COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20, 4 (1979)

О ПРЕДСТАВИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ШИФРОВ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ НА СЕГМЕНТЕ $0 \Delta 1$ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Й. ПОЛИВКА (J. POLÍVKA)

Содержание: В заметке вводятся конструктивные объекты типа $\mathcal{F}$, обладающие почти всюду на сегменте $0 \Delta 1$ значением. Доказано, что любой линейный функционал в пространстве шифров равномерно непрерывных на $0 \Delta 1$ конструктивных функций представим в виде интеграла Римана-Стилтьеса по объекту типа $\mathcal{F}$ слабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$. Приведено необходимое и достаточное условие нормируемости таких линейных функционалов.

Ключевые слова: Интеграл Римана-Стилтьеса, равномерно непрерывная конструктивная функция, линейный функционал.

Classification: Primary 02E99, 26A42
Secondary 46E15, 26A45

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [5]. Буквы k, ℓ, m, n, p, q, s и t служат переменными для натуральных чисел (НЧ), i и j - переменными для целых чисел, a, b и c - переменными для рациональных чисел (РЧ) и буквы v, w, x, y и z - с индексами или без них - переменными для конструктивных действительных чисел (КДЧ). Множество всех КДЧ мы обозначаем посредством $\mathcal{D}$. Мы заметим, что любое КДЧ является арифметическим действительным числом (АДЧ) [7].

Сначала мы займемся конструктивным аналогом интеграла Римана-Стилтьеса. Соответствующие классические определения и результаты можно найти, например, в [1].

Мы напомним, что а) ступенчатыми остовами мы называем слова вида $a_0 \gamma a_1 \ldots \gamma a_m \delta y_1 \gamma y_2 \ldots \gamma y_m$, где m НЧ (т.е. положительное целое число), $\{a_i\}_{i=0}^{m}$ возрастающая система РЧ, $a_0 = 0 \,\&\, a_m = 1$, а $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ система КДЧ;

б) для любых последовательности ступенчатых остовов $\{G_m\}_m$, где

$$(1) \quad \forall m \, (G_m \rightleftharpoons a_0^m \gamma a_1^m \ldots \gamma a_{m_m}^m \delta y_1^m \gamma y_2^m \ldots \gamma y_{m_m}^m),$$

и КДЧ x и v мы посредством $P(v, \{G_m\}_m, x)$ обозначаем: существует последовательность НЧ $\{p_m\}_m$ такая, что

$$\forall m \, (p_m \leq m_m \,\&\, a_{p_m-1}^m < x < a_{p_m}^m) \,\&\, (y_{p_m}^m \xrightarrow[m\to\infty]{} v);$$

в) функциями мы называем всюду определенные конструктивные функции действительной переменной, которые постоянны на $\wedge x \, (x \leq 0)$ и на $\wedge x \, (1 \leq x)$;

г) если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, то $\langle S, \mathcal{F} \rangle$ алгорифм, применимый к всякому сегменту H и выдающий по нему КДЧ - супремум множества $\wedge y \, (\exists x \, (x \in H \,\&\, y = \mathcal{F}(x)))$.

Определения. 1) Объектами типа φ мы называем а) функции и б) выражения типа $[\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, где ${}^0y$ и ${}^1y$ КДЧ и $\{F_m\}_m$ последовательность ступенчатых остовов такая, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ (см. [5]) выполнено $\exists z \, P(z, \{F_m\}_m, x)$.

2) Пусть G функция, $[\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$ объект типа φ и x и z КДЧ. Тогда мы определим:

$$Val\,(z, G, x) \rightleftharpoons (0 \leq x \leq 1 \,\&\, z = G(x)),$$

$$Val(z,[\{F_n\}_n,{}^0y,{}^1y],x) \rightleftharpoons \neg\neg(x=0 \,\&\, z={}^0y \vee$$
$$\vee P(z,\{F_n\}_n,x) \vee x=1 \,\&\, z={}^1y).$$

Замечание 1. 1) Ввиду теоремы Г.С. Цейтина о непрерывности [4] для любой функции $\mathcal{F}$ можно построить объект типа φ - $[\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$ такой, что $\forall xz(Val(z,[\{F_n\}_n,{}^0y,{}^1y],x) \supset z=\mathcal{F}(x))$.

2) Равенство и операции для последовательностей ступенчатых остовов определены в [5]. Согласно лемме 1 и теореме 3 из [5] выполнено: если $\{F_n\}_n \in L_1$ (соотв. $\{F_n\}_n \in S$), а ${}^0y$ и ${}^1y$ КДЧ, то $[\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$ объект типа φ.

Замечание 2. Пусть $[\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$ объект типа φ. Тогда ввиду замечания 2 из [6] и теоремы Г.С. Цейтина [4] существуют плотная в $0 \triangle 1$ последовательность КДЧ из $0 \nabla 1$. $\{\bar{x}_k\}_k$ и последовательность КДЧ $\{\bar{y}_k\}_k$ такие, что $\forall k(P(\bar{y}_k,\{G_n\}_n,\bar{x}_k) \,\&\, \forall p \exists l m (\bar{x}_k - 2^{-p} < \bar{x}_l <$

$< \bar{x}_k < \bar{x}_m < \bar{x}_k + 2^{-p} \,\&\, |\bar{y}_l - \bar{y}_k| + |\bar{y}_m - \bar{y}_k| < 2^{-p}))$ и для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ выполнено $\exists y(P(y,\{G_n\}_n,x) \,\&$

$\& \forall p \exists l m (x-2^{-p} < \bar{x}_l < x < \bar{x}_m < x+2^{-p} \,\&\, |\bar{y}_l - y| + |\bar{y}_m - y| < 2^{-p}))$.

