COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20,2 (1979)

О БИКОМПАКТАХ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ СЧЕТНОГО ЧИСЛА ЛЕВЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ - I

М.Г. ТКАЧЕНКО

Abstract: Let X be compact and γ be a countable family consisting of left subspaces of X such that $X = \bigcup\gamma$. The technique necessary to prove that X is scattered and sequential, is developed.

Key words: Left and right (scattered) spaces, sequential and c-sequential spaces.

AMS: 54A25, 54D30

В настоящей работе рассматривается ситуация, когда бикомпакт X является объединением счетного семейства $\{M_i : i \in \omega\}$ своих левых (или правых) подпространств. В случае, когда все M_i -правые, легко доказывается, что бикомпакт X также будет правым (лемма 1). Более сильным результатом является теорема 1. Как лемма 1, так и теорема 1 существенно используются при изучении случая, когда подпространства M_i бикомпакта X являются левыми.

Основной в этой статье является теорема 2, доказательство которой технически наиболее сложно. Вместе с уже упомянутыми результатами эта теорема является ключом к доказательству теорем 3,4 и 5, которые представляются нам наиболее важными в этой работе (см. часть II.).

В 1977 году I.Juhász и Б. Шапировский независимо получили серию результатов, касающихся левых пространств. В частности, ими были доказаны следующие утверждения.

Пусть X - бикомпакт.

1) Если X - левый, то $t(X) \leq \aleph_0$ (Шапировский, Juhász).

2) Если X - левый, то X-правый (Juhász, Шапировский).

3) Если X - левый, то X c-секвенциален (Шапировский).

4) Любое регулярное правое c-секвенциальное T_1-пространство секвенциально (Шапировский).

Из (2),(3) и (4) вытекает (5)

5) Если X-левый, то X секвенциален (Juhász, Шапировский),

6) Регулярное левое счетно-компактное T_1-пространство является бикомпактом (Juhász).

Утверждения (1),(2) и (5) доказаны в [1], а утверждение (6) сформулировано там без доказательства. Для полноты изложения в нашей работе приводятся принадлежащие Шапировскому доказательства утверждений (3) и (4).

Основные результаты настоящей статьи являются обобщением результатов, приведенных в пп. 1,2,3,5 и 6.

Теперь - некоторые определения и обозначения.

Определение 1. Топологическое пространство X называется правым, если существует вполне упорядочение $<$ на X такое, что для каждой точки $x \in X$ правый луч $\{y \in X : x < y\}$ замкнут в X.

Нетрудно проверить, что пространство X - правое тогда и только тогда правое, когда в любом подпространстве $Y \subset X$ существует изолированная в Y точка. Такие пространства называют также разреженными.

В дальнейшем используются оба термина.

Определение 2. Пространство X называется левым, если существует вполне упорядочение $<$ на X такое, что для каждой точки $x \in X$ левый луч $\{y \in X : y < x\}$ замкнут в X. Любое вполне упорядочение $<$ с таким свойством также называется левым.

Определение 3. Пространство X называется c-секвенциальным, если для любого замкнутого в X множества F и любой неизолированной в F точки x существует последовательность $N \subset F \setminus \{x\}$, сходящаяся к точке x.

Очевидно, любое секвенциальное пространство c-секвенциально.

Через $w(X)$, $t(X)$, $\chi(X)$, $\psi(X)$, $c(X)$ и $d(X)$ обозначаются вес, теснота, характер, псевдохарактер, число Суслина и плотность пространства X, соответственно.

Кардиналы отождествляются с соответствующими ординалами. Ординал считается множеством всех предшествующих ординалов. Особенно интенсивно эти соглашения используются при доказательстве теоремы 2.

Под пространством в дальнейшем всюду понимается регулярное T_1-пространство.

Перейдем к изложению результатов. Сначала приведем доказательства утверждений (3) и (4).

Доказательство утверждения (3) (Шапировский). Пусть X - левый бикомпакт. Зафиксируем левое вполне упорядочение $<$ на X. Так как свойство пространства быть левым наследуется подпространствами, достаточно доказать, что к любой неизолированной в X точке p сходится последовательность из $X \setminus \{p\}$.

Итак, пусть $p \in [X \setminus \{p\}]$.

Положим $q = \min\{x \in X : p \in [X_x \setminus \{p\}]\}$, где $X_x = \{y \in X : y < x\}$ для каждой точки $x \in X$, а минимум в определении точки q берется относительно вполне упорядочения $<$. Мы утверждаем, что $\chi(p, X_q) = \aleph_0$. В самом деле, по пункту (1), $t(X) \leq \aleph_0$. Поэтому существует $M \subset X_q \setminus \{p\}$ такое, что $|M| \leq \aleph_0$ и $p \in [M]$.

Из определения точки q следует, что у нее нет предшественника относительно порядка $<$, а из определения множества M вытекает равенство $q = \sup M$. Поэтому $X_q = \cup\{X_x : x \in M\}$ и $X_q \setminus \{p\} = \cup\{X_x \setminus \{p\} : x \in M\}$. Но множество $X_x \setminus \{p\}$ замкнуто в X для любой точки $x \in M$, ибо точка p изолирована в X_x для каждой точки $x < q$ и $M \subset X_q$. Таким образом, точка p имеет тип G_δ в пространстве X_q. Но X_q замкнуто в X и поэтому $\chi(p, X_q) = \aleph_0$. Существование сходящейся к p последовательности теперь следует из включения $p \in [X_q \setminus \{p\}]$.

Доказательство утверждения (4) (Шапировский).

