COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,4 (1977)

GEBIETSINVARIANZSATZ UND EIGENWERTAUSSAGEN FÜR KONZENTRIERENDE ABBILDUNGEN

Siegfried HAHN, Dresden

Inhalt: Auf der Grundlage eines vom Verfasser in [3] bewiesenen Homotopieerweiterungssatzes für konzentrierende Abbildungen werden ein Eigenwertsatz für konzentrierende mengenwertige Abbildungen und der Gebietsinvarianzsatz für k-konzentrierende ($0 \leq k < 1$) Vektorfelder in lokalkonvexen Räumen bewiesen. Das Hilfsmittel des Abbildungsgrades braucht nicht verwendet zu werden.

Schlüsselwörter: Homotopieerweiterungssatz, konzentrierende und k-konzentrierende Abbildungen, Nichtkompaktheitsmass.

AMS: 47H10 Ref. Ž.: 7.978.53

Einleitung. Ein wichtiges Hilfsmittel in der Theorie der nichtlinearen Operatorengleichungen stellen Homotopieerweiterungssätze dar. A. Granas zeigte zuerst für kompakte Abbildungen (s. z.B. [1]), dass sich die Existenzaussagen dieser Theorie in unendlichdimensionalen normierten Räumen auf der Grundlage eines Homotopieerweiterungssatzes ohne Verwendung der von Leray und Schauder benutzten Theorie des Abbildungsgrades beweisen lassen. Während für den Fall kompakter Abbildungen dieser (elementare) Zugang voll erschlossen ist ([2],[6],[10]), gab es bisher für die grössere Klasse der konzentrierenden Abbildungen keinen Homotopieerweiterungssatz, obwohl für die entsprechenden Vektorfelder das Hilfsmittel des Abbildungsgrades bzw. der Drehung schon einige

Jahre bekannt ist. In [3] bewies nun der Verfasser einen solchen Homotopieerweiterungssatz für konzentrierende mengenwertige Abbildungen in allgemeinen lokalkonvexen Räumen. Da der Abbildungsgrad bzw. die Drehung für diese Operatorenklasse im Falle allgemeiner lokalkonvexer Räume bisher nicht bekannt ist, erhalten wir nicht nur ein einfaches, sondern auch ein neues Hilfsmittel für den Beweis von Existenzaussagen in allgemeinen lokalkonvexen Räumen. In [3] demonstrierten wir dies am Antipodensatz von Borsuk und an Fixpunktaussagen.

Wir wollen in dieser Note den Homotopieerweiterungssatz verwenden, um eine Eigenwertaussage für mengenwertige konzentrierende Abbildungen (Abschnitt 3) und den Gebietsinvarianzsatz für k-konzentrierende ($0 \leq k < 1$) Vektorfelder (Abschnitt 4) in lokalkonvexen Räumen zu beweisen. Im Abschnitt 1 erklären wir einige Begriffe und Bezeichnungen und im Abschnitt 2 werden die für den Beweis unserer Hauptergebnisse nötigen Hilfsmittel bereitgestellt.

1. <u>Bezeichnungen und Begriffe</u>. Es seien X und Y zwei separierte topologische Räume und $\mathfrak{K}(Y)$ das System aller nichtleeren abgeschlossenen und konvexen Teilmengen von Y. Eine (mengenwertige) Abbildung $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(Y)$ heisse nach oben halbstetig auf X, wenn für jedes $x \in X$ folgendes gilt: Zu jeder offenen Teilmenge W von Y mit $F(x) \subset W$ existiert eine Umgebung U von x , so dass $F(U) \subset W$ erfüllt ist. Die Abbildung $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(Y)$ heisse kompakt, wenn F auf X nach oben halbstetig und F(X) relativ kompakt in Y ist. Ist Y ein topologischer Vektorraum, so heisst $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(Y)$ finit,

wenn F kompakt und F(X) in einem endlichdimensionalen (linearen) Teilraum von Y enthalten ist. Speziell enthalten die kompakten Abbildungen $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(Y)$ natürlich die kompakten punktwertigen Abbildungen $F: X \longrightarrow Y$.

Definition 1. Es seien E ein reeller, separierter lokalkonvexer topologischer Vektorraum, $\mathfrak{M}$ ein System von Teilmengen von E, dass mit jeder Menge M auch deren abgeschlossene, konvexe Hülle $\overline{co}\langle M\rangle$ enthält. Weiter sei $(A, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Als Nichtkompaktheitsmass (NKM) in E bezeichnet man jede Funktion $\psi: \mathfrak{M} \longrightarrow A$, für die $\psi(\overline{co}\langle\Omega\rangle) = \psi(\Omega)$ $(\Omega \in \mathfrak{M})$ gilt.

