COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
20,2 (1979)

О КОНСТРУКТИВНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДАНЖУА

(О. ДЕМУТ (O. DEMUTH)

Содержание: Заметка содержит дескриптивное определение и описание основных свойств конструктивных интегралов Данжуа и их сравнение с $\mathcal{Y}$-интегралом (см.[10]).

Ключевые слова: Узкий интеграл Данжуа, широкий интеграл Данжуа.

AMS: Primary 02E99, 26A39; Secondary 26A45

В следующем мы пользуемся без дальнейших ссылок обозначениями и определениями из [2],[3],[10] и [11], понятиями Π_1-чисел и Π_2-чисел из [7], обозначениями, связанными с псевдодифференцируемостью, из [7] - [9] и свойством $(N)^*$ из [6].

Определения. Пусть $\{F_m\}_m \in S$ (см. [2]).

1) Мы скажем, что функция $\mathcal{F}$ является

а) неопределенным узким интегралом Данжуа ($\mathcal{D}_*$ -интегралом) от $\{F_m\}_m$ на $0 \Delta 1$, если выполнено $ACG_*(\mathcal{F})$ & $Д(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$;

б) неопределенным $\mathcal{D}'$-интегралом от $\{F_m\}_m$ на $0 \Delta 1$, если выполнено $WACG_0(\mathcal{F})$ & $Д(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$ (ср. пример 4 из [11]);

в) неопределенным широким интегралом Данжуа ($\mathcal{D}$ -интегралом) от $\{F_m\}_m$ на $0 \Delta 1$, если выполнено $WACG(\mathcal{F})$ & $Д^{ap}(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$.

2) Мы скажем, что элемент $\{F_m\}_m$ является

а) $\mathcal{D}_*$ -интегрируемым (соотв. $\mathcal{D}'$ -интегрируемым, соотв.

$\mathcal{D}$-интегрируемым) на $0 \Delta 1$, если существует функция, являющаяся неопределенным интегралом соответствующего типа от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$;

б) интегрируемым по Лебегу (L-интегрируемым) на $0 \Delta 1$, если существует $\{G_n\}_n \in L_1$ (см. [2]) такое, что $\{F_n\}_n = \{G_n\}_n$.

Следует заметить, что соответствующие классические определения и результаты содержатся, например, в [1].

<u>Замечание 1</u>. 1) Для любых функции $\mathcal{F}$ и $\{F_n\}_n \in S$ выполнено $(Д(\mathcal{F}, \{F_n\}_n) \supset Д^{ap}(\mathcal{F}, \{F_n\}_n)) \& (Д^{ap}(\mathcal{F}, \{F_n\}_n) \& \exists x\, Var\, (x, \mathcal{F}, 0 \Delta 1) \supset Д(\mathcal{F}, \{F_n\}_n))$ (см. [11]).

2) Согласно теореме 2 из [2] и следствию теоремы 2 из [5] $\{F_n\}_n \in S$ является L-интегрируемым на $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если существует функция $\mathcal{F}$ такая, что $AC(\mathcal{F}) \& \& Д(\mathcal{F}, \{F_n\}_n)$, т.е. неопределенный интеграл Лебега (L-интеграл) от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$.

3) Ввиду теоремы 3 из [10] и теоремы 5 из [11] для всякого $\{F_n\}_n \in S$

а) любой неопределенный L-интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$ является неопределенным $\mathcal{D}_*$-интегралом (соотв. $\mathcal{Y}$-интегралом) от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$; любой неопределенный $\mathcal{D}_*$-интеграл (соотв. $\mathcal{D}'$-интеграл) от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$ является неопределенным $\mathcal{D}'$-интегралом (соотв. $\mathcal{D}$-интегралом) от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$;

б) из L-интегрируемости (соотв. $\mathcal{D}_*$-интегрируемости, соотв. $\mathcal{D}'$-интегрируемости) $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$ следует ввиду а) $\mathcal{D}_*$-интегрируемость и $\mathcal{Y}$-интегрируемость (соотв. $\mathcal{D}'$-интегрируемость, соотв. $\mathcal{D}$-интегрируемость) $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$.

4) Согласно теоремам 2 и 3 из [10] и теореме 6 из [11] для любых $\mathcal{K}$ такого, что

(1) $\mathcal{K} \equiv \mathcal{D}_* \vee \mathcal{K} \equiv \mathcal{D}' \vee \mathcal{K} \equiv \mathcal{D} \vee \mathcal{K} \equiv \mathcal{T}$,

$\{F_m^1\}_m \in S, \{F_m^2\}_m \in S$, функций $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ и КДЧ y_1 и y_2 выполнено: если для $i = 1, 2$ $\mathcal{F}_i$ неопределенный $\mathcal{K}$-интеграл от $\{F_m^i\}_m$ на $0 \Delta 1$, то $(y_1 \cdot \mathcal{F}_1 + y_2 \cdot \mathcal{F}_2)$ неопределенный $\mathcal{K}$-интеграл от $(y_1 \cdot \{F_m^1\}_m + y_2 \cdot \{F_m^2\}_m)$ на $0 \Delta 1$.