Пусть X является разреженным с-секвенциальным пространством и $M \subset X$, $[M] \setminus M \neq \Lambda$. Зафиксируем на X правое вполне упорядочение $<$. Для каждого $x \in X$ положим $X_x = \{y \in X : y < x\}$.

Пусть p - минимальная в $[M] \setminus M$ точка (относительно вполне упорядочения $<$). Пусть $q = p + 1$ (то есть q является следующим за p элементом относительно вполне упорядочения $<$) и V - открытая окрестность точки p такая, что $[V] \subset X_q$. Положим $N = V \cap M$. Тогда $[N] \setminus N = \{p\}$. Таким образом, точка p неизолирована в замкнутом множестве $[N]$ и поэтому существует сходящаяся к точке p последовательность $C \subset [N] \setminus \{p\} = N$. Однако, $N \subset M$, поэтому $C \subset M$.

Утверждение полностью доказано.

Лемма 1. Пусть пространство X, обладающее свойством Бэра, является объединением семейства $\{M_i : i \in \omega\}$ своих разреженных подпространств. Тогда X разрежено.

Доказательство. Достаточно доказать, что в X есть хотя бы одна изолированная точка. Так как X обладает свойством Бэра, существует $i \in \omega$ такой, что $\mathcal{O} = \mathrm{Int}([M_i]) \neq \Lambda$. Положим $N = \mathcal{O} \cap M_i$. По определению, $\mathcal{O}$ - открытое непустое подмножество в X, N - разреженное подпространство в X (ибо $N \subset M_i$) и N всюду плотно в $\mathcal{O}$. Поэтому в N есть изолированная точка p, которая будет изолирована в $\mathcal{O}$, ибо N всюду плотно в $\mathcal{O}$. Но $\mathcal{O}$ открыто в X, поэтому p - изолированная в X точка.

Лемма доказана.

Лемма 1, очевидно, является усилением леммы 3.19 из [2].

Теорема 1. Пусть бикомпакт X является объединением цепи γ своих разреженных подпространств. Тогда X разрежен.

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, достаточно доказать, что в X есть хотя бы одна изолированная точка. Предположим противное. Тогда стандартным образом построим непрерывное отображение $f : F \to C$ некоторого замкнутого в X множества F на канторово совершенное множество C (см. например, [3]). Так как X -бикомпакт, существует замкнутое в X множество $\Phi \subset F$ такое, что $f(\Phi) = C$ и $g = f|\Phi$ - неприводимо. Из неприводимости отображения g сразу следует, что в Φ нет изолированных точек и что $d(\Phi) = d(C) = \aleph_0$.

Положим $\mu = \{\Phi \cap M : M \in \gamma\}$. Тогда семейство μ состоит из разреженных пространств и $\Phi = \cup\mu$.

Положим $\tilde{\mu} = \{[N] : N \in \mu\}$. Поскольку семейство μ является цепью, то цепью является и семейство $\tilde{\mu}$. Далее, семейство $\tilde{\mu}$ состоит из замкнутых в Φ множеств и $\Phi = \cup\tilde{\mu}$, причем $d(\Phi) = \aleph_0$, поэтому существует подсемейство $\lambda \subset \tilde{\mu}$ такое, что $|\lambda| \leq \aleph_0$ и $\Phi = \cup\tilde{\lambda}$. Для каждого $P \in \lambda$ зафиксируем $N(P) \in \mu$ такое, что $P = [N(P)]$. Так как $|\lambda| \leq \aleph_0$ и бикомпакт Φ обладает свойством Бэра, существует $P \in \lambda$ такое, что $\mathcal{O} = \mathcal{I}nt_{\Phi}(P) \neq \Lambda$. Положим $M = \mathcal{O} \cap N(P)$.

Тогда M - правое (как подпространство правого пространства $N(P)$) пространство, всюду плотное в $\mathcal{O}$. Поэтому существует изолированная в M точка x, которая в силу плотности M в $\mathcal{O}$ будет изолирована в $\mathcal{O}$, а в силу открытости $\mathcal{O}$ в Φ, будет изолирована и в Φ.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

<u>Вопрос 1</u>. Верна ли предыдущая теорема для счетно-компактных пространств?

Можно показать, что утверждение предыдущей теоремы справедливо для регулярных счетно-компактных пространств X, удовлетворяющих неравенству $t_c(X) \leq \aleph_0$ x)

----

x) $t_c(X) \leq \tau$, если для каждого замкнутого в X множества F и каждой точки $x \in F$, принадлежащей замыканию множества $F \setminus \{x\}$ существует подмножество $M \subset F \setminus \{x\}$ такое, что $|M| \leq \tau$ и $x \in [M]$. Очевидно, $t_c(X) \leq t(X)$ для любого пространства X.

Действительно, имеет место

Лемма 2. Пусть $t_c(X) \leq \aleph_0$ и F - замкнутое подмножество в X, не имеющее изолированных точек. Тогда существует замкнутое в X множество Φ без изолированных точек такое, что $\Phi \subset F$ и $d(\Phi) = \aleph_0$.

Доказательство. Пусть $S_0 \subset F$, $|S_0| \leq \aleph_0$. Так как $t_c(X) \leq \aleph_0$, для каждой точки $x \in S_0$ существует счетное множество $S_x \subset F \setminus \{x\}$ такое, что $x \in [S_x]$. Полагаем $S_1 = \bigcup_{x \in S_0} S_x$. Очевидно, $|S_1| \leq \aleph_0$. Для каждой точки $y \in S_1$ существует счетное множество $S_y \subset F \setminus \{y\}$ такое, что $y \in [S_y]$. Полагаем $S_2 = \bigcup_{y \in S_1} S_y$. Очевидно, $|S_2| \leq \aleph_0$ и так далее.