Wir untersuchen NKM mit folgenden Eigenschaften:

(1) Aus $\Omega' \subset \Omega$ folgt $\psi(\Omega') \leq \psi(\Omega)$ $(\Omega, \Omega' \in \mathfrak{M})$.

(2) Für jedes $\Omega \in \mathfrak{M}$, $x_0 \in E$ gilt $\psi(\Omega \cup \{x_0\}) = \psi(\Omega)$.

(3) $\psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)\}$ $(\Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{M})$.

(4) $\psi(-\Omega) = \psi(\Omega)$ $(\Omega \in \mathfrak{M})$.

(5) $\psi(t\Omega) = |t|\,\psi(\Omega)$ $(\Omega \in \mathfrak{M}$, t reell).

(6) $\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$ $(\Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{M})$.

(7) A sei eine Teilmenge eines halbgeordneten linearen Raumes mit $o \in A$, und es gilt $\psi(\Omega) = o$ genau dann, wenn Ω präkompakt ist.

Beispiele für NKM in lokalkonvexen Räumen, die alle Eigenschaften (1) bis (7) haben, liefern das Kuratowskische und das Hausdorffsche NKM (vgl. [5],[15]).

Bei den folgenden Begriffen orientieren wir uns an [5].

Definition 2. Es seien E, $\mathfrak{M}$, A wir in Definition 1 erklärt. Weiter sei $\psi: \mathfrak{M} \longrightarrow A$ ein NKM in E, M eine Teilmenge von E und B ein topologischer Raum. Die auf $M \times B$ nach oben halbstetige Funktion $H: M \times B \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ heisse (ψ)-konzentrierend, wenn für jedes $\Omega \subset M$ sowohl Ω als auch $F(\Omega \times B)$ zu $\mathfrak{M}$ gehört und wenn die Ungleichung $\psi(\Omega) \leqq \psi(F(\Omega \times B))$ nur für relativ kompakte Mengen $F(\Omega \times B)$ bestehen kann.

Sei k eine nichtnegative reelle Zahl und A der Kegel der nichtnegativen Elemente in einem halbgeordneten linearen Raum. Die nach oben halbstetige Funktion $H: M \times B \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ heisst (k, ψ)-konzentrierend, wenn für jedes $\Omega \subset M$ sowohl Ω als auch $F(\Omega \times B)$ zu $\mathfrak{M}$ gehört und die Ungleichung $\psi(F(\Omega \times B)) \leqq k\,\psi(\Omega)$ gilt.

<u>Definition 3</u>. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, M eine Teilmenge von E und B ein topologischer Raum. Weiter sei ψ ein NKM in E mit den Eigenschaften (1) und (2) sowie $H: M \times B \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ eine (ψ)-konzentrierende Abbildung. Eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge S von E mit $M \cap S \neq \emptyset$ und $H((M \cap S) \times B) \subset S$, für die $H((M \cap S) \times B)$ relativ kompakt is, heisse charakteristische Menge für H.

Man vergleiche hierzu den Begriff der Fundamentalmenge (s. z.B. [13],[15]). Jede konzentrierende Abbildung H (bezüglich eines NKM, das die Eigenschaften (1) und (2) hat) besitzt bekanntlich eine charakteristische Menge, die eine beliebig vorgegebene endliche Anzahl von Elementen aus E enthält. Hat das NKM noch die Eigenschaften (3) und (4), so existiert sogar eine symmetrische charakteristische Menge für H. Ein einfacher Beweis dieses Sachverhalts (ohne transfinite Induktion oder Verwendung des Zornschen Lemmas) wurde z.B. in [3] angegeben. Man beweist leicht (s. z.B. [5]) folgende Aussage.

Anmerkung 1. Es seien E ein quasivollständiger (s. z.B. [7]) lokalkonvexer Raum, M eine Teilmenge von E und B ein topologischer Raum. Weiter sei ψ ein NKM in E, das die Eigenschaft (7) besitzt und k eine reelle Zahl aus $[0,1)$. Dann ist jede (k,ψ)-konzentrierende Abbildung $H: M\times B \longrightarrow E$ auch (ψ)-konzentrierend.