Определения. Пусть Θ_1 и Θ_2 объекты типа φ, H сегмент, а $\{x_i\}_{i=0}^{\lambda}$ система КДЧ. Тогда

1) мы скажем, что система $\{x_i\}_{i=0}^{\lambda}$ является

а) Θ_1-допустимой, если $\forall i(0 \le i \le \lambda \supset \exists v\, Val(v,\Theta_1,x_i))$;

б) (Θ_1, Θ_2, H)-пригодной, если существует НЧ τ

такое, что $\lambda = 2\tau$ & $Э_\lambda(H) = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_{2\tau} = Э_m(H)$, система $\{x_{2i}\}_{i=0}^{\tau}$ является Θ_2-допустимой, а $\{x_{2j-1}\}_{j=1}^{\tau}$ - Θ_1-допустимой;

2) сегмент H мы назовем Θ_1-допустимым, если система КДЧ $\{Э_\lambda(H), Э_m(H)\}$ Θ_1-допустима (и, следовательно, $H \subseteq 0 \vartriangle 1$);

3) если $\{y_i\}_{i=0}^{2\sigma}$ (Θ_1, Θ_2, H)-пригодная система КДЧ и w КДЧ, то мы посредством $\mathcal{Y}(w, \Theta_1, \Theta_2, \{y_i\}_{i=0}^{2\sigma})$ обозначим: существуют системы КДЧ $\{v_j\}_{j=0}^{\sigma}$ и $\{z_\ell\}_{\ell=1}^{\sigma}$ такие, что $\forall j\,(0 \le j \le \sigma \supset Val(v_j, \Theta_2, y_{2j}))$ & $\forall \ell\,(1 \le \ell \le \sigma \supset Val(z_\ell, \Theta_1, y_{2\ell-1}))$ & $w = \sum_{\ell=1}^{\sigma} z_\ell \cdot (v_\ell - v_{\ell-1})$;

4) мы скажем, что

а) КДЧ w является значением интеграла Римана-Стилтьеса от Θ_1 по Θ_2 на сегменте H, и будем писать $RS(w, \Theta_1, \Theta_2, H)$, если выполнено: H является Θ_1- и Θ_2-допустимым и существует последовательность НЧ $\{k_m\}_m$ такая, что для любых НЧ m, (Θ_1, Θ_2, H)-пригодной системы КДЧ $\{y_i\}_{i=0}^{2\sigma}$ и КДЧ z верно $\max_{1 \le j \le \sigma}(y_{2j} - y_{2j-2}) < 2^{-k_m}$ & $\mathcal{Y}(z, \Theta_1, \Theta_2, \{y_i\}_{i=0}^{2\sigma}) \supset |z - w| < 2^{-m}$;

б) Θ_1 является RS-интегрируемым по Θ_2 на H, если $\exists w\,(RS(w, \Theta_1, \Theta_2, H))$.

<u>Замечание 3</u>. Повторив классические рассуждения, приведенные, например, в [1], мы получаем следующие утверждения.

Пусть Θ_1 и Θ_2 объекты типа φ, H и L сегменты, $L \subseteq H \subseteq 0 \vartriangle 1$, $v_{0,1}$, $v_{0,2}$, $v_{1,1}$, $v_{1,2}$ и w КДЧ и P АДЧ такие, что $\forall j\,(1 \le j \le 2 \supset Val(v_{0,j}, \Theta_j, Э_\lambda(H))$ & & $Val(v_{1,j}, \Theta_j, Э_m(H)))$ & $RS(w, \Theta_1, \Theta_2, H)$ & $P \in H$ и сегмент L является Θ_1- и Θ_2-допустимым. Тогда

а) выполнено $RS(v_{1,1} \cdot v_{1,2} - v_{0,1} \cdot v_{0,2} - w, \Theta_2, \Theta_1, H)$, б) Θ_1 является RS-интегрируемым по Θ_2 на L ,

в) $\neg\neg\exists j(1 \le j \le 2 \,\&\, \forall k \neg\neg \exists \ell \forall x_1 x_2 y_1 y_2 (\forall i (1 \le i \le 2 \supset |x_i - P| < 2^{-\ell} \,\&\, x_i \in H \,\&\, Val(y_i, \Theta_j, x_i)) \supset |y_1 - y_2| < 2^{-k}))$,

г) если существует плотная в $(H)^{\circ}$ последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ такая, что $\forall k\, Val(0, \Theta_2, x_k)$, то $w = v_{1,1} \cdot v_{1,2} - v_{0,1} \cdot v_{0,2}$.

Определения. Пусть Θ_1 и Θ_2 , где $\Theta_2 \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, объекты типа $\mathcal{f}$, пусть выполнено (1), v и ϑ КДЧ, $v \in 0 \vartriangle 1$, и H Θ_1 - и Θ_2 -допустимый сегмент. Тогда мы

1) а) скажем, что Θ_1 является непрерывным (соотв. псевдонепрерывным) в точке v , и будем писать $Cont(\Theta_1, v)$ (соотв. $Pseudocont(\Theta_1, v)$), если $\exists z\, Val(z, \Theta_1, v)$ и для всякого НЧ p существует (соотв. не может не существовать) НЧ q такое, что $\forall xyz(x \in 0 \vartriangle 1 \,\&\, |x - v| < 2^{-q} \,\&\, Val(y, \Theta_1, x) \,\&\, Val(z, \Theta_1, v) \supset |y - z| < 2^{-p})$; аналогичным способом определяются понятия непрерывности и псевдонепрерывности Θ_1 справа (соотв. слева) в точке v ;

