COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20,2 (1979)

О ЧИСЛЕ π И ТЕОРЕМЕ ЛИНДЕМАНА

Ю.В. НЕСТЕРЕНКО

Содержание: В статье предлагается сравнительно простое, без использования теории функций комплексного переменного, доказательство трансцендентности π и чисел e^{α} для действительных алгебраических α, отличных от нуля.

Ключевые слова: Трансцендентные и алгебраические числа, сопряженные числа, целое алгебраическое число, степень, знаменатель и норма алгебраического числа.

AM : 10 35

В 1873 г. Эрмит [1] опубликовал доказательство иррациональности числа π^2, основанное на некотором интегральном рождестве. Ниже предлагьются сравнительно простые доказательства трансцендентности числа π, а также действительного варианта теоремы Линдемана, обобщающие доказательство Эрмита.

Лемма 1. Пусть N, ν - натуральные числа, $N \geq \nu$, $p_0, p_1, \ldots, p_\nu$ - неотрицательные целые числа такие, что $p_0+p_1+\ldots+p_\nu+\nu=N$, $f(t)$ - N раз непрерывно дифференцируемая функция, σ - симплекс в $R^{\nu+1}$, задаваемый условиями $x_0+x_1+\ldots+x_\nu=1$, $x_j \geq 0$. Тогда для любых различных действительных чисел $z_0, z_1, \ldots, z_\nu$ справедливо равенство

$$(1)\quad \int_{\sigma}\prod_{j=0}^{\nu}\frac{x_j^{p_j}}{p_j!}\cdot f^{(N)}\left(\sum_{j=0}^{\nu}z_j\cdot x_j\right)dx_1\dots dx_\nu =$$

$$=\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{p_k}\frac{f^{(p_k-m)}(z_k)}{(p_k-m)!\cdot m!}\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^m\left[\frac{(x-z_k)^{p_k+1}}{Q(x)}\right]_{x=z_k},$$

где $Q(x)=\prod_{k=0}^{\nu}(x-z_k)^{p_k+1}$.

Доказательство. Докажем индукцией по ν, что

$$(2)\quad \int_{\sigma}f^{(\nu)}\left(\sum_{j=0}^{\nu}z_j\cdot x_j\right)dx_1\dots dx_\nu=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{f(z_k)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{\nu}(z_k-z_j)}.$$

Обозначим интеграл в левой части (2) через $\mathcal{J}_\nu(z_0,\dots,z_\nu)$ тогда для $\nu=1$ имеем

$$\mathcal{J}_1(z_0,z_1)=\int_0^1 f'[z_1\cdot x_1+z_0\cdot(1-x_1)]dx_1=\frac{1}{z_1-z_0}\cdot f[z_1\cdot x_1+z_0\cdot(1-x_1)]\Big|_0^1=\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}.$$

В общем случае ($\nu\geq 1$)

$$\mathcal{J}_{\nu+1}(z_0,z_1,\dots,z_{\nu+1})=$$

$$=\int_{\sigma}dx_1\dots dx_\nu\int_0^{1-x_1-\dots-x_\nu}f^{(\nu+1)}[z_0\cdot(1-x_1-\dots-x_{\nu+1})+z_1\cdot x_1+\dots+z_{\nu+1}\cdot x_{\nu+1}]dx_{\nu+1}=$$

$$=\int_{\sigma}dx_1\dots dx_\nu\int_0^{1-x_1-\dots-x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu+1}}\left(\frac{f^{(\nu)}[z_0\cdot(1-x_1-\dots-x_{\nu+1})+z_1\cdot x_1+\dots+z_{\nu+1}\cdot x_{\nu+1}]}{z_{\nu+1}-z_0}\right)dx_{\nu+1}=$$

$$=\frac{1}{z_{\nu+1}-z_0}\cdot[\mathcal{J}_\nu(z_{\nu+1},z_1,\dots,z_\nu)-\mathcal{J}_\nu(z_0,z_1,\dots,z_\nu)].$$

Отсюда немедленно следует (2) для $\nu+1$.

