COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,3 (1977)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КОНСТРУКТИВНОГО ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: Заметка содержит дескриптивное определение и описание основных свойств конструктивного интеграла, который является обобщением конструктивного интеграла Лебега. Многие свойства этого интеграла являются конструктивными аналогами свойств классического интеграла Перрона.

Ключевые слова: Конструктивная функция, абсолютно непрерывная функция, почти равномерная дифференцируемость.

AMS: Primary 02E99, 26A39 Ref. Ž.: 2.644.2
Secondary 26A24

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [13],[14],[3] и [5], понятиями покрытия, функции, абсолютно непрерывной функции и функции ограниченной вариации из [6] и свойствами $(T_1)^*$ [10] и $(N)^*$ [11].

Для функции $\mathcal{F}$ мы будем писать $Д(\mathcal{F})$, если существует $\{F_n\}_n \in S$ такое, что $Д(\mathcal{F}, \{F_n\}_n)$ (см. [9]).

Покрытие Φ мы назовем: а) регулярным, если $\sum_{i=1}^{n} |\Phi_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, и б) наследно регулярным, если для всякой возрастающей на $0\Delta 1$ функции g выполнено $\sum_{i=1}^{n} \Delta(g, \Phi_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Delta(g, 0\Delta 1)$. Покрытие Φ мы назовем уточнением покрытия Ψ, если $\forall m \exists n (\Phi_m \subseteq \Psi_n)$. Мы заметим, что если наследно регулярное покрытие Φ является уточнением покрытия Ψ , то Ψ наследно регулярно.

<u>Определения</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и g функции, $x_0 \Delta x_1$ сегмент, x КДЧ, а P слово, являющееся или КДЧ или ПЧ. Тогда

а) мы посредством $BVS(x, \mathcal{F}, x_0 \Delta x_1)$ обозначим: для всякой возрастающей системы КДЧ $\{y_i\}_{i=0}^{m}$, $x_0 = y_0 < < y_m = x_1$, выполнено $\sum_{i=1}^{m} |\Delta(\mathcal{F}, y_{i-1} \Delta y_i)| \leq x$;

б) мы скажем, что $\mathcal{F}$ функция слабо (соотв. квазислабо) ограниченной вариации на $x_0 \Delta x_1$, если существует (соотв. не может не существовать) НЧ m такое, что $BVS(m, \mathcal{F}, x_0 \Delta x_1)$;

в) мы скажем, что P является особой точкой для $\mathcal{F}$, если $\neg \exists a b (a < P < b \;\&\; \neg\neg \exists m \,(BVS(m, \mathcal{F}, a \Delta b)))$;

г) мы посредством $\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}$ и $\mathcal{F} * g$ обозначим функции такие, что $\forall y\, (\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}(y) = \mathcal{F}(max\,(min\,(y, x_1), x_0)) \;\&$ $\mathcal{F} * g\,(y) = \mathcal{F}(g(y)))$;

д) если $\mathcal{F}$ возрастает на $0 \Delta 1$ и $\mathcal{F}(0) = 0 \;\&\; \mathcal{F}(1) = 1$, то мы посредством $\mathcal{F}^{-1}$ обозначим функцию такую, что $\forall x\, (x \in 0 \Delta 1 \supset \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x)) = x)$.

<u>Обозначения</u>. Пусть $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов, Φ покрытие, а $\mathcal{F}$ функция. Тогда

а) мы будем писать $\overline{\mathcal{H}}(\{H_m\}_m)$, если $\{H_m\}_m$ последовательность неперекрывающихся сегментов и выполнено $(|H_m| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0) \;\&\; \neg \exists m\, (0 \in (H_m)^{\circ} \vee 1 \in (H_m)^{\circ})$,

б) если $\overline{\mathcal{H}}(\{H_m\}_m)$, то мы посредством $[\mathcal{F}, \{H_m\}_m]$ обозначим функцию, которая линейна на всяком сегменте последовательности $\{H_m\}_m$ и обладает свойством $\forall x\, (\neg \exists m\, (x \in (H_m)^{\circ}) \supset [\mathcal{F}, \{H_m\}_m](x) = \mathcal{F}(x))$, в) мы определим $\mathcal{F}/\Phi \rightleftharpoons [\mathcal{F}, \Phi]$.