Wir erinnern schliesslich noch an den Begriff der Homotopie zwischen zwei Abbildungen. Sei E ein lokalkonvexer Raum, A, B uns S Teilmengen von E mit $A\subset B$. Zwei kompakte (bzw. (ψ)-konzentrierende) Abbildungen $F_i: B \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ $(i = 1,2)$ mit $F_i(B)\subset S$ $(i = 1,2)$, die auf A fixpunktfrei sind, heissen homotop auf A bezüglich S, wenn es eine kompakte (bzw. (ψ)-konzentrierende) Abbildung $H: A\times [0,1] \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ mit $H(A\times[0,1])\subset S$, $x\notin H(x,t)$ $(x\in A, t\in[0,1])$ und $H(x,0) = F_1(x)$, $H(x,1) = F_2(x)$ gibt. Eine Teilmenge A eines Vektorraumes E heisse sternförmig, wenn aus $x\in A$ und $t\in[0,1]$ stets $tx\in A$ folgt. A nennen wir symmetrisch, wenn mit x auch $(-x)$ zu A gehört. Sind a und b zwei reelle Zahlen mit $a\leq b$, so bezeichnen wir mit $[a,b]A$ die Menge $M = \{z\in E \mid z = \lambda x, \lambda\in[a,b], x\in A\}$.

2. Approximationsunwesentliche konzentrierende Abbildungen.und Hilfssätze. In [2] bewiesen wir für kompakte Abbildungen in (nichtnotwendig lokalkonvexen) topologischen Vektorräumen und in [3] für konzentrierende mengenwertige Abbildungen Homotopieerweiterungssätze, die anstelle des Abbildungsgrades als nützliches Hilfsmittel in der Theorie der nichtlinearen Operatorengleichungen verwendet werden können. Wir wie-

derholen hier einige Definitionen und Sätze aus [3], die wir im folgenden benötigen.

<u>Definition 4</u>. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, X und Y zwei abgeschlossene Teilmengen von E mit $X \subset Y$ und R eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E mit $R \supset Y$ sowie ψ ein NKM in E mit den Eigenschaften (1), (2) und $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(R)$ eine (ψ)-konzentrierende, fixpunktfreie Abbildung. Weiterhin sei S eine charakteristische Menge für F mit $R \cap S \neq \emptyset$. Die Abbildung F heisse approximationsunwesentlich bezüglich $(X \cap S, Y \cap S, \mathfrak{K}(R \cap S))$, wenn zu jeder Nullumgebung V aus E ein endlichdimensionaler Teilraum E_V von E mit $X \cap R \cap S \neq \emptyset$ und eine kompakte, fixpunktfreie Abbildung $F_V: X \cap S \longrightarrow \mathfrak{K}(E_V \cap R \cap S)$ existieren, für die $F_V(x) \subset F(x) + V$ $(x \in X \cap S)$ gilt und deren Einschränkung $F_V | X \cap S \cap E_V$ eine fixpunktfreie Erweiterung $\tilde{F}_V: Y \cap S \cap E_V \longrightarrow \mathfrak{K}(E_V \cap R \cap S)$ auf $Y \cap S \cap E_V$ besitzt.

<u>Anmerkung 2</u>. Es seien E, X, Y, R, ψ und F wie in Definition 4 erklärt. Dann gilt

(a) Hat F eine (ψ)-konzentrierende fixpunktfreie Erweiterung $\tilde{F}: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(R)$, so ist für jede charakteristische Menge S von $\tilde{F}$ mit $S \cap R \neq \emptyset$ die Abbildung F approximationsunwesentlich bezüglich $(X \cap S, Y \cap S, \mathfrak{K}(R \cap S))$.

(B) Sei T eine charakteristische Menge für F mit $T \cap R \neq \emptyset$. Ist F finit und approximationsunwesentlich bezüglich $(X \cap T, Y \cap T, \mathfrak{K}(R \cap T))$, so existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E mit $X \cap T \cap E_0 \neq \emptyset$, so dass $F | X \cap T \cap E_0$ eine fixpunktfreie Erweiterung $\tilde{F}: Y \cap T \cap E_0 \longrightarrow \mathfrak{K}(R \cap T \cap E_0)$ hat.

Diese Aussage zeigt, dass jede unwesentliche (ψ)-konzentrierende Abbildung $F: X \longrightarrow \mathfrak{K}(R)$ (d.h., F hat eine fixpunktfreie (ψ)-konzentrierende Erweiterung $\tilde{F}: Y \longrightarrow \mathfrak{K}(R)$) auch approximationsunwesentlich ist. Für finite Abbildungen gilt im gewissen Sinne die Umkehrung. Man erkennt leicht, dass in endlichdimensionalen normierten Räumen die Begriffe "approximationsunwesentlich" und "unwesentlich" die gleiche Bedeutung haben. Grundlage für unsere Note ist der folgende Homotopieerweiterungssatz.