б) скажем, что Θ_1 является неубывающим (соотв. невозрастающим), если для всяких КДЧ x_1, x_2, y_1 и y_2 , для которых верно $0 \le x_1 < x_2 \le 1 \,\&\, Val(y_1, \Theta_1, x_1) \,\&\, Val(y_2, \Theta_1, x_2)$, выполнено $y_1 \le y_2$ (соотв. $y_2 \le y_1$);

2) а) посредством $BVS(\vartheta, \Theta_1, H)$ обозначим: для любых Θ_1 -допустимой возрастающей системы КДЧ из H $\{x_i\}_{i=0}^{\lambda}$ и системы КДЧ $\{y_i\}_{i=0}^{\lambda}$ выполнено

$$\forall i(0 \le i \le \lambda \supset Val(y_i, \Theta_1, x_i)) \supset \sum_{j=1}^{\lambda} |y_j - y_{j-1}| \le \vartheta ;$$

б) скажем, что Θ_1 является объектом слабо ограниченной вариации на H , если $\exists m\, BVS(m, \Theta_1, H)$;

3) а) определим $Red(\{G_n\}_n) \rightleftharpoons \forall k i\,(1 \le i \le m_k \supset \neg\neg \exists x\,(a^k_{i-1} < x < a^k_i \,\&\, \forall p \neg\neg \exists q\, \forall w z\,(|w - x| < 2^{-q} \,\&\, P(z, \{G_n\}_n, w) \supset |z - y^k_i| < 2^{-p})))$;

б) если $Red(\{G_n\}_n)$, то мы обозначим
$Var(\vartheta, \Theta_2, H) \rightleftharpoons (BVS(\vartheta, \Theta_2, H) \,\&\, \neg \exists m\, BVS(\vartheta - 2^{-m}, \Theta_2, H))$;

в) мы скажем, что ϑ является существенной вариацией Θ_2 на $0 \vartriangle 1$, и будем писать $S\,Var(\vartheta, \Theta_2, 0 \vartriangle 1)$, если выполнено $\exists m\, BVS(m, \Theta_2, 0 \vartriangle 1)$ и существует объект типа $\mathcal{f}$ $[\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$ такой, что $\{F_n\}_n = \{G_n\}_n \,\&\, \& \, Red(\{F_n\}_n) \,\&\, Var(\vartheta, [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y], 0 \vartriangle 1)$.

Ввиду замечаний 2 и 3 легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть Θ, Θ_1 и Θ_2, где $\Theta_1 \rightleftharpoons [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$ и $\Theta_2 \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0\bar{y}, {}^1\bar{y}]$, объекты типа $\mathcal{f}$, а v и w КДЧ. Тогда

1) если $Red(\{G_n\}_n)$, (1) и $\{w_p\}_p$ последовательность КДЧ такая, что $\forall p\,(w_p = |y^p_1 - {}^0\bar{y}| + \sum_{j=2}^{m_p} |y^p_j - y^p_{j-1}| + |{}^1\bar{y} - y^p_{m_p}|)$, то $\forall p\, Var(w_p, [\{G_p\}_n, {}^0\bar{y}, {}^1\bar{y}], 0 \vartriangle 1) \,\&$
$(BVS(w, \Theta_2, 0 \vartriangle 1) \equiv \forall p\,(w_p \le w)) \,\&$
$(Var(w, \Theta_2, 0 \vartriangle 1) \equiv (w_p \xrightarrow[p \to \infty]{} w))$;

2) если $\{G_n\}_n = \{F_n\}_n \,\&\, Red(\{G_n\}_n) \,\&\, {}^0y = {}^0\bar{y} \,\&\, {}^1y = {}^1\bar{y}$, то
$(BVS(w, \Theta_1, 0 \vartriangle 1) \supset BVS(w, \Theta_2, 0 \vartriangle 1)) \,\&$
$(RS(w, \Theta, \Theta_1, 0 \vartriangle 1) \supset RS(w, \Theta, \Theta_2, 0 \vartriangle 1))$;

3) $RS(w, \Theta, [\{F_n\}_n, {}^0y, {}^1y], 0 \vartriangle 1) \supset$
$RS(v \cdot w, \Theta, [v \cdot \{F_n\}_n, v \cdot {}^0y, v \cdot {}^1y], 0 \vartriangle 1)$;

4) если $Red(\{F_n\}_n) \& Red(\{G_n\}_n)$, то
$RS(w, \theta, \theta_1, 0\Delta 1) \& RS(v, \theta, \theta_2, 0\Delta 1) \supset$
$RS(w+v, \theta, [\{F_n\}_n + \{G_n\}_n, {}^0y + {}^0\bar{y}, {}^1y + {}^1\bar{y}], 0\Delta 1)$.

<u>Пример 1</u>. Существуют $\{F_{1,n}\}_n \in L_1$ и $\{F_{2,n}\}_n \in L_1$ такие, что $\forall i x v (1 \le i \le 2 \& Val(v, [\{F_{i,n}\}_n, 0, 0], x) \supset v = 0)$ и, следовательно, для любого объекта θ типа φ верно
$\forall i (1 \le i \le 2 \supset RS(0, \theta, [\{F_{i,n}\}_n, 0, 0], 0\Delta 1))$. С другой стороны, $[\{0\gamma 1 \sigma 1\}_n, 0, 0]$ не является RS-интегрируемым по $[\{F_{1,n}\}_n + \{F_{2,n}\}_n, 0, 0]$ на $0\Delta 1$.