Замечание 1. 1) Для всякого р.п. множества НЧ C, $\mathcal{K}(C)$ (см. [14]), существует последовательность рациональных сегментов $\{a_n \Delta b_n\}_n$ такая, что

$$\overline{\mathcal{K}}(\{a_n \Delta b_n\}_n) \,\&\, \forall a b\, (a < b \,\&\, a \Delta b \subseteq 0 \Delta 1 \supset (\exists n\, (a \Delta b \mathrel{\overline{\underline{\mid}}} a_n \Delta b_n) \equiv$$
$$\equiv \exists l\, (l \in C \,\&\, (a \Delta b \mathrel{\overline{\underline{\mid}}} \mathcal{L}_{\llcorner l \lrcorner}))))$$

и, следовательно, для любой функции $\mathcal{F}$ верно

$[\mathcal{F}, \{a_n \Delta b_n\}_n] = [\mathcal{F}, C]$ (см. [14]).

2) Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\{H_n\}_n$ последовательность сегментов, $\overline{\mathcal{K}}(\{H_n\}_n)$, а $x_0 \Delta x_1$ сегмент. Тогда что касается равномерной непрерывности, абсолютной непрерывности, ограниченности вариации, слабой ограниченности вариации, свойств $(T_1)^*$ и $(N)^*$, то принадлежность функции $\mathcal{F}$ к одному из соответствующих классов функций влечет за собой принадлежность функций $[\mathcal{F}, \{H_n\}_n]$ и $\mathcal{F}^{[x_0 \Delta x_1]}$ к тому же классу.

Определения. 1) Для функции $\mathcal{F}$ мы будем писать

а) $\mathcal{V}(\mathcal{F})$, если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и для любой возрастающей на $0 \Delta 1$ абсолютно непрерывной (на $0 \Delta 1$) функции g, $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1$, выполнено Д$(\mathcal{F} * g)$,

б) $\mathcal{V}_0(\mathcal{F})$, если верно $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ и для всякого наследно регулярного покрытия Φ не может не существовать покрытие Ψ такое, что Φ является уточнением Ψ и $\mathcal{F}/\Psi$ функция квазислабо ограниченной вариации (на $0 \Delta 1$),

в) $\mathcal{Z}(\mathcal{F})$, если выполнено

$\forall x k\, \exists l\, BVS(2^{-k}, \mathcal{F}, (x - 2^{-l}) \Delta (x + 2^{-l}))$.

2) Пусть $\{F_n\}_n \in S$ (см. [3]).

а) Мы скажем, что функция $\mathcal{F}$ является неопределенным $\mathcal{I}$-интегралом (соотв. $\mathcal{I}_0$-интегралом) от $\{F_m\}_m$ если выполнено $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ (соотв. $\mathcal{I}_0(\mathcal{F})$) и Д$(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$.

б) Мы скажем, что объект $\{F_m\}_m$ является $\mathcal{I}$-интегрируемым (соотв. $\mathcal{I}_0$-интегрируемым), если существует функция $\mathcal{F}$, являющаяся неопределенным $\mathcal{I}$-интегралом (соотв. $\mathcal{I}_0$-интегралом) от $\{F_m\}_m$.

На основании следствия теоремы 2 из [9], следствия теоремы 7 из [11], теоремы 1 из [12] и теоремы 2 из [7] верны следующие утверждения.

<u>Теорема 1</u>. 1) Пусть $x_0 \triangle x_1$ сегмент, $x_0 \triangle x_1 \subseteq 0 \triangle 1$. Функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на сегменте $x_0 \triangle x_1$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ (соотв. $\mathcal{F}^{[x_0 \triangle x_1]}$) функция ограниченной вариации на $x_0 \triangle x_1$, $\mathcal{F}^{[x_0 \triangle x_1]}$ обладает свойством $(N)^*$ и выполнено Д$(\mathcal{F}^{[x_0 \triangle x_1]})$.

2) Пусть $\mathcal{F}$ функция такая, что Д$(\mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{F}$ представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных (на $0 \triangle 1$) функций тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$.