Полагаем теперь $S = \bigcup_{i \in \omega} S_i$ и $\Phi = [S]$. Очевидно, $|S| = \aleph_0$ и в S нет изолированных точек. Поэтому $d(\Phi) = \aleph_0$ и в Φ также нет изолированных точек. Очевидно, $\Phi \subset F$. Лемма доказана.

Для того, чтобы установить справедливость приведенного выше утверждения, теперь достаточно применить лемму 2 в соответствующем месте при доказательстве теоремы 1.

Вопрос 2. Во всяком ли регулярном счетно компактном пространстве без изолированных точек существует сепарабельное подпространство без изолированных точек?

В случае положительного ответа на этот вопрос положительное решение получает также и вопрос 1.

Теорема 2. Пусть τ - бесконечный кардинал и τ - компактное пространство X является объединением семейства $\{M_\alpha : \alpha < \tau\}$ своих левых подпространств. Тогда $t(X) \leq \tau$.

Доказательство. Предположим, что $t(X) > \tau$. Тогда в

X существует свободная последовательность $N = \{x_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ длины τ^+ - это следует из τ-компактности пространства X и результатов А.В. Архангельского из [4]. Для каждого $\alpha < \tau^+$ положим $N^\alpha = \{x_\beta : \alpha \le \beta\}$, $N_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, $\tilde{N} = \cap\{[N^\alpha] : \alpha < \tau^+\}$ и $K = [N] \setminus \tilde{N}$.

Теперь стандартным способом построим непрерывное отображение $g : K \xrightarrow{\text{на}} \tau^+$, где множество τ^+ наделено порядковой топологией. Именно, для каждого изолированного ординала $\alpha < \tau^+$ мы полагаем $g(x_\alpha) = \alpha$. Если же α - предельный ординал, то мы полагаем $g(x) = \alpha$ для каждого $x \in \Phi_\alpha$, где $\Phi_\alpha = [N_\alpha] \setminus \cup\{[N_\beta] : \beta < \alpha\}$.

Так как N - свободная последовательность, то $K = \cup\{[N_\alpha] : \alpha < \tau^+\}$, поэтому K является τ-компактным пространством и g определено на всем K.

Непрерывность отображения g легко проверяется.

Так как любое подпространство левого пространства само является левым, без потери общности можно считать, что $M_\alpha \cap M_\beta = \Lambda$ при $\alpha < \beta < \tau$.

Для каждого $\alpha < \tau$ зафиксируем левое вполне упорядочение $<_\alpha$ на M_α и положим $K_\alpha = K \cap M_\alpha$.

Тогда $K = \cup\{K_\alpha : \alpha < \tau\}$ и $K_\alpha \cap K_\beta = \Lambda$ при $\alpha < \beta < \tau$.

Для каждого ординала $\alpha < \tau$ и любого $x \in K_\alpha$ через $K_\alpha(x)$ мы будем обозначать множество $\{y \in K_\alpha : y <_\alpha x\}$.

Перейдем к первому этапу доказательства.

Для каждого ординала $\alpha < \tau$ существуют две возможности:

$(i_0(\alpha))$ существует $\theta < \tau^+$ такой, что $K_\alpha \subset g^{-1}(\theta)$;

$(ii_0(\alpha))$ $K_\alpha \setminus g^{-1}(\theta) \neq \Lambda$ для каждого $\theta < \tau^+$.

Очевидно, существует ординал $\alpha < \tau$, для которого имеет место вторая возможность, ибо $cf(\tau^+) = \tau^+ > \tau$. Пусть α_0 - минимальный такой ординал. Для него снова существуют две возможности:

(iii_0) для каждого $x \in K_{\alpha_0}$ существует ординал $\alpha < \tau^+$ такой, что $K_{\alpha_0}(x) \subset g^{-1}(\alpha)$;

(iv_0) существует $x \in K_{\alpha_0}$ такой, что $K_{\alpha_0}(x) \setminus g^{-1}(\alpha) \neq \Lambda$ для каждого $\alpha < \tau^+$.

В случае (iii_0) мы полагаем $F_0 = [\tilde{K}_{\alpha_0}]_K$, где $\tilde{K}_{\alpha_0} = K_{\alpha_0}$, а в случае (iv_0) полагаем $x_0 = min\{y \in K_{\alpha_0} : K_{\alpha_0}(y) \setminus g^{-1}(\alpha) \neq \Lambda$ для каждого $\alpha < \tau^+\}$, $\tilde{K}_{\alpha_0} = K_{\alpha_0}(x_0)$ и $F_0 = [\tilde{K}_{\alpha_0}]_K$ (минимум в определении точки x_0 берется относительно вполне упорядочения $<_{\alpha_0}$).

Очевидно, в обоих случаях будет иметь место равенство $F_0 \cap K_{\alpha_0} = \tilde{K}_{\alpha_0}$, ибо $<_{\alpha_0} | K_{\alpha_0}$ - левое вполне упорядочение на K_{α_0}.

Пусть $\beta < \tau$ и для каждого $\gamma < \beta$ множество $F_\gamma \subset K$ уже определено, а ординал α_γ определен для каждого непредельного $\gamma < \beta$, причем $\Lambda \neq F_{\gamma_2} \subset F_{\gamma_1}$ при $\gamma_1 < \gamma_2 < \beta$.

Если β - предельный ординал, то мы полагаем $F_\beta = \cap\{F_\gamma : \gamma < \beta\}$. Тогда $F_\beta \neq \Lambda$, поскольку K является τ-компактным пространством.