Применим к обеим частям равенства (2) дифференциальный оператор $\prod_{j=0}^{\nu}\frac{1}{p_j!}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^{p_j}$. В левой части тогда получится интеграл из (1), а в правой

$$\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{p_k!}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)^{p_k}\left[\frac{f(z_k)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{\nu}(z_k-z_j)^{p_j+1}}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{p_k!}\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{p_k}\left[f(x)\cdot\left[\frac{(x-z_k)^{p_k+1}}{Q(x)}\right]\right]_{x=z_k}=$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{p_k} \frac{f^{(p_k-m)} z_k}{(p_k-m)! \cdot m!} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\frac{(x-z_k)^{p_k+1}}{Q(x)} \right]_{x=z_k} .$$

Лемма доказана.

<u>Лемма 2</u>. Пустя $Q(x) = \prod_{k=0}^{\nu} (x-k)^{p_k+1}$, d - наименьшее общее кратное чисел $\{1,2,\dots,\nu\}$; $a_{k,m} = \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^m \cdot \left[\frac{(x-k)^{p_k+1}}{Q(x)}\right]_{x=k}$. Тогда для $m \le p_k$ имеем $d^N \cdot a_{k,m} \in \mathbb{Z}$ и с некоторой постоянной $c_1 = c_1(\nu) > 0$ выполнено неравенство

$$| d^N \cdot a_{k,m} | \le c_1^N .$$

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$a_{k,m} = \frac{1}{m!} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \Big[\prod_{\substack{s=0 \\ s \ne k}}^{\nu} (x-s)^{-p_s-1} \Big]_{x=k} =$$

$$= \sum_{\lambda_0 + \dots + \hat{\lambda}_k + \dots + \lambda_\nu = m} \prod_{s \ne k} \frac{(-1)^{\lambda_s} \cdot (p_s + \lambda_s)!}{p_s! \cdot \lambda_s!} \cdot (k-s)^{-p_s-1-\lambda_s} .$$

Поскольку $\sum_{\substack{s=0 \\ s \ne k}}^{\nu} (p_s + 1 + \lambda_s) \le \nu + \sum_{s=0}^{\nu} p_s = N$, то $d^N \cdot a_{k,m} \in \mathbb{Z}$ и $|d^N \cdot a_{k,m}| \le d^N \cdot 2^N \cdot \nu^{p_k} \le c_1^N$. Лемма доказана.

<u>Теорема 1</u> (Линдеман, [3]). Пусть α - действительное алгебраическое число, отличное от 0. Тогда e^α - трансцендентно.

<u>Доказательство</u>: Предположим, что e^α алгебраично и пусть ν - степень поля $\mathbb{Q}(\alpha, e^\alpha)$ над $\mathbb{Q}$. Положим $f(t) = e^{\alpha t}$, $z_k = k$, $k = 0,1,\dots,\nu$, и $p_0 = p_1 = \dots = p_\nu = n$, где n - достаточно большое целое число. Если $N = \nu + (\nu+1) \cdot n$, то по лемме 1

$$(3) \quad \mathcal{J} = \frac{\alpha^N}{(n!)^{\nu+1}} \cdot \int_{\sigma} \Big(\prod_{j=0}^{\nu} x_j\Big)^n \cdot e^{\alpha \cdot \sum_{j=1}^{\nu} j \cdot x_j} dx_1 \dots dx_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{n} \frac{\alpha^{n-m} \cdot e^{\alpha k}}{(n-m)!} \cdot a_{k,m}$$

Из этого равенства и леммы 2 следует, если a-знаменатель

α и e^{α}, что $\beta = n! \cdot a^{n+\nu} \cdot \mathcal{J}$ есть целое алгебраическое число, для которого $\overline{|\beta|} \leq n! \cdot c_2^n$ (здесь $\overline{|\beta|}$ обозначает максимум модулей чисел, сопряженных с β). Кроме того из (3) следует, что $\beta \neq 0$ и $|\beta| \leq \frac{c_3^n}{(n!)^{\nu}}$. Оценивая норму β, получаем $1 \leq |N(\beta)| \leq \frac{c_4^n}{n!}$, что невозможно при достаточно большом n. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Если α - положительное алгебраическое число, отличное от 1, то $\ln \alpha$ - трансцендентно.

<u>Теорема 2</u>. (Линдеман,[3]). π - трансцендентно.