<u>Satz 1</u>. Es seien E, X, Y, R und ψ wie in Definition 4 erklärt. Weiter seien $F_i: X \longrightarrow \mathfrak{K}(R)$ $(i = 1,2)$ zwei fixpunktfreie, (ψ)-konzentrierende Abbildungen, die mittels der (ψ)-konzentrierenden Abbildung $H: X \times [0,1] \longrightarrow \mathfrak{K}(R)$ homotop sind. Ist S eine charakteristische Menge für H mit $S \cap R \neq \emptyset$ und F_1 approximationsunwesentlich bezüglich $(X \cap S,\ Y \cap S,\ \mathfrak{K}(R \cap S))$, so gilt dies auch für F_2.

Definition 4, Anmerkung 2 und Satz 1 wurden in [3] für den Spezialfall $R = E$ formuliert. Die Beweise der letzten beiden Aussagen können auch für beliebiges abgeschlossenes, konvexes R so wie die entsprechenden Beweise in [3] geführt werden. Deshalb verzichten wir hier darauf.

Wir zitieren noch einige (im wesentlichen bekannte) Ergebnisse, die wir als Hilfsmittel benötigen.

<u>Anmerkung 4</u>. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, M eine abgeschlossene Teilmenge von E sowie $F: M \longrightarrow \mathfrak{K}(E)$ eine Abbildung. Weiter sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt.

(a) F ist kompakt.

(b) E ist metrisierbar und F konzentrierend bezüglich eines NKM, das die Eigenschaften (1), (6), (7) hat.

Dann ist $A = \{ z \in E \mid z \in x - F(x),\ x \in M \}$ abgeschlossen.

Für kompakte Abbildungen ist diese Aussage wohlbekannt (s. z.B. [9]). Den anderen Fall beweist man mit ähnlichen Argumenten, wie sie in [12, S. 724] angegeben sind.

Anmerkung 5. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, M eine abgeschlossenen und S eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E. Weiter seien ψ ein NKM in E, das (1) und (3) erfüllt, $F\colon M \longrightarrow \mathfrak{K}(S)$ eine (ψ)-konzentrierende Abbildung mit $x \notin F(x)$ $(x \in M)$ sowie V eine sternförmige Nullumgebung aus E derart, dass $\{x - F(x)\} \cap V = \emptyset (x \in M)$ gilt. Dann ist jede (ψ)-konzentrierende Abbildung $G\colon M \longrightarrow \mathfrak{K}(S)$ mit $G(x) \subset F(x) + V$ $(x \in M)$ fixpunktfrei und auf A zu F bezüglich S homotop.

Diesen Sachverhalt beweist man leicht mit der Homotopie $H(x,t) = t\, F(x) + (1 - t)\, G(x)$ $(x \in M,\ t \in [0,1])$.

3. Eigenwertaussagen für konzentrierende mengenwertige Abbildungen

Satz 2. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E und ψ ein NKM in E mit den Eigenschaften (1), (2), (3). Weiter sei R eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E mit $\partial W \cap R \neq \emptyset$, $o \in R$ und $F\colon \partial W \cap R \longrightarrow \mathfrak{K}(R)$ eine (ψ)-konzentrierende Abbildung. Es existiere ein $y_0 \in R \setminus W$ derart, dass $x \notin t\, F(x) + (1 - t) y_0$ $(x \in \partial W \cap R,\ t \in [0,1])$ gilt. Dann gibt es ein $u_0 \in \partial W \cap R$ und ein $\lambda_0 > 1$ mit $\lambda_0 u_0 \in F(u_0)$.

Beweis. Wir setzen

$$H(x,t) = \begin{cases} 2t\, F(x) & (x \in \partial W \cap R,\ t \in [0,\tfrac{1}{2}]) \\ (2 - 2t) F(x) + (2t - 1) y_0 & (x \in \partial W \cap R,\ t \in [\tfrac{1}{2},1]) \end{cases}$$

Man erkennt leicht, dass für jedes $A \subset \partial W \cap R$ die Beziehung

$$H(A \times [0,1]) \subset [\overline{co} \langle F(A) \cup \{o\} \rangle \cup \overline{co} \langle F(A) \cup \{y_0\} \rangle]$$