5) Если функция $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{K}$-интеграл от $\{F_m\}_m \in S$ на $0 \Delta 1$, где (1), и H сегмент, $H \subseteq 0 \Delta 1$, то ввиду теорем 5 и 7 из [11] и теоремы 1 и следствия 1 теоремы 10 из [10] верно $AC(\mathcal{F}^{[H]}) \equiv \exists x\ Var(x, \mathcal{F}, H)$.

Определение. Функцию $\mathcal{G}$ мы назовем надфункцией (соотв. подфункцией) для $\{F_m\}_m \in S$ на $0 \Delta 1$, если $\mathcal{G}$ равномерно непрерывна и существует $\{G_m\}_m \in S$ такое, что

$Д(\mathcal{G}, \{G_m\}_m) \& \{F_m\}_m \leq \{G_m\}_m \& \neg \exists \xi\, \underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{G}, \xi)$ (соотв. $Д(\mathcal{G}, \{G_m\}_m) \& \{G_m\}_m \leq \{F_m\}_m \& \neg \exists \xi\, \overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, \xi)$).

<u>Замечание 2</u>. Пусть $\mathcal{G}$ надфункция (соотв. подфункция) для $\{F_m\}_m \in S$ на $0 \Delta 1$, которая обладает свойством $(N)^*$. Тогда согласно замечанию 2 и теоремам 15 и 5 из [11] выполнено $ACG_*(\mathcal{G})$.

С помощью рассуждений из доказательства теоремы 10 из [10], теоремы 13 из [7], теорем 1 и 3 из [9], теоремы 3 и леммы 2 из [8] и теоремы 2 из [10] легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\mathcal{H}$ равномерно непрерывная функция и ξ $П_1Ч$ такие, что

(2) $\sigma_{\mathcal{H}}(\xi) \in \Pi_2 \& \neg\neg(\neg(\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{H}, \xi) \& \overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{H}, \xi)) \vee \neg\neg \exists m\, BVS(m, \mathcal{H}, 0 \Delta 1))$.

Тогда $0 < \xi < 1$ и не могут не существовать возрастающая на $0 \Delta 1$ функция g, удовлетворяющая условию Липшица на $0 \Delta 1$, и КДЧ ϑ такие, что

$$g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1 \,\&\, \mathcal{O}_{g^{-1}}(\xi) \in \Pi_2 \,\&\, \neg(\vartheta = 0) \,\&\, D_{\text{кл}}(0, g, \mathcal{O}_{g^{-1}}(\xi)) \,\&$$
$$\&\, D_{\text{кл}}(\vartheta, \mathcal{H} * g, \mathcal{O}_{g^{-1}}(\xi)) \,\&\, (\text{Д}(\mathcal{H}) \supset AC(g)).$$

На основании этой леммы и теоремы 3 и следствия 2 теоремы 7 из [10] мы сразу получаем следующее утверждение.

<u>Лемма 2.</u> Пусть $\mathcal{H}$ функция и ξ Π_1Ч такие, что $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \,\&$ $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}(\xi) \in \Pi_2$. Тогда для любой последовательности сегментов $\{H_n\}_n$, $\mathfrak{H}(\{H_n\}_n) \,\&\, \neg \exists n (\xi \in H_n)$, выполнено

$$\underline{D}_{\text{кл}}(-\infty, [\mathcal{H}, \{H_n\}_n], \xi) \,\&\, \overline{D}_{\text{кл}}(+\infty, [\mathcal{H}, \{H_n\}_n], \xi) \,\&$$
$$\&\, \neg \exists m\, BVS(m, [\mathcal{H}, \{H_n\}_n], 0 \Delta 1).$$

На основании результатов из [8] и [9], теорем 2 и 3 и следствия 2 теоремы 7 из [10] и леммы 1 легко доказать следующее.