Пусть теперь $\beta = \gamma + 1$. Для каждого $\alpha < \tau$ существуют две возможности:

$(i_\beta(\alpha))$ существует ординал $\theta < \tau^+$ такой, что $F_\gamma \cap K_\alpha \subset g^{-1}(\theta)$;

$(ii_\beta(\alpha))$ $(F_\gamma \cap K_\alpha) \setminus g^{-1}(\theta) \neq \Lambda$ для каждого $\theta < \tau^+$.

Разберем две возможности.

1) γ - предельный ординал. Положим $\alpha^*_\gamma = sup\{\alpha_\mu :$

$\mu < \gamma$, μ - непредельный ординал$\}$. Если для каждого ординала α, где $\alpha^*_\gamma \le \alpha < \tau$, имеет место случай $(i_\beta(\alpha))$, то мы полагаем $F = F_\gamma$ и перед шагом β нашего построения останавливаемся. Если же для некоторого α, где $\alpha^*_\gamma \le \alpha < \tau$, имеет место случай $(ii_\beta(\alpha))$, то пусть α_β - минимальный такой ординал (не меньший, чем α^*_γ, разумеется).

2) $\gamma = \mu + 1$.

Если для каждого ординала α, где $\alpha_\gamma < \alpha < \tau$, имеет место случай $(i_\beta(\alpha))$, то мы полагаем $F = F_\gamma$ и перед шагом β нашего построения останавливаемся.

Если же для некоторого ординала α такого, что $\alpha_\gamma < < \alpha < \tau$, имеет место случай $(ii_\beta(\alpha))$, то пусть α_β - минимальный такой ординал (больший, чем α_γ, разумеется).

Итак, в обоих случаях (1) и (2) наши действия определены. Предположим, что "остановки" не случилось.

Опять существуют две возможности :

(iii_β) для каждого $x \in K_{\alpha_\beta}$ существует $\theta < \tau^+$ такой, что $F_\gamma \cap K_{\alpha_\beta}(x) \subset g^{-1}(\theta)$;

(iv_β) существует $x \in K_{\alpha_\beta}$ такой, что для каждого $\theta < \tau^+$ будет $(F_\gamma \cap K_{\alpha_\beta}(x)) \setminus g^{-1}(\theta) \neq \Lambda$.

В случае (iii_β) полагаем $\tilde{K}_{\alpha_\beta} = K_{\alpha_\beta} \cap F_\gamma$ и $F_\beta = [\tilde{K}_{\alpha_\beta}]_K$, а в случае (iv_β) полагаем $x_\beta = \min\{y \in K_{\alpha_\beta} : (K_{\alpha_\beta} \cap F_\gamma) \setminus \setminus g^{-1}(\theta) \neq \Lambda$ для каждого $\theta < \tau^+\}$, $\tilde{K}_{\alpha_\beta} = K_{\alpha_\beta}(x_\beta) \cap F_\gamma$ и $F_\beta = [\tilde{K}_{\alpha_\beta}]_K$.

Очевидно, в обоих случаях будет выполняться равенство $F_\beta \cap K_{\alpha_\beta} = \tilde{K}_{\alpha_\beta}$, ибо $<_{\alpha_\beta} | K_{\alpha_\beta}$ - левое вполне упорядочение на K_{α_β}.

Итак, наше построение полностью определено. Если это построение остановилось перед некоторым шагом β, где

$\beta < \tau$, то непустое множество F уже определено. В противном случае полагаем $F = \cap \{ F_\beta : \beta < \tau \}$. Так как в этом случае система $\{ F_\beta : \beta < \tau \}$ состоит из непустых замкнутых подмножеств τ - компактного пространства K и $F_\beta \subset F_\gamma$ при $\gamma < \beta < \tau$, то $F \neq \Lambda$.

Более того, мы утверждаем, что $g(F)$ замкнуто и конфинально в τ^+. Для того, чтобы доказать это заметим прежде всего, что g - замкнутое отображение, как непрерывное отображение τ - компактного пространства K на хаусдорфово пространство, в котором каждая точка имеет замкнутую окрестность, индекс компактности которой не превосходит τ.

Конфинальность множества $g(F)$ в τ^+ очевидна, если наше построение остановилось перед шагом с номером $\beta < \tau$ (тогда обязательно β - непредельный ординал) таким, что существует ординал $\mu = \beta - 2$.

Действительно, положим $\gamma = \mu + 1$. Тогда $F = F_\gamma = [\widetilde{K}_{\alpha_\gamma}]_K$, причем $g(\widetilde{K}_{\alpha_\gamma})$ конфинально в τ^+ (см. определение индекса α_γ). Таким образом, нам остается рассмотреть два случая:

а) построение остановилось перед ординалом β, причем $\gamma = \beta - 1$ - предельный ординал, или

в) построение не останавливалось вовсе.

Тогда $F = \cap \{ F_\mu : \mu < \gamma \}$ в случае (а) и $F = \cap \{ F_\mu : \mu < \tau \}$ в случае (в). Эта разница несущественна - положим

$$\mu^* = \begin{cases} \gamma, & \text{в случае (а);} \\ \tau, & \text{в случае (в).} \end{cases}$$

Тогда μ^* - предельный ординал, $\mu^* \leq \tau$ и $F = \cap \{ F_\mu : \mu < \mu^* \}$. Затем, $g(F_\mu)$ замкнуто и конфинально в τ^+, для каждого $\mu < \mu^*$, поэтому $Q = \cap \{ g(F_\mu) : \mu < \mu^* \}$ также замкнуто и конфинально в τ^+, так как пространство τ^+ (с порядковой топологией) τ - компактно.