<u>Замечание 4</u>. Пусть θ, где $\theta \rightleftharpoons [\{G_n\}_n, {}^0y, {}^1y]$, объект типа φ и ϑ КДЧ такие, что

(2) $$BVS(\vartheta, \theta, 0\Delta 1).$$

1) Пусть P АДЧ, $P \in 0\Delta 1$. Тогда, очевидно, верно
$\forall p \neg\neg \exists q \forall l \forall x_1 x_2 y_1 y_2 (\forall i (1 \le i \le 2 \supset 0 < (x_i - P)\cdot(-1)^l < 2^{-q} \& Val(y_i, \theta, x_i)) \supset |y_1 - y_2| < 2^{-p})$.

Следовательно, если $Red(\{G_n\}_n)$ и v КДЧ, $v \in 0\nabla 1 \&$ $\exists x\, Val(x, \theta, v)$, то θ не может не быть псевдонепрерывным или справа или слева в точке v.

2) Мы используем замечание 2 и построим плотную в $0\Delta 1$ последовательность КДЧ из $0\nabla 1$ $\{\bar{x}_k\}_k$ и последовательность КДЧ $\{\bar{y}_k\}_k$, обладающие описанными там свойствами. Тогда ввиду 1) верно $\forall k\, Pseudocont(\theta, \bar{x}_k)$ и для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$ выполнено $Pseudocont(\theta, x)$.

а) Пусть k, l и m НЧ такие, что

(3) $$\bar{x}_k < \bar{x}_l \& |\bar{y}_k - \bar{y}_l| > 2^{-m}.$$

Тогда существуют КДЧ z_1 и z_2, последовательности НЧ $\{q_t\}_t$

и пар НЧ $\{s_{0,t} \square s_{1,t}\}_t$ и КДЧ v такие, что

$$\neg\exists p(x_1 = \bar{y}_p \vee x_2 = \bar{y}_p) \& \min(\bar{y}_k, \bar{y}_l) < x_1 < x_1 + 2^{-m} < x_2 <$$
$$< \max(\bar{y}_k, \bar{y}_l) \& s_{0,1} = k \& s_{1,1} = l \& \forall t((s_{0,t} = s_{1,t} = q_t \vee \bar{x}_{s_{0,t}} +$$
$$+ \frac{1}{3}\cdot(\bar{x}_{s_{1,t}} - \bar{x}_{s_{0,t}}) < \bar{x}_{q_t} < \bar{x}_{s_{1,t}} - \frac{1}{3}\cdot(\bar{x}_{s_{1,t}} - \bar{x}_{s_{0,t}})) \& (s_{0,t+1} = s_{1,t+1} = s_{0,t} \&$$
$$\& (s_{0,t} = s_{1,t} \vee x_1 < \bar{y}_{q_t} < x_2) \vee (s_{0,t+1} = s_{0,t} \& s_{1,t+1} = q_t \vee s_{0,t+1} =$$
$$= q_t \& s_{1,t+1} = s_{1,t}) \&$$
$$\& \min(\bar{y}_{s_{0,t+1}}, \bar{y}_{s_{1,t+1}}) < x_1 < x_2 < \max(\bar{y}_{s_{0,t+1}}, \bar{y}_{s_{1,t+1}})))$$

и v является общим пределом последовательностей КДЧ $\{\bar{x}_{s_{0,t}}\}_t$ и $\{\bar{x}_{s_{1,t}}\}_t$.

в) ввиду 1),а) и того, что множество всех троек НЧ $k \square l \square m$, для которых верно (3), является рекурсивно перечислимым, существует последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ $\{v_s\}_s$ такая, что для всякого АДЧ P $, P \in 0 \vartriangle 1 \& \neg\exists s(P = v_s)$, выполнено $\forall p \neg\neg\exists q \forall x_1 x_2 y_1 y_2 (\forall i(1 \le i \le 2 \supset P - 2^{-q} < x_i < P + 2^{-q} \& \neg(x_i = P) \& Val(y_i, \theta, x_i)) \supset |y_1 - y_2| < 2^{-p})$.

Следовательно, если $Red(\{G_n\}_n)$, то $\forall x(x \in 0 \triangledown 1 \& \neg\exists s(x = v_s) \& \exists y\, Val(y, \theta, x) \supset Pseudocont(\theta, x))$.

г) Мы построим НЧ $\varkappa$ и последовательности НЧ $\{m_n\}_n$, систем НЧ $\{\{p_i^n\}_{i=1}^{2^{m_n}}\}_n$ и ступенчатых остовов $\{F_n\}_n$ такие, что для любого НЧ n выполнено $\vartheta < 2^{\varkappa} \& m_n = 2n + 3 + 2\varkappa \& \forall i(1 \le i \le 2^{m_n} \supset (i-1)\cdot 2^{-m_n} < \bar{x}_{p_i^n} < i\cdot 2^{-m_n}) \&$

$$F_n \equiv 0 \gamma 1\cdot 2^{-m_n} \gamma 2\cdot 2^{-m_n} \ldots \gamma (2^{m_n} - 1)\cdot 2^{-m_n} \gamma 1 \delta \bar{y}_{p_1^n} \gamma \bar{y}_{p_2^n} \ldots \gamma \bar{y}_{p_{2^{m_n}}^n} .$$

Тогда ввиду (2) для всякого НЧ n выполнено ${}^{o}\!\!\int_0^1 |F_n - F_{n+1}|_o < 2^{-n}$ и, следовательно, $\{F_n\}_n \in L_1$. Ввиду отмеченных выше свойств θ и последовательностей $\{\bar{x}_k\}_k$ и $\{\bar{y}_k\}_k$, 1), в)