Мы приведем ниже два доказательства теоремы 2. Оба они используют формулу (1), но отличаются выбором функции $f(t)$ и способом доказательства того, что соответствующий интеграл $\mathcal{J}$ отличен от нуля. В обоих будет предполагаться, что π - алгебраично, при этом степень и знаменатель π будут обозначаться соответственно $\varkappa$ и b.

<u>Доказательство 1.</u> Положим $\nu = \varkappa$ и пусть n - достаточно большое целое число. Функция $g(t) = (t-1)\cdot(t-2)\dots(t-\nu+1)\cdot \sin \pi t$ знакопостоянна на отрезке $[0,\nu]$, поэтому $g(x_1 + 2x_2 + \dots + \nu \cdot x_\nu)$ знакопостоянна на симплексе σ. Следовательно интеграл $\int_\sigma (\prod_{j=1}^{\nu} x_j)^n \cdot g(\sum_{s=1}^{\nu} s\cdot x_s) dx_1 \dots dx_\nu$ отличен от нуля. Если $\prod_{l=1}^{\nu-1} (x_1 + 2x_2 + \dots + \nu x_\nu - l) = \sum_{k_1+\dots+k_\nu<\nu} b_{\bar{k}} \cdot x_1^{k_1} \dots x_\nu^{k_\nu}$, то

$$\sum_{k_1+\dots+k_\nu<\nu} b_{\bar{k}} \cdot \int_\sigma (\prod_{j=0}^{\nu} x_j^{n+k_j}) \cdot \sin(\pi \cdot \sum_{s=1}^{\nu} s\cdot x_s) dx_1 \dots dx_\nu =$$
$$= \int_\sigma (\prod_{j=0}^{\nu} x_j)^n \cdot g(\sum_{s=1}^{\nu} s \cdot x_s) dx_1 \dots dx_\nu \neq 0$$

(здесь $k_0 = 0$), и потому существуют целые числа $p_0, \dots, p_\nu$, $p_j \geq n$, $\sum_{j=0}^{\nu} p_j < (\nu+1)\cdot n + \nu$ такие, что

(4) $\mathcal{J} = \int_{\sigma} \prod_{j=0}^{\nu} \frac{x_j^{p_j}}{p_j!} \cdot \sin(\pi \cdot \sum_{s=1}^{\nu} s \cdot x_s) dx_1 \dots dx_\nu \neq 0$.

Обозначим $N = \nu + p_0 + \dots + p_\nu$ и через $f(t)$ ту из четырех функций $\pm \sin \pi t$, $\pm \cos \pi t$, для которой $f^{(N)}(t) = \pi^N \cdot \sin \pi t$. По лемме 1

(5) $$\pi^N \cdot \mathcal{J} = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{p_k} \frac{f^{(p_k - m)}(k)}{(p_k - m)!} \cdot a_{k,m} .$$

Так как $f^{(p_k - m)}(k)$ есть $\pi^{p_k - m}$, умноженное на одно из трех чисел $\pm 1, 0$, то из (5) и леммы 2 получаем, что $\gamma = (n+\nu)! \cdot b^{n+\nu} \cdot d^N \cdot \mathcal{J}$ есть целое алгебраическое число. Оттуда же следует, что $\overline{|\gamma|} \leq n! \cdot c_5^n$, а из (4), что $|\gamma| \leq \frac{c_6^n}{(n!)^\nu}$. Оценивая теперь норму γ , получаем

$$1 \leq |N(\gamma)| \leq \frac{c_7^n}{n!} ,$$

что, при достаточно большом n , невозможно. Теорема доказана.

<u>Доказательство 2</u>. Пусть ν - целое число удовлетворяющее условию $\frac{\varphi(2\nu)}{\nu} \leq \varkappa^{-1}$ (здесь $\varphi(k)$ - функция Эйлера и последнее неравенство будет выполнено, если ν имеет достаточно много различных простых делителей), n - достаточно большое целое число. Положим $x_k = k$, $p_k = n$, $k = 0, 1, \dots, \nu$, тогда $N = (\nu+1) \cdot n + \nu$. Обозначим через $f(t)$ ту из четырех функций $\pm \sin \frac{\pi t}{\nu}$, $\pm \cos \frac{\pi t}{\nu}$, для которой $f^{(N)}(t) = \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^N \cdot \sin \frac{\pi t}{\nu}$.