<u>Лемма 3.</u> Пусть $\overline{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{H}$ равномерно непрерывные функции, $\{H_n\}_n$ последовательность сегментов и ξ Π_1Ч такие, что (2) и $\mathfrak{H}(\{H_n\}_n) \,\&\, \neg \exists n (\xi \in H_n) \,\&\, \neg\neg(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}(\xi) \in \Pi_1 \,\&$

$$\neg\neg(\neg(\underline{D}_{\text{кл}}(-\infty, \overline{\mathcal{F}}, \xi) \,\&\, \overline{D}_{\text{кл}}(+\infty, \overline{\mathcal{F}}, \xi)) \vee$$
$$\neg\neg \exists m\, BVS(m, [\overline{\mathcal{F}}, \{H_n\}_n], 0 \Delta 1)) \vee \mathcal{T}(\overline{\mathcal{F}}) \,\&\, \text{Д}(\mathcal{H})).$$

Тогда $\mathcal{O}_{(\overline{\mathcal{F}} + \mathcal{H})}(\xi) \in \Pi_2 \,\&\, \neg\neg(D_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{H}, \xi) \,\&$

$$\&\, D_{\text{кл}}(+\infty, [\overline{\mathcal{F}} + \mathcal{H}, \{H_n\}_n], \xi) \vee D_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{H}, \xi) \,\&$$
$$\&\, D_{\text{кл}}(-\infty, [\overline{\mathcal{F}} + \mathcal{H}, \{H_n\}_n], \xi)) \,\&\, (\neg(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}(\xi) = 0) \supset \mathcal{O}_{(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{H})}(\xi) \in \Pi_2).$$

<u>Замечание 3.</u> Согласно теореме 5 из [11] для любой функции $\mathcal{G}$, $WACG(\mathcal{G})$, верно: $\mathcal{G}$ равномерно непрерывна и $\text{Д}^{ap}(\mathcal{G}) \,\&\, \forall \xi (\xi \in \Pi_1 \supset \mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi) \in \Pi_1)$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $\{F_n\}_n \in S$ и $\{G_n\}_n \in S$, а $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ равномерно непрерывные функции такие, что

$$\text{Д}^{ap}(\mathcal{F}, \{F_n\}_n) \,\&\, \text{Д}^{ap}(\mathcal{G}, \{G_n\}_n) \,\&\, \{F_n\}_n \leq \{G_n\}_n \,\&$$
$$\& \, ((\mathrm{WACG}(\mathcal{F}) \vee \mathcal{Z}(\mathcal{F})) \,\&\, \forall \xi (\xi \in \Pi_1 \supset \sigma_{\mathcal{G}}(\xi) \in \Pi_1) \,\vee$$
$$\vee \, (\forall \xi (\xi \in \Pi_1 \supset \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_1) \vee \mathcal{Z}(\mathcal{F})) \,\&\, \neg \exists \xi \, \mathfrak{D}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{G}, \xi)) .$$

Тогда $(\mathcal{G} - \mathcal{F})$ неубывающая функция.

Доказательство. Мы можем предположить $\mathcal{F}(0) = \mathcal{G}(0)$. Достаточно доказать $0 \leq \mathcal{G}(1) - \mathcal{F}(1)$.

Мы допустим, что $\mathcal{G}(1) - \mathcal{F}(1) < 0$, и обозначим

$$(3) \qquad \varphi \rightleftharpoons (\mathcal{G} - \mathcal{F}) .$$

Согласно лемме 4 из [8] существуют КДЧ w и x и р.п. множество НЧ C такие, что

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\varphi(1) < w < x < 0 \,\&\, \mathcal{H}(C) \,\&\, \forall \ell (\ell \in C \supset w \cdot |\mathcal{L}\llcorner\ell\lrcorner| < \\ &< \Delta(\varphi, \mathcal{L}\llcorner\ell\lrcorner)) \,\&\, \forall x y (0 \leq x < y \leq 1 \supset \\ &\supset \Delta([\varphi, C], x \Delta y) < x \cdot |x \Delta y|) \end{aligned}$$

(что касается обозначений, см. замечание 1 из [10]).

Ввиду наших предположений сегменты $\mathcal{L}\llcorner\ell\lrcorner$, $\ell \in C$, образуют S_σ-множество меры 1, которое содержится в $0 \Delta 1$. Следовательно, верно $\text{Д}([\varphi, C])$, $[\varphi, C]$ убывающая на $0 \Delta 1$ функция и ввиду (4) и монотонности интеграла Лебега функция $[\varphi, C]$ не может быть абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$. Но тогда согласно теореме 1 из [10] и замечанию 2 из [11] не может не существовать $\text{П}_1\text{Ч}$ ξ, $\sigma_{[\varphi, C]}(\xi) \in \Pi_2$.

