle - \mathcal{SI}\langle\Theta, \mathcal{F}\rangle, 0\Delta 1)$.

Согласно 2), теореме 8 из [8] и следствию теоремы 2 из [4] выполнено $AC(\mathcal{SI}\langle\Theta, \mathcal{F}\rangle)$ и существует $\{\bar{F}_n\}_n \in L_1$ такое, что (4) и $Д(\mathcal{SI}\langle\Theta, \mathcal{F}\rangle, \{\bar{F}_n\}_n)$. Для завершения доказательства достаточно использовать лемму 1 из [3], замечание 1 из [4], замечание 1 и лемму 2.

<u>Лемма 5.</u> Пусть Θ, $\Theta \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{Y}_0$, $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция и $\{F_n\}_n \in S$. Тогда

а) $\{F_n\}_n \cdot \{G_m\}_m \in S$,

$Д(\mathcal{F}, \{F_n\}_n) \supset Д(\mathcal{SI}\langle\Theta, \mathcal{F}\rangle, \{F_n\}_n \cdot \{G_m\}_m)$,

(5) $Д^{ap}(\mathcal{F}, \{F_m\}_m) \supset Д^{ap}(\mathcal{SI}\langle\Theta, \mathcal{F}\rangle, \{F_n\}_n \cdot \{G_m\}_m)$,

(6) $de\varkappa^{[1]}(\mathcal{F}, \{F_n\}_n) \supset de\varkappa^{[1]}(\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n)$,

б) для любой последовательности сегментов $\{H_n\}_n$, $\mathfrak{K}(\{H_n\}_n)$, выполнено

(7) $AC([\mathcal{F}, \{H_n\}_n]) \supset AC([\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{H_n\}_n])$,

(8) $Д([\mathcal{F}, \{H_n\}_n]) \supset Д([\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{H_n\}_n])$,

(9) $a_{кл}([\mathcal{F}, \{H_n\}_n]) \supset a_{кл}([\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{H_n\}_n])$.

Доказательство. Согласно лемме 1 из [3] верно $\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n \in S$.

1) Пусть $\{H_n\}_n$ последовательность сегментов, $\mathfrak{K}(\{H_n\}_n)$. Тогда согласно леммам 1 и 3 имеет место $AC([\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{H_n\}_n] - [\mathcal{SI}\langle\theta, [\mathcal{F}, \{H_n\}_n]\rangle, \{H_n\}_n])$ и для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ выполнено $\neg\exists n(x \in H_n) \supset$ $D(0, [\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{H_n\}_n] - [\mathcal{SI}\langle\theta, [\mathcal{F}, \{H_n\}_n]\rangle, \{H_n\}_n], x)$.

Следовательно, мы ввиду замечания 1, леммы 1 и теоремы 6 из [7] и лемм 1 и 4 получаем (7) и (9).

2) Пусть $Д(\mathcal{F}, \{F_n\}_n)$. Тогда ввиду теоремы 4 из [6], лемм 1 и 4 и 1) выполнено $Д(\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle)$ и, следовательно, существует $\{\overline{F}_n\}_n \in S$ такое, что $Д(\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{\overline{F}_n\}_n)$ ([6], стр. 499). Согласно замечанию 1 из [4], замечанию 1 и лемме 2 для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ выполнено $\exists y v z(P(y, \{\overline{F}_n\}_n, x) \,\&\, D(y, \mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, x) \,\&$ $\&\, P(v, \{F_n\}_n, x) \,\&\, D(v, \mathcal{F}, x) \,\&\, P(z, \{G_n\}_n, x) \,\&\, y = v \cdot z)$.

Но тогда $\{\overline{F}_n\}_n = \{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n$ и, таким образом, мы получаем $Д(\mathcal{SI}\langle\theta, \mathcal{F}\rangle, \{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n)$.

3) Ввиду 1) и теорем 1 и 2 из [6] мы на основании 2) получаем (8) и доказательство б) завершено.

4) Из б), 1) и леммы 2 следует (5) (см. определение $Д^{ap}$ в [7]), а (6) является непосредственным следствием замечания 1 и леммы 2.