По лемме 1

(6) $$\mathcal{J} = \frac{1}{(n!)^{\nu+1}} \cdot \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^N \cdot \int_{\sigma} \left(\prod_{j=0}^{\nu} x_j\right)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\nu} \cdot \sum_{s=1}^{\nu} s \cdot x_s\right) dx_1 \dots dx_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(n-m)}(k)}{(n-m)!} \cdot a_{k,m} .$$

Из (6) и леммы 2 следует, что $\delta = m! \cdot (\nu \cdot b)^m \cdot d^N \cdot \mathcal{J}$ есть целое алгебраическое число, причем

$$\overline{|\delta|} \le m! \cdot c_8^m, \quad |\delta| \le \frac{c_9^m}{(m!)^\nu}.$$

Подинтегральная функция в (6) неотрицательна, значит $\delta \neq 0$. Известно, что все числа $\sin \frac{\pi k}{\nu}$, $\cos \frac{\pi k}{\nu}$ содержатся в поле алгебраических чисел, имеющем степень над $\mathbb{Q}$ равную $\varphi(2\nu)$. Тогда степень δ над $\mathbb{Q}$ не превосходит $\varkappa \cdot \varphi(2\nu) \le \nu$. Оценивая норму δ получаем $1 \le |N(\delta)| \le \frac{c_{10}^m}{m!}$. Последние неравенства при достаточно большом m выполняться не могут. Теорема доказана.

Некоторые замечания.

1. Если взять $\nu = 1$ то интеграл $\mathcal{J}$ из равенства (6) примет вид $\mathcal{J} = \frac{\pi^{2m+1}}{(m!)^2} \cdot \int_0^1 x^m (1-x)^m \cdot \sin \pi x \, dx$.
Подобный интеграл использовался Эрмитом в доказательстве иррациональности π^2. Аналог равенства (6) при $\nu = 1$ получался интегрированием по частям. Точно так же и доказательство 1 при $\nu = 1$ переходит в доказательство Эрмита.

2) В доказательстве 1 мы предпочли с помощью искусственного приема установить наличие целых чисел $p_0, \dots, p_\nu$ близких к m, для которых интеграл (4) отличен от нуля. Подобное рассуждение вероятно первым использовал Стилтьес [4], получив с его помощью очень простое доказательство трансцендентности e. Фактически не трудно показать, что при $\nu \equiv 1 \pmod 4$ и достаточно большом m интеграл $\mathcal{J} = \int_\sigma (\prod_{j=0}^{\nu} x_j)^m \cdot \sin(\pi \cdot \sum_{s=1}^{\nu} s \cdot x_s) dx_1 \dots dx_\nu$ не равен нулю. Это следует из того, что при $m \to \infty$

$\mathcal{J} \sim (\nu+1)^{-n\cdot(\nu+1)-\nu-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{\nu}{2}}$ (см.[8], гл.П, § 4; $\mathcal{J}$ является интегралом Лапласа, функция $\prod_{j=0}^{\nu} x_j$ имеет в σ единственный максимум в точке $x_0 = \ldots = x_\nu = \dfrac{1}{\nu+1}$ и в этой точке $\sin(\pi \cdot \sum_{s=1}^{\nu} s \cdot x_s)$ принимает значение равное 1). Так как для доказательства трансцендентности π асимптотика не нужна, достаточно оценить интеграл $\mathcal{J}$ снизу, выделяя для этого малую окрестность точки $x_0 = \ldots = x_\nu = \dfrac{1}{\nu+1}$, в которой, скажем, $\sin(\pi \cdot \sum_{s=1}^{\nu} s \cdot x_s) \geq \dfrac{1}{2}$. Простые рассуждения по этому поводу мы оставляем читателям.

3) При $p_0 = 0$, $z_0 = z$ равенство (1) по существу представляет собой интерполяционную формулу Эрмита. Пусть $f(t)$ аналитически продолжается в некоторую область комплексной плоскости, содержащую точки $z_0, \ldots, z_\nu$. Если C - замкнутый спрямляемый контур в этой области внутри которого лежат точки $z_0, \ldots, z_\nu$, то, пользуясь теоремой о вычетах легко увидеть, что интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z)}{Qz}\,dz$ совпадает с правой частью (1).