<u>Следствие</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и g абсолютно непрерывные (на $0 \triangle 1$) функции такие, что g является неубывающей. Тогда $\mathcal{F} * g$ абсолютно непрерывная (на $0 \triangle 1$) функция и, следовательно, верно Д$(\mathcal{F} * g)$. Всякое $\{F_m\}_m \in L_1$ $\mathcal{I}_0$-интегрируемо.

Исходя от определений, можно с помощью теоремы 1, ее следствия и результатов из [8] и [9] доказать следующие утверждения.

<u>Теорема 2</u>. 1) Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ функции, y КДЧ, $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_m\}_m)$, $x_0 \triangle x_1$

сегмент, Φ регулярное покрытие, а $\{F^1_m\}_m \in S$ и $\{F^2_m\}_m \in$ $\in S$ такие, что Д$(\mathcal{F}_1, \{F^1_m\}_m)$ & Д$(\mathcal{F}_2, \{F^2_m\}_m)$. Тогда Д$(y \cdot \mathcal{F}_1, y \cdot \{F^1_m\}_m)$, Д$(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2, \{F^1_m\}_m + \{F^2_m\}_m)$, Д$(|\mathcal{F}_1|)$, Д$(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)$, $(\exists m (|\mathcal{F}_1| \geq \frac{1}{m}) \supset$ Д$(\frac{1}{\mathcal{F}_1}))$, Д$([\mathcal{F}_1, \{H_m\}_m])$, Д$(\mathcal{F}_1^{[x_0 \Delta x_1]})$ и Д$(\mathcal{F}_3 / \Phi)$.

2) Если $\mathcal{F}$ возрастающая на $0 \Delta 1$ функция, $\mathcal{F}(0) = 0$ & $\mathcal{F}(1) = 1$ & Д$(\mathcal{F})$, то Д$(\mathcal{F}^{-1})$.

3) Если $\mathcal{F}$ функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$, а $\mathcal{G}$ функция такая, что для всякого КДЧ x, $0 < x \leq 1$, $\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(0)$ вариация функции $\mathcal{F}$ на сегменте $0 \Delta x$, то а) (Д$(\mathcal{F}) \equiv$ Д$(\mathcal{G})$) и б) $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ догда и только тогда, когда $\mathcal{G}$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$.

<u>Теорема 3</u>. 1) Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ функции, обладающие свойством $\mathcal{Y}$ (соотв. $\mathcal{Y}_0$, соотв. $\mathcal{Z}$), y КДЧ, $\{H_m\}_m$ последовательность сегментов, $\overline{\mathcal{H}}(\{H_m\}_m)$, $x_0 \Delta x_1$ сегмент, а $\mathcal{H}$ и g абсолютно непрерывные на $0 \Delta 1$ функции такие, что $\exists m (|\mathcal{F}_3| \geq \frac{1}{m})$ & $g(0) = 0$ & $g(1) = 1$ и g возрастает на $0 \Delta 1$. Тогда функции $\mathcal{H}$, $y \cdot \mathcal{F}_1$, $|\mathcal{F}_1|$, $(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)$, $(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)$, $\frac{1}{\mathcal{F}_3}$, $[\mathcal{F}_1, \{H_m\}_m]$, $\mathcal{F}_1^{[x_0 \Delta x_1]}$ и $\mathcal{F}_1 * g$ обладают свойством $\mathcal{Y}$ (соотв. $\mathcal{Y}_0$, соотв. $\mathcal{Z}$).

2) Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а Φ наследно регулярное покрытие. Тогда выполнено $\mathcal{Y}(\mathcal{F}/\Phi)$ & $\mathcal{Z}(\mathcal{F}/\Phi)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда верно Д$(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если для всякого НЧ m существует S_6-множество $\{H^m_m\}_m$ меры меньшей чем 2^{-m} и такое, что $\{H^m_m\}_m \subseteq 0 \Delta 1$, $[\mathcal{F}, \{H^m_m\}_m]$

абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция и ряд $\sum_m \langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner H_m^m \lrcorner$ сходится. (Мы напомним, что $\langle \omega, \mathcal{F} \rangle \llcorner Q \lrcorner$ - колебание функции $\mathcal{F}$ на сегменте Q.)