и леммы 1 выполнено $Red(\{F_m\}_m) \& \{F_m\}_m = \{G_m\}_m \&$
$\& BVS(\vartheta, [\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], 0 \triangle 1) \& \forall x (x \in 0 \triangledown 1 \&$
$\& \neg \exists s (x = v_s) \& \exists y P(y, \{F_m\}_m, x) \supset Pseudocont([\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], x)).$

На основании части 2)в) замечания 4 легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>. Пусть Θ неубывающий объект типа $\mathcal{Y}$. Тогда существует последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ $\{v_s\}_s$ такая, что

$$\forall x (x \in 0 \triangledown 1 \& \neg \exists s (x = v_s) \& \exists y\, Val(y, \Theta, x) \supset Cont(\Theta, x)).$$

<u>Лемма 3</u>. Пусть Θ, где $\Theta \rightleftharpoons [\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$, объект типа $\mathcal{Y}$ и w КДЧ такие, что $Red(\{G_m\}_m) \& Var(w, \Theta, 0 \triangle 1)$. Тогда существуют неубывающий объект типа $\mathcal{Y}$ $[\{F_m\}_m, 0, w]$ и последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ $\{v_s\}_s$ такие, что $\{F_m\}_m \in L_1 \& Red(\{F_m\}_m)$ и $\forall x y (x \in 0 \triangledown 1 \& \neg \exists s (x = v_s) \&$
$Val(y, [\{F_m\}_m, 0, w], x) \supset Cont([\{F_m\}_m, 0, w], x) \&$
$(\exists v\, Val(v, \Theta, x) \supset Cont(\Theta, x) \& Var(y, \Theta, 0 \triangle x)))$.

<u>Пример 2</u>. Существует $\{F_m\}_m \in L_1$ такое, что $Red(\{F_m\}_m)$ и для Θ, $\Theta \rightleftharpoons [\{F_m\}_m, 0, 0]$, верно $BVS(1, \Theta, 0 \triangle 1) \&$
$\neg \forall m \exists x (x \in 2^{-m} \triangledown 2^{-m+1} \& Cont(\Theta, x))$ и, следовательно, $\neg \exists w\, Var(w, \Theta, 0 \triangle 1)$ и неверно, что для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ выполнено $Cont(\Theta, x)$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть Θ объект типа $\mathcal{Y}$, $\mathcal{F}$ функция, $\{k_l\}_l$ последовательность НЧ, H Θ-допустимый сегмент и z КДЧ, для которых выполнено

$$\forall l\, x_1 x_2 (|x_1 - x_2| < 2^{-k_l} \supset |\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)| < 2^{-l}) \& BVS(z, \Theta, H).$$

Тогда существует КДЧ w такое, что $\mathrm{RS}(w, \mathfrak{F}, \theta, \mathrm{H}) \,\&\, |w| \leq$ $\leq \langle S, |\mathfrak{F}| \rangle_{\llcorner} \mathrm{H}_{\lrcorner} \cdot z$ и для любых НЧ ℓ , $(\mathfrak{F}, \theta, \mathrm{H})$-пригодной системы КДЧ $\{x_i\}_{i=0}^{2z}$ и КДЧ v выполнено

$$\max_{1 \leq j \leq z} |x_{2j} - x_{2j-2}| \leq 2^{-k_\ell} \,\&\, \mathcal{Y}(v, \mathfrak{F}, \theta, \{x_i\}_{i=0}^{2z}) \supset |v - w| \leq 2^{-\ell} \cdot z \,.$$

Ввиду части а) замечания 3 и леммы 4 верно следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть θ объект типа $\mathcal{Y}$ слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$, $\{x_i\}_{i=0}^{\lambda}$ возрастающая система КДЧ и $\{y_i\}_{i=0}^{\lambda}$ система КДЧ такие, что $x_0 = 0 \,\&\, x_\lambda = 1 \,\&\, \forall i\, ((0 \leq i \leq$ $\leq \lambda \supset Val(y_i, \theta, x_i)) \,\&\, (0 < i < \lambda \supset Pseudocont\,(\theta, x_i)))$.
Тогда для любого НЧ q существует равномерно непрерывная функция $\mathcal{G}_q$ такая, что

$$\langle S, |\mathcal{G}_q| \rangle_{\llcorner} 0 \triangle 1_{\lrcorner} \leq 1 \,\&\, \forall w\, (\mathrm{RS}(w, \mathcal{G}_q, \theta, 0 \triangle 1) \supset$$
$$\supset \sum_{j=1}^{\lambda} |y_j - y_{j-1}| - 2^{-q} < w) \,.$$

Конструктивным аналогом пространства всех равномерно непрерывных на сегменте $[0,1]$ (классических) функций является полное сепарабельное нормированное пространство C (см. [3]) заданное списком Ч , $\mathfrak{M}$, + , $\cdot$, $\| \;\|$, где Ч алфавит, $\mathfrak{M}$ нормальное множество слов в Ч (являющихся шифрами равномерно непрерывных на $0 \triangle 1$ функций), + (соотв. $\cdot$) нормальный алгорифм, осуществляющий операцию сложения элементов $\mathfrak{M}$ (соотв. умножения элементов $\mathfrak{M}$ на КДЧ), а $\| \;\|$ нормальный алгорифм, выдающий по любому $P \in \mathfrak{M}$ КДЧ - норму P . Мы заметим, что для любого $P \in \mathfrak{M}$ мы (пользуясь универсальным алгорифмом) можем построить отвечающую ему функцию (обозначаемую нами посредством $[\![P]\!]$) и алгорифмический регулятор ее равномерной непрерывности. Наоборот, для любой равномерно непрерывной функции $\mathcal{F}$ существует $P \in \mathfrak{M}$ такое, что $[\![P]\!] = \mathcal{F}$. Для всяких P_1 и P_2 из $\mathfrak{M}$ и КДЧ v выполнено $\|P_1\| = \langle S, |[\![P_1]\!]| \rangle \llcorner 0 \vartriangle 1 \lrcorner \; \& [\![P_1 + P_2]\!] = [\![P_1]\!] + [\![P_2]\!] \& [\![v \cdot P_1]\!] = v \cdot [\![P_1]\!]$.