Остается лишь заметить, что $g(F)=Q$. Действительно, система $\{g^{-1}(\{\theta\})\}\cup\{F_\mu : \mu<\mu^*\}$ центрирована для каждого ординала $\theta\in Q$ и мощность этой системы не превосходит τ. Поэтому ее пересечение непусто, то есть $F\cap g^{-1}(\{\theta\})\neq\Lambda$; следовательно, $Q\subset g(F)$. Обратное включение очевидно. Этим самым конфинальность множества $g(F)$ в τ^+ доказана. Отметим, что $F\cap K_{\alpha_\mu}\subset\widetilde{K}_{\alpha_\mu}$ для каждого непредельного ординала $\mu<\mu^*$, ибо $F\subset F_\mu$ и $F_\mu\cap K_{\alpha_\mu}=\widetilde{K}_{\alpha_\mu}$ для каждого непредельного ординала $\mu<\mu^*$.

Положим $S=\tau\setminus\{\alpha_\mu : \mu<\mu^*,\ \mu$ - непредельный ординал$\}$. Из проведенного построения следует, что для каждого $\beta\in S$ существует ординал $\theta_1(\beta)<\tau^+$ такой, что $F\cap K_\beta\subset g^{-1}(\theta_1(\beta))$. Положим также $\widetilde{S}=\{\mu<\mu^* : \mu$ - непредельный ординал и существует $\theta<\tau^+$ такой, что $\widetilde{K}_{\alpha_\mu}\cap F\subset g^{-1}(\theta)\}$. Для каждого $\mu\in\widetilde{S}$ через $\theta(\mu)$ обозначим наименьший ординал $\theta<\tau^+$, для которого $F\cap\widetilde{K}_{\alpha_\mu}\subset g^{-1}(\theta)$. Положим $\theta^*=\sup E$, где $E=\{\theta(\mu) : \mu\in\widetilde{S}\}\cup\{\theta_1(\beta) : \beta\in S\}$ (очевидно, $|E|\le\tau$) и $\Phi=F\setminus g^{-1}(\theta^*)$.

Тогда Φ замкнуто в F, $g(\Phi)$ замкнуто и конфинально в τ^+ и для каждого $\beta\in A$, где $A=\tau\setminus\widetilde{S}$, выполняются следующие условия:

(v_β) $(\Phi\cap K_{\alpha_\beta})\setminus g^{-1}(\theta)\neq\Lambda$ для каждого $\theta<\tau^+$;

(vi_β) для каждого $x\in\widetilde{K}_{\alpha_\beta}$ существует ординал $\theta<\tau^+$ такой, что $\Phi\cap\widetilde{K}_{\alpha_\beta}(x)\subset g^{-1}(\theta)$.

Действительно, (v_β) выполняется по определению множества $\widetilde{S}$, а (vi_β) - по определению множества $\widetilde{K}_{\alpha_\beta}$.

Отметим, что $\Phi\subset\cup\{\widetilde{K}_{\alpha_\beta} : \beta\in A\}$!

Перейдем ко второму этапу доказательства.

Для каждого $\beta \in A$ положим $L_\beta = \Phi \cap \widetilde{K}_{\alpha_\beta}$. Очевидно, $\Phi = \cup\{L_\beta : \beta \in A\}$ и $L_{\beta'} \cap L_{\beta''} = \Lambda$ при $\beta', \beta'' \in A, \beta' \neq \beta''$.

Зафиксируем $\beta \in A$.

Пусть $\alpha_0(\beta)$ - произвольный ординал такой, что $\alpha_0(\beta) < \tau^+$. Ввиду условия (v_β) существует точка $x_0(\beta) \in L_\beta$ такая, что $\alpha_0(\beta) < g(x_0(\beta))$. Пусть $\mu < \tau^+$ и для всех $\gamma < \mu$ уже определены ординал $\alpha_\gamma(\beta) < \tau^+$ и точка $x_\gamma(\beta) \in L_\beta$.

Если μ - предельный ординал, то мы положим $\alpha_\mu(\beta) = \sup\{\alpha_\gamma(\beta) : \gamma < \mu\}$ и $x_\mu(\beta) = \min\{x \in L_\beta : x_\gamma(\beta) <<_\beta x$ для каждого $\gamma < \mu\}$, где $<<_\beta$ есть сужение вполне упорядочения $<_{\alpha_\beta}$ на множестве L_β, а минимум в определении точки $x_\mu(\beta)$ берется относительно вполне упорядочения $<<_\beta$.

Необходимо отметить, что ввиду условий (v_β) и (vi_β) будем иметь: $cf(L_\beta, <<_\beta) = \tau^+$ и поэтому точка $x_\mu(\beta)$ определена.

Пусть $\mu = \gamma + 1$. Пользуясь свойством (vi_β) множества L_β, мы выбираем ординал $\alpha_\mu(\beta) > g(x_\gamma(\beta))$ так, чтобы $L_\beta(x_\gamma(\beta)) \subset g^{-1}(\alpha_\mu(\beta))$. Пользуясь свойством (v_β), мы находим точку $x_\mu(\beta) \in L_\beta$ такую, что $\alpha_\mu(\beta) < g(x_\mu(\beta))$.

Тогда, конечно, $x_\gamma(\beta) <<_\beta x_\mu(\beta)$.

Таким образом, множества $\{x_\gamma(\beta) : \gamma < \tau^+\}$ и $\{\alpha_\gamma(\beta) : \gamma < \tau^+\}$ построены. Из построения вытекают такие свойства:

(p_β) $L_\beta(x_\mu(\beta)) \subset g^{-1}(\alpha_\mu(\beta))$ для каждого предельного ординала $\mu < \tau^+$;

(q_β) для каждого предельного ординала $\mu < \tau^+$ множество $\{g(x_\gamma(\beta)) : \gamma < \mu\}$ конфинально в $\alpha_\mu(\beta)$.