Пусть ξ $\text{П}_1\text{Ч}$, $\sigma_{[\varphi, C]}(\xi) \in \Pi_2$. Мы обозначим $\mathcal{H} \rightleftharpoons [\varphi, C]$ и $\overline{\mathcal{F}} \rightleftharpoons [\mathcal{F}, C]$ и заметим, что ввиду теоремы 3 из [10] и теоремы 7 из [11], (3), определения свойства WACG и леммы 4 из [8] не может не существовать последовательность сегментов $\{H_n\}_n$ такая, что

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\overline{\mathcal{H}}(\{H_n\}_n) \,\&\, \neg \exists n (\xi \in H_n) \,\&\, (\sigma_{\overline{\mathcal{F}}}(\xi) \in \Pi_1 \,\& \\ &\neg\neg \exists m \, \mathrm{BVS}(m, [\overline{\mathcal{F}}, \{H_n\}_n], 0 \Delta 1) \vee \mathcal{Z}(\overline{\mathcal{F}})). \end{aligned}$$

Пусть $\{H_n\}_n$ последовательность сегментов такая, что (5). Тогда мы на основании леммы 3 получаем $\sigma_{[\mathcal{G},C]}(\xi) \in \Pi_2 \,\&\, D_{\text{кл}}(-\infty, [[\mathcal{G}, C], \{H_n\}_n], \xi)$, что противоречит предполагаемым нами свойствам функции $\mathcal{G}$.

Итак, верно $0 \leq \mathcal{G}(1) - \mathcal{F}(1)$.

<u>Следствие 1</u>. Пусть $\{F_n\}_n \in S$ является $\mathcal{K}$-интегрируемым на $0 \Delta 1$, где (1). Тогда

1) если $\mathcal{G}$ равномерно непрерывная функция и выполнено $Д^{ap}(\mathcal{G}, \{F_n\}_n) \,\&\, \forall \xi (\xi \in \Pi_1 \supset \sigma_{\mathcal{G}}(\xi) \in \Pi_1)$, то $\mathcal{G}$ неопределенный $\mathcal{K}$-интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$;

2) любой неопределенный $\mathcal{I}$-интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$ является тоже неопределенным $\mathcal{K}$-интегралом от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$.

<u>Следствие 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{K}$-интеграл от $\{F_n\}_n \in S$ на $0 \Delta 1$, где (1), а $\mathcal{G}$ надфункция (соотв. подфункция) для $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$. Тогда функция $(\mathcal{G} - \mathcal{F})$ является неубывающей (соотв. невозрастающей).

На основании теоремы 3 из [10], теоремы 7 из [11] и замечания 1 мы получаем следующее утверждение.

<u>Следствие 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{K}$-интеграл от $\{F_n\}_n \in S$ на $0 \Delta 1$, где (1), а H сегмент, $H \subseteq 0 \Delta 1$. Тогда

1) если для почти всех КДЧ x из H верно $\exists y (0 \leq y \,\&\, P(y, \{F_n\}_n, x))$, то $\mathcal{F}^{[H]}$ неубывающая абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция;

2) $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если $\{F_n\}_n$ является L-интегрируемым на $0 \Delta 1$.

<u>Замечание 4</u>. Из следствия 3 непосредственно следует однозначность и монотонность $\mathcal{K}$-интеграла, где (1).

Следствие 4. $\{F_n\}_n \in S$ является L-интегрируемым на $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если $|\{F_n\}_n|$ является $\mathcal{K}$-интегрируемым на $0 \Delta 1$, где (1).

Доказательство. Достаточно использовать замечание 1, следствие 3 и леммы 1 и 3 из [2].

Ввиду замечания 1 и ввиду теорем 3 и 4 и леммы 1 из [2], [5], замечания 1 и теоремы 14 из [11] и теоремы 3 из [10] легко доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть для $\mathcal{K}$ верно (1), пусть $\{F_n\}_n \in S$ и g возрастающая на $0 \Delta 1$ функция, $AC(g) \& g(0) = 0 \& g(1) = 1 \& AC(g^{-1})$. Тогда существует $\{G_n\}_n \in S$ такое, что

1) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено
$\exists v w (P(v, \{F_n\}_n, g(x)) \& D(w, g, x) \& P(v \cdot w, \{G_n\}_n, x))$,

2) а) функция $\mathcal{F}$ является неопределенным $\mathcal{K}$-интегралом (соотв. L-интегралом) от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если $\mathcal{F} * g$ является неопределенным $\mathcal{K}$-интегралом (соотв. L-интегралом) от $\{G_n\}_n$ на $0 \Delta 1$ и, следовательно,

б) $\{F_n\}_n$ является $\mathcal{K}$-интегрируемым (соотв. L-интегрируемым) на $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если $\{G_n\}_n$ является $\mathcal{K}$-интегрируемым (соотв. L-интегрируемым) на $0 \Delta 1$.

Определения. 1) Множество КДЧ $\mathcal{L}$ мы назовем правильным, если $\forall x y ((x \in \mathcal{L} \supset x \in 0 \Delta 1) \& (x = y \supset (x \in \mathcal{L} \equiv y \in \mathcal{L})))$.