В следующем буква T – с индексами или без них – служит переменной для элементов множества $\mathfrak{M}$.

Нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ мы называем линейным функционалом в пространстве C, если $\forall T_1 T_2 v (! \mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner \& \mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner \in D \& \mathfrak{A} \llcorner T_1 + T_2 \lrcorner = \mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner + \mathfrak{A} \llcorner T_2 \lrcorner \& \mathfrak{A} \llcorner v \cdot T_1 \lrcorner = v \cdot \mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner \& (\|T_1\| = 0 \supset \mathfrak{A} \llcorner T_1 \lrcorner = 0))$.

Если $\mathfrak{A}$ линейный функционал в C, то согласно теореме Г.С. Цейтина [4] верно $\exists x \forall T (|\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner| \leq x \cdot \|T\|)$.

Функционал $\mathfrak{A}$ в пространстве C мы называем нормируемым, если существует КДЧ x, являющееся нормой $\mathfrak{A}$, т.е. такое, что

$$\forall T (|\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner| \leq x \cdot \|T\|) \& \forall m \neg\neg \exists T ((x - 2^{-m}) \cdot \|T\| < |\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner|).$$

Мы переходим к исследованию представимости линейных функционалов в C. Соответствующие классические результаты содержатся, например, в [2].

<u>Теорема 1</u>. Пусть θ объект типа $\mathcal{G}$ и x КДЧ такие, что $BVS(x, \theta, 0 \vartriangle 1)$. Тогда существует линейный функционал $\mathfrak{A}$ в пространстве C, для которого выполнено

а) $\forall T (RS(\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner, [\![T]\!], \theta, 0 \vartriangle 1) \& |\mathfrak{A} \llcorner T \lrcorner| \leq x \cdot \|T\|)$,

б) КДЧ w является нормой $\mathfrak{A}$ в том и только том случае, если верно

(4) $$SVar(w, \theta, 0 \vartriangle 1).$$

Доказательство. Ввиду замечания 1 можно без ограничения

общности предположить, что θ задан в виде $[\{G_m\}_m, {}^0y, {}^1y]$. Согласно лемме 4 и замечанию 4 существуют линейный функционал $\mathcal{U}$ в пространстве C и $\{F_m\}_m \in L_1$, для которых выполнено а), $Red(\{F_m\}_m)$ & $\{F_m\}_m = \{G_m\}_m$ и, следовательно, ввиду леммы 1 верно $\forall T(RS(\mathcal{U}_{\llcorner}T_{\lrcorner}, [\![T]\!], [\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], 0\Delta 1))$.
Кроме того, для любого НЧ p можно построить линейный функционал в C – $\mathcal{U}_p$, КДЧ w_p и последовательность элементов множества $\mathcal{M}$ – $\{P_{p,q}\}_q$ такие, что

$\forall T(RS(\mathcal{U}_{p\llcorner}T_{\lrcorner}, [\![T]\!], [\{F_p\}_m, {}^0y, {}^1y], 0\Delta 1))$ &

$Var(w_p, [\{F_p\}_m, {}^0y, {}^1y], 0\Delta 1)$ и

(5) $\quad \forall q(\|P_{p,q}\| \leq 1 \,\&\, w_p - 2^{-q} < \mathcal{U}_{\llcorner}P_{p,q\lrcorner})$

(см. лемму 5).

1) Пусть w КДЧ такое, что (4). Тогда согласно леммам 1 и 4 $\forall p(w_p \leq w) \,\&\, (w_p \xrightarrow[p\to\infty]{} w) \,\&\, \forall T(|\mathcal{U}_{\llcorner}T_{\lrcorner}| \leq w \cdot \|T\|)$ и для любого НЧ p верно (5). Следовательно, w – норма $\mathcal{U}$.

2) Пусть КДЧ w является нормой $\mathcal{U}$. Тогда для всякого НЧ p ввиду (5) выполнено $w_p \leq w$.

Пусть t НЧ.

Если $w < 2^{-t}$, то $\forall p(w - 2^{-t} < w_p \leq w)$.

Пусть $2^{-t-1} < w$. Тогда ввиду сепарабельности C существует $P \in \mathcal{M}$, для которого выполнено $0 < \|P\|$ & $(w - 2^{-t-1})\cdot$ $\cdot\|P\| < \mathcal{U}_{\llcorner}P_{\lrcorner}$. На основании леммы 4 легко доказать, что $\mathcal{U}_{p\llcorner}P_{\lrcorner} \xrightarrow[p\to\infty]{} \mathcal{U}_{\llcorner}P_{\lrcorner}$ и, следовательно, существует НЧ p_t такое, что $\forall p(p_t \leq p \supset (w - 2^{-t-1})\cdot\|P\| < \mathcal{U}_{p\llcorner}P_{\lrcorner} \leq w_p \cdot \|P\|)$ и, таким образом, $\forall p(p_t \leq p \supset w - 2^{-t} < w_p \leq w)$.