Обозначим $C_\beta = \{\alpha_\mu(\beta) : \mu < \tau^+\}$ и $\widetilde{D} = \{\mu < \tau^+ : \alpha_\mu(\beta') = \alpha_\mu(\beta'')$ для любых $\beta', \beta'' \in A\}$. Тогда $\widetilde{D}$ замкнуто и конфинально в τ^+ . Действительно, $\tilde{D}$ является пересечением замкнутых и конфинальных в τ^+ множеств $D(\beta', \beta'') = \{\mu < \tau^+ : \alpha_\mu(\beta') = \alpha_\mu(\beta'')\}$ по всем парам $(\beta', \beta'') \in A^2$, причем $|A| \le \tau$. Замкнутость множеств $D(\beta', \beta'')$ вытекает из замкнутости множеств C_β , что следует из их построения.

Обозначим теперь через D множество всех предельных для $\tilde{D}$ ординалов. Очевидно, $D \subset \tilde{D}$, D замкнуто и конфинально в τ^+ .

Перейдем к третьему, последнему этапу "построения противоречия".

Множество предельных ординалов, меньших τ^+ , будем обозначать через $\ell(\tau^+)$. Аналогично определяется множество $\ell(\tau)$.

Пусть $\beta \in A$. Для каждого $\mu \in \ell(\tau^+)$ положим $A_\mu(\beta) = [L_\beta(x_\mu(\beta))]_\phi \cap g^{-1}(\{\alpha_\mu(\beta)\})$. Мы утверждаем, что $A_\mu(\beta) \neq \Lambda$ для каждого $\mu \in \ell(\tau^+)$. Действительно, из свойства (q_β) вытекает конфинальность множества $\{g(x_\gamma(\beta)) : \gamma < \mu\}$ в $\alpha_\mu(\beta)$ и поэтому $\alpha_\mu(\beta) \in [\{g(x_\gamma(\beta)) : \gamma < \mu\}]_\phi$. Остается лишь заметить, что $\{x_\gamma(\beta) : \gamma < \mu\} \subset L_\beta(x_\mu(\beta))$ и отображение g замкнуто, поэтому $A_\mu(\beta) \neq \Lambda$.

Далее, если $x \in L_\beta \cap g^{-1}(\{\alpha_\mu(\beta)\})$, где μ - предельный ординал, $\mu < \tau^+$, то либо $x_\mu(\beta) <<_\beta x$, либо $x_\mu(\beta) = x$ - это следует из свойства (p_β) .

Вспоминая, что L_β - левое подпространство в ϕ , мы получаем: $A_\mu(\beta) \cap L_\beta = \Lambda$ для каждого $\mu \in \ell(\tau^+)$.

Положим $\beta_0 = \min A$ и $T_0 = D$. Пусть $\alpha < \tau^+$ и для каждого ординала $\gamma < \alpha$ уже определено множество $T_\gamma \subset \tau^+$, а для каждого непредельного ординала $\gamma < \alpha$ определен индекс $\beta_\gamma \in A$, причем T_γ замкнуто и конфинально в τ^+, $T_{\gamma''} \subset T_{\gamma'}$ при $\gamma' < \gamma'' < \alpha$, а система $\{A_\theta(\beta_\gamma): \gamma \leq \varkappa,\ \gamma \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\}$ центрирована для каждого непредельного ординала $\varkappa < \alpha$ и каждого $\theta \in T_\varkappa$.

Пусть $A \setminus \{\beta_\gamma : \gamma < \alpha\} \neq \Lambda$. Если $\alpha \in \ell(\tau^+)$, то мы полагаем $T_\alpha = \bigcap \{T_\gamma : \gamma < \alpha\}$ и все индуктивные требования выполнены. Пусть $\alpha = \varkappa + 1$. Тогда система $\{A_\theta(\beta_\gamma): \gamma \leq \varkappa,\ \gamma \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\}$ центрирована.

Действительно, если $\varkappa$ - непредельный ординал, то эта система центрирована по индуктивному предположению. Если же $\varkappa \in \ell(\tau^+)$, то эта система центрирована как объединение растущих центрированных систем $\{A_\theta(\beta_\gamma): \gamma \leq \varkappa',\ \gamma \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\}$ по всем непредельным $\varkappa' < \varkappa$. Поэтому при каждом $\theta \in T_\varkappa$ мы можем выбрать точку $y_\theta \in \bigcap \{A_\theta(\beta_\gamma): \gamma \leq \varkappa,\ \gamma \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\}$. Затем для каждого $\theta \in T_\varkappa$ через $\varphi_\alpha(\theta)$ обозначим какой-нибудь элемент $\beta \in A$, для которого $y_\theta \in L_\beta$. Тогда $\varphi_\alpha(\theta) \neq \beta_\gamma$ для каждого непредельного ординала $\gamma \leq \varkappa$. Действительно, в противном случае $y_\theta \in A_\theta(\beta_\gamma) \cap L_{\beta_\gamma}$ для некоторого непредельного $\gamma \leq \varkappa$. Однако, $\theta \in T_\varkappa \subset D$, поэтому $L_{\beta_\gamma}(x_\theta(\beta_\gamma)) \subset g^{-1}(\alpha_\theta(\beta_\gamma))$ (см. свойство (p_{β_γ})). Следовательно, если $x <<_{\beta_\gamma} x_\theta(\beta_\gamma)$, то $g(x) < \alpha_\theta(\beta_\gamma)$. Но $g(y_\theta) = \alpha_\theta(\beta_\gamma)$, поэтому либо $x_\theta(\beta_\gamma) <<_{\beta_\gamma} y_\theta$, либо $x_\theta(\beta_\gamma) = y_\theta$. Это противоречит тому, что L_{β_γ} - левое пространство и $y_\theta \in A_\theta(\beta_\gamma) \subset [L_{\beta_\gamma}(x_\theta(\beta_\gamma))]_\Phi$.