2) Согласно [3] правильное множество КДЧ $\mathcal{L}$ называется измеримым по Лебегу и КДЧ z мерой этого множества, если существует $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ такое, что $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) = z$ и для почти всех КДЧ x выполнено $x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv x \in \mathcal{L}$.

3) Пусть для $\overline{\mathcal{K}}$ выполнено

(6) $\overline{\mathcal{K}} \mathbin{\mathbf{x}} \mathcal{D}_* \vee \overline{\mathcal{K}} \mathbin{\mathbf{x}} \mathcal{D}' \vee \overline{\mathcal{K}} \mathbin{\mathbf{x}} \mathcal{D} \vee \overline{\mathcal{K}} \mathbin{\mathbf{x}} \mathcal{Y} \vee \overline{\mathcal{K}} \mathbin{\mathbf{x}} L$,

пусть $\{F_m\}_m \in S$, пусть $\mathcal{L}$ измеримое по Лебегу правильное множество КДЧ (соотв. пусть H сегмент, $H \subseteq 0 \Delta 1$) и пусть $\{\mathfrak{M}_m\}_m \in M$ такое, что для почти всех КДЧ x верно $x \in \{\mathfrak{M}_m\}_m \equiv x \in \mathcal{L}$ (соотв. $x \in \{\mathfrak{M}_m\}_m \equiv x \in H$).

а) Функцию $\mathcal{F}$ мы назовем неопределенным $\overline{\mathcal{K}}$-интегралом от $\{F_m\}_m$ на $\mathcal{L}$ (соотв. на H), если $\mathcal{F}$ неопределенный $\overline{\mathcal{K}}$-интеграл от $\{F_m\}_m \cdot \chi[\{\mathfrak{M}_m\}_m]$ на $0 \Delta 1$.

б) $\{F_m\}_m$ мы назовем $\overline{\mathcal{K}}$-интегрируемым на $\mathcal{L}$ (соотв. на H), если существует неопределенный $\overline{\mathcal{K}}$-интеграл от $\{F_m\}_m$ на $\mathcal{L}$ (соотв. на H).

На основании замечания 1, следствия 4 теоремы 1, замечания 4 из [3], теорем 2 и 3 из [10] и теоремы 7 из [11] мы получаем следующее утверждение.

<u>Лемма 4</u>. Пусть для $\mathcal{K}$ выполнено (1) и для $\overline{\mathcal{K}}$ выполнено (6), пусть $\{F_m\}_m \in S$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ измеримые по Лебегу правильные множества КДЧ такие, что мера $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ равна 0, и пусть H сегмент, $H \subseteq 0 \Delta 1$. Тогда

а) если элемент $\{F_m\}_m$ L-интегрируем на $0 \Delta 1$, то $\{F_m\}_m$ L-интегрируем на $\mathcal{L}$;

б) если $\{F_m\}_m$ $\mathcal{K}$-интегрируемый на $0 \Delta 1$ элемент, который не является L-интегрируемым на $0 \Delta 1$, то существует измеримое по Лебегу правильное множество КДЧ $\mathcal{N}$ такое, что $\{F_m\}_m$ не является $\mathcal{K}$-интегрируемым на $\mathcal{N}$;

в) если для $i = 1, 2$ функция $\mathcal{F}_i$ неопределенный $\overline{\mathcal{K}}$-интеграл от $\{F_m\}_m$ на $\mathcal{L}_i$, то $(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)$ неопределенный $\overline{\mathcal{K}}$-интеграл от $\{F_m\}_m$ на $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$;

г) если $\mathcal{F}$ неопределенный $\overline{\mathcal{K}}$ -интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$, то $\mathcal{F}^{[H]}$ неопределенный $\overline{\mathcal{K}}$ -интеграл от $\{F_n\}_n$ на H, т.е. на множестве $\Lambda x\,(x \in H)$.

Легко доказать следующее утверждение (см. теорему 5 из [10]).

<u>Теорема 3.</u> Пусть для T и U верно $(T \equiv AC \vee T \equiv \alpha \vee T \equiv WAC \vee T \equiv W\alpha)\ \&$ $\&\ (U \equiv G \vee U \equiv G_0 \vee U \equiv G_*)$, пусть $\mathcal{F}$ функция, а $\{x_m\}_m$ возрастающая последовательность КДЧ из $0 \triangledown 1$ такая, что $x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} 1$, пусть для $\mathcal{K}$ выполнено (1), пусть $\{F_n\}_n \in S$. Тогда

1) верно $(Д^{ap}(\mathcal{F}) \equiv \forall m\, Д^{ap}(\mathcal{F}^{[0 \Delta x_m]}))\ \&$ $(TU(\mathcal{F}) \equiv \forall m\, TU(\mathcal{F}^{[0 \Delta x_m]}))$;

2) $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{K}$ -интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если для всякого НЧ m функция $\mathcal{F}^{[0 \Delta x_m]}$ неопределенный $\mathcal{K}$ -интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta x_m$.