Итак, $w_p \xrightarrow[p\to\infty]{} w$ и $Var(w, [\{F_m\}_m, {}^0y, {}^1y], 0\Delta 1)$ (см. лемму 1), т.е. верно (4).

__Замечание 5.__ Для любых КДЧ v и w, $0 \le v < v+w \le 1$, мы посредством $\mathcal{F}_{v \square w}$ обозначим функцию такую, что
$\forall x\,((x \le v \supset \mathcal{F}_{v\square w}(x) = 1)\,\&\,(v+w \le x \supset \mathcal{F}_{v\square w}(x) = 0))$

и $\mathcal{F}_{v\square w}$ линейна на сегменте $v \vartriangle (v+w)$. Тогда выполнено

(6) $\forall m\, v_1 v_2 w_1 w_2 (\forall i\,(1 \le i \le 2 \supset 2^{-m} \le w_i\,\&\,0 \le v_i < v_i + w_i \le 1) \supset$
$|\mathcal{F}_{v_1\square w_1} - \mathcal{F}_{v_2\square w_2}| \le 2^m \cdot (|v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|))$

и существует нормальный алгорифм $\mathcal{L}$ такой, что

$\forall v w\,(0 \le v < v+w \le 1 \supset\, !\mathcal{L}_{\llcorner} v \square w_{\lrcorner}\ \&\ \mathcal{L}_{\llcorner} v \square w_{\lrcorner} \in \mathcal{M}\ \&$
$\&\ [\![\mathcal{L}_{\llcorner} v \square w_{\lrcorner}]\!] = \mathcal{F}_{v\square w})$.

Если $\mathcal{U}$ линейный функционал в пространстве C и m и p НЧ, $p < m$, то ввиду (6) существует всюду определенная равномерно непрерывная конструктивная функция двух действительных переменных - $\mathcal{G}$ такая, что $\forall v w\,(0 \le v \le 1 - 2^{-p}\,\&\,2^{-m} \le w \le 2^{-p} \supset$ $\supset \mathcal{G}(v \square w) = \mathcal{U}_{\llcorner}\mathcal{L}_{\llcorner} v \square w_{\lrcorner\lrcorner})$ и, следовательно, для всякого сегмента H, $H \subseteq 0 \vartriangle (1 - 2^{-p})$, можно построить КДЧ z, являющееся колебанием $\mathcal{G}$ на множестве $\Lambda x \square y\,(x \in H\,\&\,y \in 2^{-m} \vartriangle 2^{-p})$.

__Теорема 2.__ Пусть $\mathcal{U}$ линейный функционал в пространстве C. Тогда существуют $\{F_n\}_n \in L_1$; НЧ k и КДЧ ${}^1y$ такие, что $BVS(2^k, [\{F_n\}_n, 0, {}^1y], 0 \vartriangle 1)$ и

(7) $\forall T\,(RS(\mathcal{U}_{\llcorner} T_{\lrcorner}, [\![T]\!], [\{F_n\}_n, 0, {}^1y], 0 \vartriangle 1))$.

Доказательство. Пусть $Q \in \mathcal{M}$ и k НЧ такие, что $\forall x\,([\![Q]\!](x) = 1)$ и

(8) $$\forall T\,(|\mathcal{U}_{\llcorner} T_{\lrcorner}| \le 2^{k-1} \cdot \|T\|).$$

Мы определим ${}^1y \rightleftharpoons \mathcal{U}_{\llcorner} Q_{\lrcorner}$, для всякого НЧ n
$t_n \rightleftharpoons 2n + 2k + 3$, $p_n \rightleftharpoons 3n + 2k + 7$,

$y_i^n \rightleftharpoons \mathcal{U}_\llcorner \mathcal{L}_\llcorner (i-1)\cdot 2^{-t_n} \square 2^{-p_n} \lrcorner\lrcorner$, где $1 \le i \le 2^{t_n}$, и

$F_n \rightleftharpoons 0 \gamma 1\cdot 2^{-t_n} \gamma 2\cdot 2^{-t_n} \dots \gamma 1 \delta y_1^n \gamma y_2^n \dots \gamma y_{2^{t_n}}^n$ (см. замечание 5).

Пусть n НЧ. Пусть для любого НЧ i, $1 \le i \le 2^{t_n}$, ϑ_i^n КДЧ, являющееся колебанием $\mathcal{U}_\llcorner \mathcal{L}_\llcorner v \square w \lrcorner\lrcorner$ на множестве $\wedge x \square y ((i-1)\cdot 2^{-t_n} \le x \le i\cdot 2^{-t_n} - 2^{-p_n} \& 2^{-p_{n+1}} \le y \le 2^{-p_n})$.
Мы построим рекурсивное множество НЧ B_n такое, что
$\forall i ((i \in B_n \supset 1 \le i \le 2^{t_n} \& 2^{-n-2} < \vartheta_i^n) \& (1 \le i \le 2^{t_n} \&$
$\& \neg (i \in B_n) \supset \vartheta_i^n < 2^{-n-1}))$.

Пусть q_n число элементов множества B_n. Тогда ввиду (8) выполнено $q_n < 2^{n+k+1}$. Следовательно, ${}^{\circ}\!\int_0^1 |F_n \mp F_{n+1}|_\sigma <$ $< 2^{-n}$. Далее, $|y_1^n| + \sum_{j=2}^{2^{t_n}} |y_j^n - y_{j-1}^n| + |{}^1y - y_{2^{t_n}}^n| \le 2^k$.

Таким образом, $\{F_n\}_n \in L_1$, $[\{F_n\}_n, 0, {}^1y]$ объект типа $\mathcal{F}$ (см. замечание 1) и $BVS(2^k, [\{F_n\}_n, 0, {}^1y], 0 \triangle 1)$.