Так как $|T_\varkappa| = \tau^+$, существует $\beta \in A$ такой, что $|\varphi_\alpha^{-1}(\{\beta\})| = \tau^+$. Через β_α обозначим науменьший такой ординал $\beta \in A$ и положим $P_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\{\beta_\alpha\})$. Отметим, что множество $\{y_\theta : \theta \in P_\alpha\}$ конфинально в L_{β_α}, поскольку множество $\{g(y_\theta): \theta \in P_\alpha\}$ конфинально в τ^+.

Теперь внутри ведущегося построения проведем еще сдно "вложенное" построение.

Пусть $\theta_0 \in P_\alpha$. Ввиду конфинальности множества $\{x_\theta(\beta_\alpha) : \theta < \tau^+\}$ в L_{β_α} существует $\xi_0 < \tau^+$ такой, что $\theta_0 < \xi_0$ и $y_{\theta_0} \in L_{\beta_\alpha}(x_{\xi_0}(\beta_\alpha))$. Существует $\eta_0 < \tau^+$ такой, что $\xi_0 < \eta_0$ и $L_{\beta_\alpha}(x_{\xi_0}(\beta_\alpha)) \subset g^{-1}(\eta_0)$.

Пусть $\gamma < \tau^+$ и множества $\{\theta_\mu : \mu < \gamma\}, \{\xi_\mu : \mu < \gamma\}$ и $\{\eta_\mu : \mu < \gamma\}$ уже определены. Если $\gamma \in \ell(\tau^+)$, то мы полагаем $\theta_\gamma = \xi_\gamma = \eta_\gamma = \sup\{\theta_\mu : \mu < \gamma\}$. Пусть $\gamma = \mu + 1$. Тогда выбираем $\theta_\gamma \in P_\alpha$ так, чтобы $\eta_\mu < \theta_\gamma$. Существует ординал $\xi_\gamma < \tau^+$ такой, что $\theta_\gamma \in P_\alpha$ и $y_{\theta_\gamma} \in L_{\beta_\alpha}(x_{\xi_\gamma}(\beta_\alpha))$. Существует ординал $\eta_\gamma < \tau^+$ такой, что $\xi_\gamma < \eta_\gamma$ и $L_{\beta_\alpha}(x_{\xi_\gamma}(\beta_\alpha)) \subset g^{-1}(\eta_\gamma)$.

Таким образом, "вложенное" построение осуществлено. Пусть $\tilde{T}_\alpha = \{\theta_\gamma : \gamma \in \ell(\tau^+)\}$ и $T_\alpha = T_\varkappa \cap \tilde{T}_\alpha$.

Центральный момент доказательства состоит в том, что для каждого ординала $\theta \in T_\alpha$ система $\{A_\theta(\beta_\gamma) : \gamma \leq \alpha,\ \gamma \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\}$ будет центрирована. Действительно, пусть $\theta \in T_\alpha$. Тогда $\theta = \theta_\gamma$ для некоторого $\gamma \in \ell(\tau^+)$. Ввиду только что проведенного построения, $y_{\theta_\mu} \in L_{\beta_\alpha}$ для каждого непредельного $\mu < \gamma$. Следовательно, $Y_\gamma = \{y_{\theta_\mu} : \mu < \gamma,\ \mu \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\} \subset L_{\beta_\alpha}$. Отсюда следует, что $[Y_\gamma]_\phi \cap A_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha) \neq \Lambda$. Докажем это. Пусть μ - непредельный ординал, $\mu < \gamma$. Ввиду выбора точек y_θ имеем: $y_{\theta_\mu} \in A_{\theta_\mu}(\beta_\xi) \subset g^{-1}(\{\alpha_{\theta_\mu}(\beta_\xi)\})$ для любого непредельного $\xi \leq \varkappa$, поэтому $g(y_{\theta_\mu}) = \alpha_{\theta_\mu}(\beta_\xi)$ для любого непредельного $\xi \leq \varkappa$ (в этом нет ничего удивительного, ибо $\theta_\mu \in P_\alpha \subset T_\varkappa \subset T_0 \subset D \subset \tilde{D}$, а по определению множества $\tilde{D}$, $\alpha_\theta(\beta') = \alpha_\theta(\beta'')$ для любых $\beta', \beta'' \in A$).

Однако, $\sup\{\alpha_{\theta_\mu}(\beta_\xi) : \mu < \gamma\} = \alpha_{\theta_\gamma}(\beta_\xi)$, ибо

$\sup\{\theta_\mu : \mu < \gamma\} = \theta_\gamma$. Поскольку же $\alpha_{\theta_\gamma}(\beta') = \alpha_{\theta_\gamma}(\beta'')$ для любых $\beta', \beta'' \in A$ $(\theta_\gamma \in \widetilde{D})$, мы будем иметь: $\sup\{\alpha_{\theta_\mu}(\beta_\xi) : \mu < \gamma\} = \alpha_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha)$ для любого непредельного $\xi \le \varkappa$.

Поэтому $[g(Y_\gamma)] \ni \alpha_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha)$ и, следовательно,

$(*)$ $[Y_\gamma]_\Phi \cap g^{-1}(\{\alpha_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha)\}) \neq \Lambda$.

Затем, имеет место следующее свойство:

$(**)$ $y_{\theta_\mu} \in L_{\beta_\alpha}(x_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha))$

для каждого непредельного $\mu < \gamma$.