<u>Замечание 4</u>. Пусть θ , $\theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{Y}_0$ и g возрастающая на $0 \triangle 1$ функция, $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1$. Тогда g равномерно непрерывна и согласно замечанию 1 существует последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1 - \{v_s\}_s$, для которой верно $\forall x\, (x \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg \exists s (x = v_s) \,\&\, \exists y\, Val(y, \theta, x) \supset \supset Pseudocont(\theta, x))$. Мы построим плотную в $0 \triangle 1$ последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1 - \{\bar{x}_k\}_k$ и последовательность КДЧ $\{\bar{y}_k\}_k$ такие, что

$$\forall k l\, (\bar{x}_k = \bar{x}_l \supset k = l) \,\&\, \forall k\, (\neg \exists s (\bar{x}_k = v_s) \,\&\, \neg \exists a\, (g(a) = = \bar{x}_k) \,\&\, Val(\bar{y}_k, \theta, \bar{x}_k)) .$$

Существуют НЧ $\varkappa$ и последовательности НЧ $\{m_n\}_n$, систем НЧ $\{\{p_i^n\}_{i=1}^{2^{m_n}}\}_n$ и ступенчатых остовов $\{F_n\}_n$ такие, что $BVS(2^{\varkappa}, \theta, 0 \triangle 1) \,\&\, \forall n\, (m_n = 2n + 3 + 2\varkappa \,\&\, \forall i\, (1 \leq i \leq 2^{m_n} \supset (i-1) \cdot 2^{-m_n} < g^{-1}(\bar{x}_{p_i^n}) < i \cdot 2^{-m_n} \,\&\, \exists j\, (1 \leq j \leq 2^{m_{n+1}} \,\&\, p_i^n = p_j^{n+1}))) \,\&\, \forall k\, \exists n i\, (1 \leq i \leq 2^{m_n} \,\&\, k = p_i^n) \,\&\, \forall n\, (F_n \equiv 0 \curlyvee 1 \cdot 2^{-m_n} \curlyvee 2 \cdot 2^{-m_n} \ldots \curlyvee 1 \delta \bar{y}_{p_1^n} \curlyvee \bar{y}_{p_2^n} \ldots \curlyvee \bar{y}_{p^n_{2^{m_n}}})$.

Тогда $\{F_n\}_n \in L_1 \,\&\, Red(\{F_n\}_n) \,\&\, BVS(2^{\varkappa}, [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y], 0 \triangle 1) \,\&\, \forall k\, Val(\bar{y}_k, [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y], g^{-1}(\bar{x}_k))$ и, следовательно, $\bar{\theta}$, $\bar{\theta} \rightleftharpoons [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{Y}_0$ и для любой равномерно непрерывной функции $\mathcal{F}$ выполнено $\mathcal{S}\mathcal{I}\langle \theta, \mathcal{F} \rangle * g = \mathcal{S}\mathcal{I}\langle \bar{\theta}, \mathcal{F} * g \rangle$.

Замечание 5. В работе [11] введены конструктивный интеграл Перрона ($\mathcal{P}$ -интеграл) и $w\mathcal{P}$ -интеграл. Нам понадобится следующее обозначение.

Для любых функции $\mathcal{F}$ и возрастающей на $0 \triangle 1$ функции ψ - $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \psi)$ обозначает: $\psi(0) = 0 \,\&\, \psi(1) = 1 \,\&$
$\forall \xi (\neg\neg(\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee \overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \xi)) \supset D_{кл}(0, \mathcal{F} * \psi^{-1}, \sigma_\psi(\xi)))$
(σ_ψ псевдооператор такой, что $\forall x \xi (x = \xi \supset \psi(x) = \sigma_\psi(\xi))$ - см. [7]).

В [11] доказано следующее утверждение.

Пусть $\{F_m\}_m \in S$. Функция $\mathcal{F}$ является неопределенным

а) $\mathcal{P}$ -интегралом от $\{F_m\}_m$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна, выполнено Д$(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$ и существует возрастающая на $0 \triangle 1$ функция ψ такая, что Д$(\psi) \,\&\, \mathcal{W}(\mathcal{F}, \psi)$;

б) $w\mathcal{P}$ -интегралом от $\{F_m\}_m$ на $0 \triangle 1$ в том и только том случае, если выполнено $der^{[1]}(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$ и существует возрастающая на $0 \triangle 1$ функция ψ такая, что $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \psi)$.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, ψ возрастающая на $0 \triangle 1$ функция и θ объект типа $\mathcal{Y}_0$. Тогда выполнено $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \psi) \supset \mathcal{W}(\mathcal{Y}\mathcal{I} \langle \theta, \mathcal{F} \rangle, \psi)$.

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием замечания 4 и части 3 замечания 3.