gilt. Aus den Eigenschaften des NKM und der Abbildung F folgt, dass H eine (ψ)-konzentrierende Abbildung von $(\partial W \cap R) \times [0,1]$ in $\mathfrak{K}(R)$ ist. Mit den Festlegungen $G_1(x) = \{o\}$ $(x \in \partial W \cap R)$, $G_2(x) = \{y_0\}$ $(x \in \partial W \cap R)$ gilt $H(x,0) = G_1(x)$, $H(x,1) = G_2(x)$ $(x \in \partial W \cap R)$. Wir nehmen nun an, es wäre für alle $x \in \partial W \cap R$ und für alle $\lambda > 1$ stets $\lambda x \notin F(x)$ gültig. Daraus und aus der Voraussetzung unseres Satzes folgt $x \notin H(x,t)$ $(x \in \partial W \cap R,\ t \in [0,1])$. Somit sind die ($\psi$)-konzentrierenden Abbildungen G_1 und G_2 homotop auf $\partial W \cap R$ bezüglich R. Sei nun S eine charakteristische Menge für H, die o und y_0 enthält. Durch $\tilde{G}_2(x) = \{y_0\}$ $(x \in W \cap R)$ ist eine fixpunktfreie (ψ)-konzentrierende mengenwertige Erweiterung auf ganz $W \cap R$ erklärt. Offenbar ist S auch charakteristisch für $\tilde{G}_2$. Nach Anmerkung 2 (a), ist G_2 approximationsunwesentlich bezüglich $(\partial W \cap R \cap S,\ W \cap R \cap S,\ \mathfrak{K}(R \cap S))$. Wegen Satz 1 ist dies dann auch G_1. Aus Anmerkung 2 (b), folgt dann die Existenz eines endlichdimensionalen Teilraums E_0 von E mit $S \cap R \cap E_0 \neq \emptyset$, $\partial W \cap S \cap R \cap E_0 \neq \emptyset$, so dass $G_1 \mid \partial W \cap R \cap S \cap E_0$ eine fixpunktfreie Erweiterung $\tilde{G}_1 : W \cap R \cap S \cap E_0 \longrightarrow \mathfrak{K}(R \cap S \cap E_0)$ hat. Dann ist durch

$$G(x) = \begin{cases} \tilde{G}_1(x) & x \in W \cap R \cap S \cap E_0 \\ o & x \in (R \cap S \cap E_0) \setminus W \end{cases}$$ eine kompakte Abbildung

von $R \cap S \cap E_0$ in $\mathfrak{K}(R \cap S \cap E_0)$ erklärt. Weil $R \cap S \cap E_0$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E_0 ist, hat G nach dem bekannten Fixpunktsatz von Kakutani [4] einen Fixpunkt. Dies widerspricht aber der Beziehung $x \notin \tilde{G}_1(x)$ $(x \in W \cap R \cap S \cap E_0)$.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Diese Eigenwertaussage stammt für den Spezialfall kompakter (punktwertiger) Abbildungen in vollständigen metrisierbaren lokalkonvexen Räumen und $R = E$ von T. Riedrich [14]. Setzt man im Falle kompakter Abbildungen für R einen abgeschlossenen Kegel K (d.h., K ist eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E, für die mit $x \in K$ auch $tx \in K$ $(t \geq 0)$ gilt, nicht aber $(-x) \in K$, sofern $x \neq o$ ist), so lässt sich aus Satz 2 die bekannte Eigenwertaussage von M.A. Krasnoselski [8] folgern. Danach hat F einen positiven Eugenwert, wenn nur $o \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$ gilt. Einfache Beispiele zeigen, dass dieser Satz und auch der Eigenwertsatz von Birkhoff und Kellogg (s.z.B. [1]) für die Klasse der konzentrierenden und sogar für die Klasse der k-konzentrierenden $(0 < k < 1)$ Abbildungen nicht gilt (vgl. [11]). Um eine teilweise Ubertragung dieser Sätze auf konzentrierende Abbildungen vornehmen zu können, muss offenbar die Voraussetzung $o \notin \overline{F(\partial W \cap K)}$ durch schärfere Forderungen an die Lagebeziehung der Bildmenge ersetzt werden. Aus Satz 2 folgt unter diesem Aspekt die folgende Aussage.

<u>Satz 3</u>. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, R eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E mit $o \in R$, $\partial W \cap R \neq \emptyset$ und ψ ein NKM in E mit den Eigenschaften (1), (2) und (3). Weiter sei $F: \partial W \cap R \longrightarrow \mathfrak{K}(R)$ eine (ψ)-konzentrierende Abbildung. Es existiere eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge M von E derart, dass $F(\partial W \cap R) \subset M$ und $M \cap W = \emptyset$ gilt. Dann gibt es ein $\lambda_0 > 1$ und ein $u_0 \in \partial W \cap R$ mit $\lambda_0 u_0 \in F(u_0)$.

Zum Beweis wählen wir y_0 aus M und wenden Satz 2 an.