Отсюда мы на основании теоремы 1 из [7] и замечания 1 из [4] получаем следующие утверждения.

<u>Следствие 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а $\mathcal{G}$ абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция, удовлетворяющая условию Липшица. Тогда $(Д(\mathcal{F}) \supset Д(\mathcal{G} * \mathcal{F})) \,\&\, (\mathcal{Y}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{Y}(\mathcal{G} * \mathcal{F})) \,\&\, (\mathcal{Y}_0(\mathcal{F}) \supset \mathcal{Y}_0(\mathcal{G} * \mathcal{F})) \,\&\, (\mathcal{Z}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{G} * \mathcal{F}))$.

<u>Следствие 2</u>. Пусть $\{\mathcal{F}_m\}_m$ последовательность равномерно непрерывных функций, для которой верно $\forall m n \; BVS(2^{-m}, \mathcal{F}_m - \mathcal{F}_{m+n}, 0 \Delta 1)$. Тогда существует равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$ такая, что
$\forall m \; BVS(2^{-m}, \mathcal{F} - \mathcal{F}_m, 0 \Delta 1) \,\&\, (\forall m \; Д(\mathcal{F}_m) \supset Д(\mathcal{F})) \,\&$
$(\forall m \; \mathcal{Y}(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Y}(\mathcal{F})) \,\&\, (\forall m \; \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Y}_0(\mathcal{F})) \,\&$
$(\forall m \; \mathcal{Z}(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{F}))$.

<u>Теорема 5</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а $\{x_m\}_m$ последовательность КДЧ из $0 \nabla 1$ такая, что $x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} 1$. Тогда выполнено
$(\forall m \; Д(\mathcal{F}^{[0 \Delta x_m]}) \equiv Д(\mathcal{F})) \,\&\, (\forall m \; \mathcal{Y}(\mathcal{F}^{[0 \Delta x_m]}) \equiv \mathcal{Y}(\mathcal{F})) \,\&$
$(\forall m \; \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}^{[0 \Delta x_m]}) \equiv \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}))$.

<u>Определение</u>. S_6-множество $\{H_m\}_m$, $\{H_m\}_m \subseteq 0 \Delta 1$, мы назовем слабо наследным, если для всяких НЧ p и возрастающей на $0 \Delta 1$ абсолютно непрерывной функции g, $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1$, существуют S_6-множество $\mathcal{S}$ меры меньшей чем 2^{-p} и НЧ q_p такие, что $\forall m \, (q_p < m \supset$
$\nu \langle \mathcal{S} \rangle \llcorner g^{-1}(Э_л(H_m)) \Delta g^{-1}(Э_m(H_m)) \lrcorner >$
$> \frac{1}{2} \cdot |g^{-1}(Э_л(H_m)) \Delta g^{-1}(Э_m(H_m))|)$.

(Следует напомнить, что $\nu\langle\mathcal{G}\rangle\llcorner\mathcal{Q}\lrcorner$ - мера $\mathcal{G}\cap\mathcal{Q}$ [8].)

Замечание 2. Для любых Π_1-покрытия Φ (см. [13]) и последовательности сегментов $\{H_m\}_m$ такой, что

$\forall m(H_m \subseteq \Phi_m) \& \left(\frac{|H_m|}{|\Phi_m|} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0\right)$, $\{H_m\}_m$ является слабо наследным S_σ-множеством.

Теорема 6. Пусть $\{H_m\}_m$ слабо наследное S_σ-множество, содержащееся в $0\vartriangle 1$, а $\{\mathcal{F}_m\}_m$ последовательность равномерно непрерывных функций такая, что $\forall m x(|\mathcal{F}_m(x)| > 0 \supset x \in (H_m)^0)$ и ряд $\sum_m \langle\omega,\mathcal{F}_m\rangle\llcorner H_m\lrcorner$ сходится. Тогда существует равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$, для которой выполнено $\mathcal{F} = \sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{F}_m$ и $(\forall m\, \mathcal{Y}(\mathcal{F}_m) \supset \supset \mathcal{Y}(\mathcal{F})) \& (\forall m\, \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}_m) \supset \mathcal{Y}_0(\mathcal{F}))$.