На основании леммы 3 из [3], теоремы 6 из [10], следствия теоремы 3 и теорем 10 и 12 из [11], замечания 1 и леммы 4 можно способом близким классическому (см. [1], стр. 257) доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 4.</u> Пусть для $\overline{\mathcal{K}}$ верно $(\overline{\mathcal{K}} \equiv \mathcal{D}_* \vee \overline{\mathcal{K}} \equiv \mathcal{D}' \vee \overline{\mathcal{K}} \equiv \mathcal{D})$, пусть $\{F_n\}_n \in S$, пусть $\{H_m\}_m$ S_σ -множество (соотв. слабо наследное S_σ -множество), $\overline{\mathcal{H}}(\{H_m\}_m)$, $\mathcal{F}$ функция, являющаяся неопределенным $\overline{\mathcal{K}}$ -интегралом (соотв. $\mathcal{I}$-интегралом) от $\{F_n\}_n$ на $\Lambda x (x \in 0 \Delta 1\ \&\ \neg \exists m\, (x \in H_m))$, и $\{F_m\}_m$ последовательность функций такая, что

1) для всякого НЧ m

а) если $\neg(H_m \subseteq 0 \Delta 1)$, то $\forall x (\mathcal{F}_m(x) = 0)$,

б) если $H_m \subseteq 0 \Delta 1$, то $\mathcal{F}_m$ неопределенный $\overline{\mathcal{K}}$-интеграл (соотв. $\mathcal{X}$-интеграл) от $\{F_n\}_n$ на H_m и $\mathcal{F}_m(0) = 0$

2) ряд $\sum_m \langle \omega, \mathcal{F}_m \rangle_\llcorner H_{m\lrcorner}$ сходится.

Тогда функция $(\mathcal{F} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m)$ является неопределенным $\overline{\mathcal{K}}$-интегралом (соотв. $\mathcal{X}$-интегралом) от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$.

Замечание 5. В случае $\overline{\mathcal{K}} \rightleftharpoons \mathcal{D}$ утверждение остается в силе, если условие 2) заменить на

2') ряд $\sum_m |\Delta(\mathcal{F}_m, H_m)|$ сходится и $\langle \omega, \mathcal{F}_m \rangle_\llcorner H_{m\lrcorner} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ функции такие, что $Д^{ap}(\mathcal{F})$ & $Д(\mathcal{G})$ & $\neg \exists \xi \underline{D}_{КЛ}(-\infty, \mathcal{G}, \xi)$ и $(\mathcal{G} - \mathcal{F})$ неубывающая функция. Тогда $Д(\mathcal{F})$ и существует возрастающая на $0 \Delta 1$ функция ψ такая, что

(7) $\alpha(\psi)$ & $\psi(0) = 0$ & $\psi(1) = 1$ & $AC(\psi^{-1})$,

(8) $\neg \exists \xi \underline{D}_{КЛ}(-\infty, \mathcal{F} * \psi^{-1}, \xi)$

и, следовательно, верно $W\alpha\, G_0(\mathcal{F})$.

Доказательство. Мы определим

$\psi_0 \rightleftharpoons \dfrac{1}{\Delta(\mathcal{G} - \mathcal{F}, 0 \Delta 1) + 1} \cdot (\mathcal{G} - \mathcal{F} + h_1)$ (h_1 - см. [11], стр. 472)

и $\psi \rightleftharpoons (\psi_0 - \psi_0(0))$. Для завершения доказательства достаточно использовать замечание 1, лемму 3 и теоремы 2 и 19 из [11] и теорему 2 из [10].

Теорема 5. Пусть $\{F_n\}_n \in S$ и $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция такая, что $Д^{ap}(\mathcal{F}, \{F_n\}_n)$ & $\forall \xi (\xi \in \Pi_1 \supset \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_1)$. Пусть $\mathcal{G}$ надфункция для $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$. Тогда

а) $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{D}'$-интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$, б) если $\mathcal{G}$ обладает свойством $(N)^*$, то $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{D}_*$-интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0\Delta 1$.

Доказательство. Ввиду теоремы 1 и леммы 5 и ввиду части 3 теоремы 5 из [11] $(\mathcal{G}-\mathcal{F})$ неубывающая функция и выполнено $WACG_0(\mathcal{F})$ & Д$(\mathcal{F},\{F_n\}_n)$. Если $\mathcal{G}$ дополнительно обладает свойством $(N)^*$, то согласно замечанию 2 и согласно теоремам 5 и 6 из [11] верно $ACG_*(\mathcal{F})$.