В работе [2] Эрмит кроме того доказывает (при $p_0 = 0$) равентство

$$(7)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{Qz}\,dz = \int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{\nu-1}} f^{(N)}(u)\cdot\frac{(1-t_1)^{p_1}}{p_1!}\cdot\frac{(t_1-t_2)^{p_2}}{p_2!}\cdots$$

$$\cdots\frac{(t_{\nu-1}-t_\nu)^{p_\nu}}{p_\nu!}\cdot\frac{t_\nu^{p_0}}{p_0!}\,dt_1\ldots dt_\nu\;,$$

где $u = z_1 + (z_2 - z_1)\cdot t_1 + \ldots + (z_0 - z_\nu)\cdot t_\nu$. Интеграл же из правой части (7) с помощью замены $t_k = 1 - x_1 - \ldots - x_k$, $k = 1, \ldots, \nu$ легко преобразуется в интеграл из формулы (1).

Пусть совокупность точек $y_0, \ldots, y_N$ совпадает с совокупностью $\{x_k\}$, причем среди $\{y_j\}$ точка x_k появляется p_k+1 раз. Тогда все четыре указанных выше выражения совпадают с разделенной разностью $[y_0, \dots, y_N]$ порядка $N+1$ функции $f(t)$ (см.[6], гл.1, § 4). При различных N эти разности являются коэффициентами интерполяционного ряда для $f(t)$ с узлами в точках $y_0, y_1, y_2, \dots$.

4) Теорему Линдемана без применения тождества Эрмита доказал в 1930 г. А.О. Гельфонд (см.[7], стр. 33). Метод доказательства (с его помощью кроме того был решен некоторый случай 7-й проблемы Гильберта и, в частности, доказана трансцендентность числа e^{π} (основывался на рассмотрении интегралов

$$A_{\nu m+q} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\alpha z}dz}{[z\cdot(z-1)\dots(z-\nu+1)]^m\cdot(z-\nu)^q},$$

$q<m$, m - большое фиксированное число, ν - растет до бесконечности. Если $m > \frac{1}{\ln 2}\cdot|\alpha|$, то интерполяционный ряд с узлами в точках $0, 1, 2, \dots$ (каждая с кратностью m) сходится к $e^{\alpha z}$. Поскольку функция $e^{\alpha z}$ не явьяется многочленом, то среди $A_{\nu m+q}$ - коэффициентов разложения, имеются отличные от нуля для сколь угодно больших ν. Далее, используя представление $A_{\nu m+q}$ в виде правой части (1), А.О. Гельфонд подобно доказательству теоремы 1 получил противоречие с предположением об алгебраичности α, e^{α}.

5) В случае $f(t) = e^{x\cdot t}$ интеграл из формулы (1) использовал Энгель ([5], гл. 1, равенство (46)). В частности им получено доказательство действительного варианта теоремы Линдемана, аналогичное доказательству теоремы 1 ([5], гл. 1, § 10).

Литература

[1] Ch. HERMITE: Extrait d'une lettre de M.Ch. Hermite à M. Borchardt, Journ. für die reine und angew. Math., 76(1873), 342-344.

[2] Ch. HERMITE: Sur la formule d'interpolation de Lagrange, Journ. für die reine und angew. Math. 84 (1878), 70-79.

[3] F. LINDEMANN: Über die Zahl π, Math. Ann. 20(1882), 213-225.

[4] Th.J. STIELTJES: Sur la fonction exponentielle, Compt. Rend. 110(1890), 267-270.

[5] C.L. SIEGEL: Transcendental numbers, Princeton, 1949.

[6] А.О. ГЕЛЬФОНД: Исчисление конечных разностей, Изд. "Наука", Москва, 1967 г.

[7] А.О. ГЕЛЬФОНФ: Избранные труды, Изд. "Наука", Москва, 1973 г.

[8] М.В. ФЕДОРЮК: Метод перевала, Изд. "Наука", Москва, 1977 г.

Мех.-мат. факультет

Московский государственный университет им.М.В. Ломоносова

Москва В-234

С С С Р

(Oblatum 12.2. 1979)