Теорема. Пусть для K выполнено
$K \rightleftharpoons L \vee K \rightleftharpoons \mathcal{D}_* \vee K \rightleftharpoons \mathcal{D}' \vee K \rightleftharpoons \mathcal{D} \vee K \rightleftharpoons \mathcal{T} \vee K \rightleftharpoons \mathcal{P}$.
Пусть $\{F_m\}_m \in S$, $\mathcal{F}$ функция и θ , $\theta \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{Y}_0$. Тогда

1) если $\mathcal{F}$ неопределенный K -интеграл от $\{F_m\}_m$ на

$0 \Delta 1$, то $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и $\mathcal{SI}\langle \theta, \mathcal{F}\rangle$ неопределенный K-интеграл от $\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n$ на $0 \Delta 1$;

2) если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и является неопределенным $w\mathcal{P}$-интегралом от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$, то $\mathcal{SI}\langle \theta, \mathcal{F}\rangle$ неопределенный $w\mathcal{P}$-интеграл от $\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n$ на $0 \Delta 1$.

Доказательство. Согласно определениям, приведенным в [6] - [8], и замечанию 5 утверждение является непосредственным следствием лемм 1, 4 - 6 и замечания 4.

Теорема является конструктивным аналогом теоремы 2.5 из [1], стр. 246. Приведенное там доказательство нельзя в конструктивной математике использовать: существует возрастающая на $0 \Delta 1$ (конструктивная) функция, которая удовлетворяет условию Липшица и вместе с тем не является неопределенным интегралом ни одного из перечисленных в теореме типов; как показано в [11], конструктивный узкий интеграл Данжуа ($\mathcal{D}_*$ - интеграл) не совпадает с конструктивным интегралом Перрона ($\mathcal{P}$-интегралом).

<u>Пример</u>. Существуют $\{F_n\}_n \in S$ и $\{G_n\}_n \in L_1$ и интегрируемые по Лебегу функции (см. [10], стр. 93) $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ слабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ такие, что

1) $\mathcal{F}$ является неопределенным $w\mathcal{P}$-интегралом от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$.

2) θ , где $\theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n , \mathcal{G}(0), \mathcal{G}(1)]$, объект типа $\mathcal{Y}_0$ и $\forall xy\,(Val\,(y, \theta, x) \supset y = \mathcal{G}(x))$,

3) θ (т.е. $\mathcal{G}$) не является RS-интегрируемым по $\mathcal{F}$ на $0 \Delta 1$ и

4) $\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n$ не является $w\mathcal{P}$-интегрируемым на $0 \Delta 1$.

Следует напомнить, что любая функция слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ является псевдоравномерно непрерывной.

С помощью теоремы о среднем значении функции [2], определения значения интеграла Римана-Стилтьеса и замечания 3 легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 7</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, θ неубывающий (см. [9]) объект типа φ_0 и H θ-допустимый сегмент. Тогда не может не существовать КДЧ x из H такое, что $RS(\mathcal{F}(x)\cdot(\theta_{Э_m(H)} - \theta_{Э_л(H)}), \mathcal{F}, \theta, H)$ и, следовательно, $\Delta(\mathcal{SJ}\langle\theta,\mathcal{F}\rangle, H) = \theta_{Э_л(H)}\cdot(\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(Э_л(H))) + \theta_{Э_m(H)}\cdot(\mathcal{F}(Э_m(H)) - \mathcal{F}(x))$.

Непосредственным следствием теоремы и леммы 7 является вторая теорема о среднем значении для любого из перечисленных в теореме интегралов. (Ср. теорему 3 и пример из [12].)

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ЦЕЙТИН Г.С.: Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова, том 67(1962), 362-384.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 687-711.

[5] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Commment. Math. Univ. Carolinae 16(1975),583-599.

[6] ДЕМУТ О.: Об одном обобщении конструктивного интеграла Лебега, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 499-514.

[7] ДЕМУТ О.: О конструктивных аналогах обобщенно абсолютно непрерывных функций и функций обобщенной ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 19 (1978), 471-487.

[8] ДЕМУТ О.: О конструктивных интегралах Данжуа, Comment. Math. Univ. Carolinae 20(1979), 213-227.

[9] ДЕМУТ О., ПОЛИВКА Й.: О представимости линейных функционалов в пространстве шифров равномерно непрерывных на сегменте $0 \Delta 1$ конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 20(1979), 765-780.

[10] ДЕМУТ О.: Некоторые вопросы теории конструктивных функций действительной переменной, Acta Univ. Carolinae, Mathem. et Physica 19(1978), 61-96.

[11] ДЕМУТ О.: О конструктивном интеграле Перрона (в печати).

[12] ДЕМУТ О.: Теоремы о среднем значении для конструктивного интеграла Лебега, Comment. Math. Univ. Carolinae 11 (1970), 249-269.

Matematicko-fyzikální fakulta

Universita Karlova

Malostranské nám. 25, Praha 1

Československo

(Oblatum 5.5. 1979)