4. Der Gebietsinvarianzsatz für k-konzentrierende $(0 \leq k < 1)$ Vektorfelder

Hilfssatz 1. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, W eine symmetrische, offene Nullumgebung aus E, R eine abgeschlossene, konvexe und symmetrische Teilmenge von E mit $o \in R$ und $R \cap \partial W \neq \emptyset$, ψ ein NKM mit den Eigenschaften (1) - (4) und $F: \partial W \cap R \longrightarrow R$ eine fixpunktfreie (ψ)-konzentrierende Abbildung. Ferner sei S eine symmetrische charakteristische Menge für F mit $R \cap S \neq \emptyset$. Gilt $F(x) = -F(-x)$ $(x \in \partial W \cap R)$, so ist F nicht approximationsunwesentlich bezüglich $(\partial W \cap R \cap S, \overline{W} \cap R \cap S, R \cap S)$.

Beweis. Angenommen, es existiert eine symmetrische charakteristische Menge S von F derart, dass F approximationsunwesentlich ist. Wegen $x \neq F(x)$ $(x \in \partial W \cap R \cap S)$ finden wir unter Beachtung von Anmerkung 4 eine Nullumgebung V mit $x - f(x) \notin V$ $(x \in \partial W \cap R \cap S)$. Sei U eine symmetrische, konvexe Nullumgebung, für die $U + U \subset V$ gilt. Nach unserer Annahme gibt es einen endlichdimensionalen Teilraum E_0 von E mit $R \cap S \cap E_0 \neq \emptyset$, $\partial W \cap R \cap S \cap E_0 \neq \emptyset$ und eine finite Abbildung F_U: $: \partial W \cap R \cap S \longrightarrow R \cap S \cap E_0$ mit $F_U(x) - F(x) \in U$ $(x \in \partial W \cap R \cap S)$, deren Einschränkung $F_U|\partial W \cap R \cap S \cap E_0$ eine kompakte fixpunktfreie Erweiterung $\tilde{F}_U: \overline{W} \cap R \cap S \cap E_0 \longrightarrow R \cap S \cap E_0$ besitzt. Wir setzen $W_0 = W \cap E_0$, $K_0 = R \cap S \cap E_0$ und bezeichnen mit $\partial_0 W_0$ den Rand von W_0 bezüglich der induzierten Topologie von E_0. Es sei $F_0(x) = \frac{1}{2}[F_U(x) - F_U(-x)]$ $(x \in \partial_0 W_0 \cap K_0)$.
$F_0: \partial_0 W_0 \cap K_0 \longrightarrow K_0$ ist offenbar ungerade und kompakt. Weil

auch F ungerade ist, gilt $F_0(x) - F_U(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F_U(x)] +$ $+ \frac{1}{2}[F(-x) - F_U(-x)] \in \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$ $(x \in \partial_0 W_0 \cap K_0)$. Ferner folgt aus der Wahl von U die Relation $x - F_U(x) \notin U (x \in \partial_0 W_0 \cap$ $\cap K_0)$. Nach Anmerkung 5 sind daher F_0 und F_U in $\partial_0 W_0 \cap K_0$ bezüglich K_0 homotop. Aus Satz 1 folgt dann die Existenz einer Erweiterung $\tilde{F}_0 : \overline{W}_0 \cap K_0 \longrightarrow K_0$. Weil W_0 eine offene, symmetrische Nullumgebung in E_0 und K_0 eine abgeschlossene, konvexe und symmetrische Teilmenge von E_0 ist, steht das im Widerspruch zum Antipodensatz von Borsuk in endlichdimensionalen Räumen (der auch für diesen Definitionsbereich gültig ist).

Aus Hilfssatz 1 folgt mit Anmerkung 2 (a) sofort, dass unter den gegebenen Voraussetzungen F keine Fixpunktfreie konzentrierende Erweiterung $\tilde{F}: \overline{W} \cap R \longrightarrow R$ hat (s. auch [3], Satz 43).

<u>Hilfssatz 2</u>. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, ψ ein NKM mit den Eigenschaften (1) - (6) und k eine nichtnegative reelle Zahl. Weiter sei W eine sternförmige, abgeschlossene Nullumgebung aus E und $F: W \longrightarrow E$ eine (k, ψ)-konzentrierende Abbildung. Dann ist auch die durch $H(x,t) = F(\frac{x}{1+t}) -$ $- F(\frac{-tx}{1+t})$ $(x \in \partial W,\ t \in [0,1])$ erklärte stetige Abbildung $H: \partial W \times [0,1] \longrightarrow E$ stets (k, ψ)-konzentrierend.