Для любого НЧ m существует S_σ-множество ([5]) $\mathcal{G}^m$ меры меньшей чем 2^{-m} такое, что $\forall x (\neg\neg \exists n i (m \le n \&$ $0 \le i \le 2^{t_n} \& (i \in B_n \& (i-1)\cdot 2^{-t_n} \le x \le i\cdot 2^{-t_n} \vee \neg (i \in B_n) \&$ $x \in 0 \triangle 1 \& |x - i\cdot 2^{-t_n}| \le 2^{-p_n})) \supset x \in \mathcal{G}^m)$.

Пусть x КДЧ, $x \in 0 \triangle 1 \& \neg (x \in \mathcal{G}^m)$. Тогда можно построить последовательность НЧ $\{i_\ell\}_\ell$ и КДЧ y такие, что
$\forall \ell (1 \le i_\ell \le 2^{t_\ell} \& x \in (i_\ell - 1)\cdot 2^{-t_\ell} \triangledown i_\ell \cdot 2^{-t_\ell} \& (m \le \ell \supset \neg (i_\ell \in B_\ell) \&$
$\& (i_\ell - 1)\cdot 2^{-t_\ell} + 2^{-p_\ell} < x)) \& \forall \ell (m \le \ell \supset |y_{i_\ell}^\ell - y| \le 2^{-\ell})$

и, следовательно,
$P(y, \{F_n\}_n, x) \& |\mathcal{U}_\llcorner \mathcal{L}_\llcorner x - 2^{-p_m - 1} \square 2^{-p_m} \lrcorner\lrcorner - y| < 2^{-m+1}$.

Пусть $P \in \mathfrak{M}$, $\|P\| \le 1$, и p НЧ. Тогда существуют КДЧ w, НЧ q и m, возрастающая система КДЧ $\{x_i\}_{i=0}^{2^q}$, система

КДЧ $\{v_i\}_{i=0}^{2^q}$ и система элементов $\mathcal{M} - \{R_j\}_{j=1}^{2^q-1}$, для которых выполнено $RS(w, \llbracket P \rrbracket, [\{F_n\}_n, 0, {}^1y], 0 \vartriangle 1)$ &

$\forall xy (|x-y| \leq 2^{-q+2} \supset |\llbracket P \rrbracket(x) - \llbracket P \rrbracket(y)| < 2^{-p-k-2})$ & $p+q+4 < m$ &

$x_0 = 0$ & $x_{2^q} = 1$ & $\forall i (0 < i < 2^q \supset \neg(x_i \in \mathcal{F}^m)$ & $|x_i - i \cdot 2^{-q}| < 2^{-q-5})$ &

$\forall i (0 \leq i \leq 2^q \supset Val(v_i, [\{F_n\}_n, 0, {}^1y], x_i))$ &

$|w - \sum_{j=1}^{2^q} \llbracket P \rrbracket(\frac{1}{2} \cdot (x_{j-1} + x_j)) \cdot (v_j - v_{j-1})| \leq 2^{-p-2}$ &

$\forall j (1 \leq j \leq 2^q - 1 \supset R_j \equiv \mathcal{L}_\llcorner x_j - 2^{-p_m-1} \square 2^{-p_m} {}_\lrcorner)$.

Пусть $\overline{P} \rightleftharpoons (\llbracket P \rrbracket(\frac{1}{2} \cdot (x_0 + x_1)) \cdot R_1 +$
$\sum_{j=2}^{2^q-1} \llbracket P \rrbracket(\frac{1}{2} \cdot (x_{j-1} + x_j)) \cdot (R_j + (-1) \cdot R_{j-1}) +$
$+ \llbracket P \rrbracket(\frac{1}{2} \cdot (x_{2^q-1} + x_{2^q})) \cdot (Q_1 +$
$+ (-1) \cdot R_{2^q-1}))$. Тогда $\| \overline{P} + (-1) \cdot P \| < 2^{-p-k-1}$ и, следовательно, ввиду (8) верно $|\mathcal{A}_\llcorner \overline{P}_\lrcorner - \mathcal{A}_\llcorner P_\lrcorner| < 2^{-p-2}$.

Однако, имеет место $|\mathcal{A}_\llcorner \overline{P}_\lrcorner - \sum_{j=1}^{2^q} \llbracket P \rrbracket(\frac{1}{2} \cdot (x_{j-1} + x_j)) \cdot (v_j - v_{j-1})| \leq$
$\sum_{j=1}^{2^q-1} 2 \cdot |\mathcal{A}_\llcorner R_j{}_\lrcorner - v_j| \leq (2^q - 1) \cdot 2 \cdot 2^{-m+1} < 2^{-p-2}$
и мы получаем $|w - \mathcal{A}_\llcorner P_\lrcorner| < 2^{-p}$.

Таким образом, выполнено (7).

Литература

[1] ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М.: Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 3, Москва 1960.

[2] ШИЛОВ Г.Е.: Математический анализ (Специальный курс.), Москва 1960.

[3] ШАНИН Н.А.: Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова, том 67(1962), 15-294.

[4] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, там же, 295-361.

[5] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной мате-

матике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[6] ДЕМУТ О.: О представимости равномерно непрерывных конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 14(1973), 7-25.

[7] ДЕМУТ О., КРЫЛ Р., КУЧЕРА А.: Об использовании теории функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae, Math. et Physica 19(1978), 15-60.

Matematicko-fyzikální fakulta
Universita Karlova
Malostranské nám. 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 23.4. 1979)