Действительно, это сразу следует из того, что

(m) $y_{\theta_\mu} \in L_{\beta_\alpha}(x_{\xi_\mu}(\beta_\alpha))$ для любого непредельного $\mu < \gamma$ и

$(\acute{m})$ $x_{\xi_\mu}(\beta_\alpha) \in L_{\beta_\alpha}(x_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha))$ для любого непредельного $\mu < \gamma$.

Оба свойства (m) и $(\acute{m})$ следуют из построения.

Таким образом, мы получаем: $R_\gamma \overset{def}{=} [Y_\gamma]_\Phi \cap A_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha) = [Y_\gamma]_\Phi \cap$ $\cap [L_{\beta_\alpha}(x_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha))]_\Phi \cap g^{-1}(\{\alpha_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha)\}) \overset{(**)}{=} [Y_\gamma]_\Phi \cap g^{-1}(\{\alpha_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha)\}) \overset{(*)}{\neq} \Lambda$.

Далее, из включения $y_{\theta_\mu} \in A_{\theta_\mu}(\beta_\xi)$, которое имеет место при любом непредельном $\mu < \tau^+$ и непредельном $\xi \le \varkappa$, следует, что $y_{\theta_\mu} \in [L_{\beta_\xi}(x_{\theta_\mu}(\beta_\xi))]_\Phi$, поэтому $[Y_\gamma]_\Phi \subset$ $\subset [L_{\beta_\xi}(x_{\theta_\gamma}(\beta_\xi))]_\Phi$ для любого непредельного $\xi \le \varkappa$. Следовательно, $\Lambda \neq R_\gamma = [Y_\gamma]_\Phi \cap g^{-1}(\{\alpha_{\theta_\gamma}(\beta_\xi)\}) \subset [L_{\beta_\xi}(x_{\theta_\gamma}(\beta_\xi))]_\Phi \cap$ $\cap g^{-1}(\{\alpha_{\theta_\gamma}(\beta_\xi)\}) = A_{\theta_\gamma}(\beta_\xi)$, то есть $R_\gamma \subset \bigcap\{A_\theta(\beta_\xi) :$ $: \xi \le \varkappa, \xi \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\}$ (заметим, что R_γ не зависит от ξ , ибо $\alpha_{\theta_\gamma}(\beta') = \alpha_{\theta_\gamma}(\beta'')$ при любых $\beta', \beta'' \in A$).

Но мы уже установили, что $R_\gamma = [Y_\gamma]_\Phi \cap A_{\theta_\gamma}(\beta_\alpha) \neq \Lambda$, поэтому центрированность системы $\Gamma_\gamma = \{A_{\theta_\gamma}(\beta_\xi) : \xi \le \varkappa + 1 = \alpha,$

$\xi \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\}$ вытекает из включения $R_\gamma \subset \bigcap \Gamma_\gamma$.

Тем самым доказано, что множество T_α и ординал β_α определены с соблюдением всех индуктивных требований, и наше "внешнее" построение завершено.

Пусть $\alpha^* < \tau^+$ - минимальный ординал такой, что $\tau \setminus \{\beta_\alpha : \alpha < \alpha^*$, α - непредельный ординал$\} = \Lambda$. Такой ординал α^* существует, ибо $\tau < \tau^+$. Очевидно, система $\{A_\theta(\beta_\alpha) : \alpha < \alpha^*, \alpha \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\}$ центрирована для каждого $\theta \in T$, где $T = \bigcap \{T_\alpha : \alpha < \alpha^*\} \neq \Lambda$.

Пусть $\theta \in T$ и $p \in \bigcap \{A_\theta(\beta_\alpha) : \alpha < \alpha^*, \alpha \in \tau^+ \setminus \ell(\tau^+)\}$. Тогда существует ординал $\gamma < \alpha^*$ такой, что $p \in L_{\beta_\gamma}$. Следовательно, $p \in A_\theta(\beta_\gamma) \cap L_{\beta_\gamma}$. Однако, $\theta \in T \subset D$, поэтому $g^{-1}(\alpha_\theta(\beta_\gamma)) \supset L_{\beta_\gamma}(x_\theta(\beta_\gamma))$ (см. (p_{β_γ})). Следовательно, если $x <<_{\beta_\gamma} x_\theta(\beta_\gamma)$, то $g(x) < \alpha_\theta(\beta_\gamma)$. Но $g(p) = \alpha_\theta(\beta_\gamma)$, поэтому либо $x_\theta(\beta_\gamma) <<_{\beta_\gamma} p$, либо $x_\theta(\beta_\gamma) = p$. Это противоречит тому, что $<<_{\beta_\gamma}$ -левое вполне упорядочение на L_{β_γ} и $p \in A_\theta(\beta_\gamma) \subset [L_{\beta_\gamma}(x_\theta(\beta_\gamma))]_\phi$.

Теорема полностью доказана.

<u>Замечание 1</u>. На самом деле при доказательстве теоремы 2 мы установили, что τ - компактное пространство, являющееся объединением τ левых подпространств, не содержит свободных последовательностей длины большей чем τ .

Литература

[1] I. GERLITZ and I. JUHÁSZ: On left-separated compact spaces , Comment. Math. Univ. Carolinae 19 (1978), 53-61.

[2] Peter I. NYIKOS: Covering properties on σ-scattered spaces, to appear.

[3] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ, В.И. ПОНОМАРЕВ: Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М.,"Наука", 1974.

[4] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ: О бикомпактах, удовлетворяющих условию Суслина наследственно. Теснота и свободные последовательности, Докл. Акад. Наук СССР 199(1971), 1227-1230.

Московский Государственный Университет

Москва В-234

С С С Р

(Oblatum 12.2. 1979)