<u>Beweis</u>. Sei ε eine beliebige reelle positive Zahl. Wir wählen ein $n(\varepsilon)$ derart, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt. Sei nun A eine beliebige Teilmenge von ∂W. Es gilt $\psi(H(A \times [0,1])) =$ $= \max_{j=0,\dots,n-1} \{\psi(H(A \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]))\}$ und $H(A \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]) \subset$ $\subset F([\frac{n}{n+j+1}, \frac{n}{n+1}]A) - F(-[\frac{j}{n+j}, \frac{j+1}{n+j+1}]A)$. Weiter-

hin erkennt man leicht die Relationen $[\frac{n}{n+j+1},\frac{n}{n+j}]A =$
$\frac{n}{n+j}A[\frac{n+j}{n+j+1}, 1] \subset \overline{co}\langle \frac{n}{n+j}A \cup \{o\}\rangle$ und
$[\frac{j}{n+j},\frac{j+1}{n+j+1}]A \subset \frac{j+1}{n+j+1}A[\frac{j}{j+1}, 1] \subset \overline{co}\langle \frac{j+1}{n+j+1}A \cup$
$\cup \{o\}\rangle$ $(j = 0,\ldots,n-1)$. Die rechts stehenden Mengen sind in W enthalten, weil W sternförmig ist. Aus den Eigenschaften von ψ und F folgt

$$\psi(H(A\times[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}])) \leq k\ \psi(A)(\frac{n}{n+j} + \frac{j+1}{n+j+1}) \leq$$

$\leq k\ \psi(A)(1 + \frac{1}{n+j}) \leq k\ \psi(A)(1+\varepsilon)$ $(j = 0,\ldots,n-1)$. Somit gilt $\psi(H(A\times[0,1])) \leq (1+\varepsilon)\ k\ \psi(A)$. Weil $\varepsilon > 0$ und $A \subset$ $\subset \partial W$ beliebig waren, folgt die Behauptung.

Satz 4. Es seien E ein quasivollständiger metrisierbarer lokalkonvexer Raum, W eine offene, sternförmige und symmetrische Nullumgebung mit $W \neq E$. Ferner sei ψ ein NKM mit den Eigenschaften (1) - (7), $k \in [0,1)$ und $F: \overline{W} \longrightarrow E$ eine (k,ψ)-konzentrierende Abbildung. Für das durch $f(x) = x -$ $- F(x)$ $(x \in \overline{W})$ erklärte zu F gehörige Vektorfeld f folge aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 - x_2 \notin \partial W$ $(x_1,x_2 \in \overline{W})$. Dann ist $f(o)$ innerer Punkt von $f(W)$.

Beweis. Sei $F_0(x) = F(x) - F(o)$ $(x \in \overline{W})$. Dann ist F_0 eine (k,ψ)-konzentrierende Abbildung von $\overline{W}$ in E. Aus den Eigenschaften von f folgt $x \neq F_0(x)$ $(x \in \partial W)$. Wegen Anmerkung 4 existiert eine sternförmige Nullumgebung V derart, dass $x -$ $- F_0(x) \notin V$ $(x \in \partial W)$ gilt. Wir weisen nun die Beziehung $(V + f(o)) \subset f(W)$ nach. Sei dazu $y \in V + f(o)$ gegeben. Durch $F_y(x) = F(x) + y$ $(x \in \partial W)$ ist eine (k,ψ)-konzentrierende Abbildung von ∂W in E erklärt, für die $F_0(x) - F_y(x) \in V$ $(x \in \partial W)$ gilt. Nach Anmerkung 5 sind F_0 und F_y mittels einer

(ψ)-konzentrierenden Abbildung $H_1 : \partial W \times [0,1] \longrightarrow E$ homotop (man beachte Anmerkung 1). Es sei $H_1(x,0) = F_y(x)$ ($x \in \partial W$) und $H_2(x,t) = F(\frac{x}{1+t}) - F(\frac{-tx}{1+t})$ ($x \in \partial W$, $t \in [0,1]$). Wir setzen

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t) & (x \in \partial W,\ t \in [0,\frac{1}{2}]) \\ H_2(x,2t-1) & (x \in \partial W,\ t \in [\frac{1}{2},1]) \end{cases}$$

H_2 ist nach Hilfssatz 2 eine (k,ψ)-konzentrierende Abbildung, die aufgrund der Eigenschaften von f keinen Fixpunkt auf ∂W hat. Mit Anmerkung 1 ergibt sich daraus sofort, dass die (ψ)-konzentrierende Abbildung F_y zu der durch $G(x) = F(\frac{x}{2}) - F(-\frac{x}{2})$ ($x \in \partial W$) definierten (ψ)-konzentrierenden Abbildung G mittels der (ψ)-konzentrierenden Abbildung H homotop ist. Sei S eine charakteristische Menge für H und $\tilde{F}_y(x) = F(x) + y$ ($x \in \overline{W}$). Dann ist S auch charakteristisch für $\tilde{F}_y$. Nach Hilfssatz 1 ist G nicht approximationsunwesentlich bezüglich ($\partial W \cap S$, $W \cap S$, S), und wegen Satz 1 gilt das dann auch für F_y. $\tilde{F}_y$ ist eine (ψ)-konzentrierende Erweiterung von F_y und muss wegen Anmerkung 2 (a) einen Fixpunkt $x_0 \in W$ haben. Somit gilt $y = f(x_0) \in f(W)$ und daher die gewünschte Beziehung $(V + f(o)) \subset f(W)$.