Теорема 6. Пусть $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{I}$-интеграл от $\{F_n\}_n \in S$ на $0\Delta 1$ и пусть существует надфункция для $\{F_n\}_n$ на $0\Delta 1$. Тогда $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{D}_*$-интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0\Delta 1$.

Доказательство. Согласно следствию 2 теоремы 1 и лемме 5 существует функция ψ такая, что ψ возрастает на $0\Delta 1$ и верно (7) и (8). Но тогда ввиду теоремы 3 из [10] верно $\mathcal{I}(\mathcal{F}*\psi^{-1})$ и, следовательно, по лемме 2 и по замечанию 2 из [11] $\mathcal{F}*\psi^{-1}$ обладает свойством $(T_1)^*$. На основании сказанного и теорем 15 и 14 из [11] существует последовательность S_σ-множества $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ такая, что $\alpha G_*(\mathcal{F},\{\{H_n^m\}_n\}_m)$. Отсюда мы согласно теореме 3 и следствию 1 теоремы 10 из [10] сразу получаем $ACG_*(\mathcal{F},\{\{H_n^m\}_n\}_m)$.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{D}_*$-интеграл от $\{F_n\}_n \in S$ на $0\Delta 1$, а p НЧ. Тогда существует неубывающая абсолютно непрерывная на $0\Delta 1$ функция $\mathcal{H}$ такая, что $\Delta(\mathcal{H},0\Delta 1) < 2^{-p}$ и функция $(\mathcal{F}+\mathcal{H})$ (соотв. $(\mathcal{F}-\mathcal{H})$) является надфункцией (соотв. подфункцией) для $\{F_n\}_n$ на $0\Delta 1$, обладающей свойством $(N)^*$.

Доказательство. Пусть $\{\{H_n^m\}_n\}_m$ последовательность S_σ-множеств такая, что $ACG_*(\mathcal{F}, \{\{H_n^m\}_n\}_m)$.

Пусть m НЧ. Согласно замечанию 1, теореме 5 и лемме 6 из [11] и теореме 2 из [10] существуют неубывающие абсолютно непрерывные на $0 \Delta 1$ функции $\mathcal{G}_m$ и $\mathcal{H}_m$ такие, что $\mathcal{H}_m = V\langle [\mathcal{F}, \{H_n^m\}_n], 0\rangle + \mathcal{G}_m \;\&$
$\& \forall \xi x y (\neg \exists n (\xi \in (H_n^m)^0) \;\&\; 0 \leq x \leq \xi \leq y \leq$
$\leq 1 \;\&\; x < y \supset |\Delta(\mathcal{F}, x \Delta y)| \leq \Delta(\mathcal{H}_m, x \Delta y)) \;\&\; \mathcal{H}_m(0) = 0$.

Ввиду леммы 1 из [4] существует НЧ q_m такое, что $V^+\langle \mathcal{H}_m, q_m\rangle < 2^{-p-m}$, где $V^+\langle \mathcal{H}_m, q_m\rangle$ неубывающая абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция (см. [11], стр. 472, и теорему 2 из [10]).

Мы определим $\mathcal{H} \rightleftharpoons \sum_{m=1}^{\infty} V^+\langle \mathcal{H}_m, q_m\rangle$. Тогда $\mathcal{H}$ неубывающая абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция, которая (ввиду сказанного, леммы 1 из [4] и теорем 5 и 6 из [11]) обладает требуемыми свойствами.

На основании приведенных выше результатов и леммы 3 из [2] легко доказать следующее утверждение.

Теорема 7. $\{F_n\}_n \in S$ является $\mathcal{D}_*$-интегрируемым на $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если существуют надфункция и подфункция для $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$, обладающие свойством $(N)^*$.

Замечание 6. 1) Согласно примеру 3 из [10] существует $\mathcal{Y}$-интегрируемый на $0 \Delta 1$ элемент множества S, который не является $\mathcal{D}$-интегрируемым на $0 \Delta 1$.

2) Согласно примеру 1 и следствию 1 теоремы 10 из [10] существуют $\{F_n\}_n \in S$ и функция $\mathcal{F}$, являющаяся неопределенным $\mathcal{Y}$-интегралом от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$, которая не

является абсолютно непрерывной ни на каком сегменте содержащемся в $0 \Delta 1$, но обладает согласно [11] свойством WAC. Итак, $\mathcal{F}$ неопределенный $\mathcal{D}'$-интеграл от $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$, но $\{F_n\}_n$ не является $\mathcal{D}_*$-интегрируемым на $0 \Delta 1$ (см. теорему 1 из [11] и следствие 1 теоремы 1). Следовательно, согласно теореме 6 не существует никакой надфункции (соотв. подфункции) для $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$.

3) Согласно замечанию 7 из [5] существуют возрастающая на $0 \Delta 1$ функция f и $\{F_n\}_n \in S$ такие, что $Д(f, \{F_n\}_n) \,\&\, 0 \leq \{F_n\}_n$ и $\{F_n\}_n$ не является L-интегрируемым на $0 \Delta 1$ и, следовательно,

а) f (соотв. $\mathcal{H}_0$, т.е. нулевая функция) является надфункцией (соотв. подфункцией) для $\{F_n\}_n$ на $0 \Delta 1$,

б) согласно следствию 4 теоремы 1 $\{F_n\}_n$ не является $\mathcal{K}$-интегрируемым на $0 \Delta 1$, где (1).

4) Исходя от покрытия Ψ из замечания 7 из [5], которое является регулярным, но не наследно регулярным (см. [10], стр. 499), легко построить $\mathcal{D}_*$-интегрируемый на $0 \Delta 1$ элемент множества S, неявляющийся $\mathcal{Y}$-интегрируемым на $0 \Delta 1$.

Пример 1. Существует функция $\mathcal{F}$ такая, что $ACG(\mathcal{F}) \,\&\, Д(\mathcal{F}) \,\&\, \neg WACG_0(\mathcal{F})$. Следовательно, существует $\mathcal{D}$-интегрируемый на $0 \Delta 1$ элемент множества S, который не является $\mathcal{D}'$-интегрируемым на $0 \Delta 1$.

<u>Лемма 7.</u> Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция такая, что $Д^{ap}(\mathcal{F}) \,\&\, \mathcal{Q}_{кл}(\mathcal{F})$. Тогда

(9) $$\forall \xi \, (\xi \in \Pi_1 \supset \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_1).$$

С помощью теоремы 2 и следствия 2 теоремы 4 из [10], теорем 5 и 6 из [11] и леммы 7 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть $\{\mathcal{F}_m\}_m$ последовательность равномерно непрерывных функций и $\mathcal{F}$ функция такие, что

(10) $$\forall m \; BVS(2^{-m}, \mathcal{F}_m - \mathcal{F}, 0 \triangle 1).$$

Пусть T слово, $T \equiv AC \vee T \equiv \alpha \vee T \equiv WAC \vee T \equiv W\alpha$. Тогда $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и выполнено $(\forall m \; \mathcal{Q}(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Q}(\mathcal{F}))\,\&$
$(\forall m \; \mathcal{Q}_{кл}(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Q}_{кл}(\mathcal{F}))\,\&\,(\forall m \exists x \; Var(x, \mathcal{F}_m, 0 \triangle 1) \supset$
$\supset \exists y \; Var(y, \mathcal{F}, 0 \triangle 1))\,\&\,(\forall m \; T(\mathcal{F}_m) \supset T(\mathcal{F}))\,\&\,(\forall m \; Д^{ap}(\mathcal{F}_m) \supset$
$\supset Д^{ap}(\mathcal{F}))\,\&\,(\forall m \; (WACG_0(\mathcal{F}_m)\,\&\,Д(\mathcal{F}_m)) \supset$
$\supset (WACG_0(\mathcal{F})\,\&\,Д(\mathcal{F})))$
и, если $\forall m \; WACG(\mathcal{F}_m)$, то $Д^{ap}(\mathcal{F})$ и (9).

Пример 2. Существуют последовательность функций $\{\mathcal{F}_m\}_m$ и функция $\mathcal{F}$ такие, что (10) и $\forall m \; (\mathcal{Y}(\mathcal{F}_m)\,\&\,ACG_*(\mathcal{F}_m))$ и, следовательно, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})\,\&\,WACG_0(\mathcal{F})$, но верно $\neg ACG_*(\mathcal{F})$.

Пример 3. Существуют последовательность функций $\{\mathcal{F}_m\}_m$ и функция $\mathcal{F}$ такие, что (10) и $\forall m \; WACG_0(\mathcal{F}_m)$ и, следовательно, $Д^{ap}(\mathcal{F})$ и (9), но верно $\neg WACG(\mathcal{F})$.

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York, 1937.

[2] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[3] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 463-492.

[4] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингу-

лярной и абсолютно непрерывной функции, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 587-610.

[5] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 687-711.

[6] ДЕМУТ О. и НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивных аналогах свойств (N) и (S), Comment. Math. Univ. Carolinae 14(1973), 565-582.

[7] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[8] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[9] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 111-126.

[10] ДЕМУТ О.: Об одном обобщении конструктивного интеграла Лебега, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 499-514.

[11] ДЕМУТ О.: О конструктивных аналогах обобщенно абсолютно непрерывных функций и функций обобщенной ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 19(1978), 471-487.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Malostranské nám. 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 1.12. 1978)