Wir können nun aus Satz 4 den Gebietsinvarianzsatz für k-konzentrierende ($0 \leq k < 1$) Vektorfelder in üblicher Weise (s. z.B. [1]) folgern.

<u>Satz 5</u>. Es seien E ein quasivollständiger metrisierbarer lokalkonvexer Raum, Ω eine offene Teilmenge von E, ψ ein NKM in E mit den Eigenschaften (1) - (7), $k \in [0,1)$ sowie $F: \Omega \longrightarrow E$ eine (k,ψ)-konzentrierende Abbildung. Ist das

zu F gehörige Vektorfeld f eine lokal eineindeutige Abbildung, so muss f(Ω) eine offene Teilmenge von E sein.

W.V. Petryshyn bewies in [12] mittels Abbildungsgrad für Vektorfelder, die bezüglich des Kuratowskischen NKM ~~nur~~ 1-konzentrierend zu sein brauchen, den Gebietsinvarianzsatz in Banachräumen. Dabei benötigte er aber eine zusätzliche Voraussetzung, die i.a. schärfer als die Forderung der (globalen) Eineindeutigkeit auf Ω ist. Weitere Gebietsvarianzsätze für gewisse nicht notwendig kompakte Vektorfelder bewiesen mit Abbildungsgrad u.a. J. Daneš [16] und R.D. Nussbaum [17].

L i t e r a t u r

[1] A. GRANAS: The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces (I), Rozprawy Mat. 30, Warszawa 1962

[2] S. HAHN: Zur Theorie kompakter Vektorfelder in topologischen Vektorräumen. Erscheint in Math. Nachrichten

[3] S. HAHN: Ein Homotopieerweiterungssatz für konzentrierende mengenwertige Abbildungen in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen. Erscheint in Studia Math. 66,2.

[4] S. KAKUTANI: A generalisation of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J. 8(1941), 457-499

[5] G. KAYSER: Über die Existenz von Lösungen nichtlinearer Operatorengleichungen mit nicht notwendig kompakten Operatoren. Dissertationsschrift Techn. Universität Dresden 1974 (unveröffentlicht)

[6] V. KLEE: Leray-Schauder-theory without local convexity. Math. Ann. 141(1960), 286-296

[7] G. KÖTHE: Topologische lineare Räume I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960

[8] M.A. KRASNOSELSKI: Positive Lösungen von Operatorengleichungen (russ.), Moskau 1962

[9] T.W. MA: Topological degrees of set-valued compact fields in locally convex spaces. Diss. Math. 92 (1972)

[10] T.W. MA: Non-singular set-valued compact fields in locally convex spaces. Fundamenta math. 75(1972), 249-259

[11] M. MARTELLI: A Rothe's type theorem for noncompact acyclic-valued maps. Proceedings of the conference on problems in nonlinear functional analysis. Universität Bonn, July 22-26, 1975. Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Bonn, Nr. 103, 1975

[12] W.V. PETRYSHYN: Remarks on condensing and k-set-contractive mappings. J. Math. Anal. Appl. 39(1972), 717-741

[13] A.S. POTAPOV: Zur Theorie der Drehung von limeskompakten Vektorfeldern. Comment. Math. Univ. Carolinae 15 (1974), 693-716 (russ.)

[14] T. RIEDRICH: Störungen nichtlinearer Operatorengleichungen. Wiss. Schriftenreihe der TH Karl-Marx-Stadt. 1975, 5. TMP Heft 2, 345-350

[15] B.N. SADOWSKI: Limeskompakte und verdichtende Operatoren (russ.). Uspechi Mat. Nauk 27(1972), 81-146

[16] J. DANEŠ: On densifying and related mappings and their application in nonlinear functional analysis. In: Theory of Nonlinear Operators. Proceedings of a summer-school 1972 Neuendorf, GDR, 15-56(1974)

[17] R.D. NUSSBAUM: Degree theory for local condensing maps. Journ. Math. Anal. Appl. 37(1972), 741-766.

Sektion Mathematik
Technische Universität Dresden
Mommsenstr. 13, 8027 Dresden
D D R

(Oblatum 10.11. 1976)