На основании замечания 2, теоремы 6 и следствия 2 теоремы 4 легко построить следующий пример.

Пример 1. Существует функция $\mathcal{F}$ слабо ограниченной вариации на $0\vartriangle 1$ такая, что $\mathcal{Y}_0(\mathcal{F}) \& \mathcal{Z}(\mathcal{F})$ и ни для какого сегмента $a\vartriangle b$, $a\vartriangle b \subseteq 0\vartriangle 1$, $\mathcal{F}$ не является функцией ограниченной вариации на $a\vartriangle b$ и, следовательно, $\mathcal{F}$ не является абсолютно непрерывной на $a\vartriangle b$.

На основании теоремы Г.С. Цейтина [2] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, а g возрастающая на $0\vartriangle 1$ абсолютно непрерывная функция, $g(0)=0 \& g(1)=1$. Тогда для всякого НЧ k существуют S_σ-множества $\mathcal{G}$ и $\mathcal{C}$ меры меньшей чем 2^{-k}, равномерно непрерывные функции τ и φ, возрастающие последовательности НЧ $\{\omega_t\}_t$, $\{\sigma_t\}_t$ и $\{t_p\}_p$ и последовательность систем неперекрывающихся рациональных сегментов $\{\{Q_i^s\}_{i=1}^{\tau_s}\}_s$ такие, что

а) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G} \;\&\; \forall x\,(x \in 0\Delta 1 \;\&\; \neg(x \in \mathcal{G}) \supset D(r(x), g, x) \;\&$ $D(\varphi(x), \mathcal{F} * g, x))$ (предикат D определен в [5]),

б) для любых НЧ t и сегмента Q, $Q \subseteq 0\Delta 1 \;\&\; |Q| \le$ $\le 2^{-\omega_t}$, верно $(\neg\neg\exists x\,(x \in Q \;\&\; \neg(x \in \mathcal{G}) \;\&\; r(x) < 2^{-\sigma_t+1}) \supset$ $\supset \forall x\,(x \in Q \supset |\varphi(x)| < 2^{-t}))$,

в) для всякого НЧ s

α) $0 \le \tau_s \;\&\; \forall x\,(x \in 0\Delta 1 \;\&\; \neg(x \in \mathcal{G}) \;\&\; r(x) < 2^{-\sigma_{t_s}} \supset \exists i\,(1 \le i \le \tau_s \;\&$ $x \in Q_i^s)) \;\&\; \forall i x\,(1 \le i \le \tau_s \;\&\; x \in Q_i^s \supset |Q_i^s| \le 2^{-\omega_{t_s}} \;\&\; r(x) <$ $2^{-\sigma_{t_s}+1})$ и

β) если $\{i_j\}_{j=1}^{q}$ возрастающая система НЧ такая, что $\forall j\,(1 \le j \le q \supset 1 \le i_j \le \tau_s \;\&\; \nu\langle\mathcal{G}\rangle_L\, Q_{i_j}^s \lrcorner < |Q_{i_j}^s| \;\&$ $\neg BVS(2^{-s-1} \cdot |Q_{i_j}^s|, \mathcal{F} * g, Q_{i_j}^s))$,

то $\sum_{j=1}^{q} |Q_{i_j}^s| < 2^{-s}$.

<u>Следствие 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{I}(\mathcal{F})$, $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ (см. [4]), $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) > 0$, а $\{L_k\}_k$ последовательность дизъюнктных сегментов, содержащихся в $0\Delta 1$, такая, что ряд $\sum_k |L_k|$ сходится. Тогда не могут не существовать КДЧ x_0 и y_0 , которые не являются особыми точками для $\mathcal{F}$ и для которых верно $x_0 \in 0\nabla 1 \;\&\; x_0 \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \;\&\; y_0 \in 0\nabla 1 \;\&\; \neg\exists k\,(y_0 \in L_k)$.

На основании теоремы 7, следствия 3 теоремы 5 из [13] и теоремы 3 и леммы 2 из [14] мы получаем следующее утверждение.

<u>Следствие 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{I}(\mathcal{F})$, а ξ $П_1$Ч из $0\Delta 1$. Тогда если существуют возрастающая на $0\Delta 1$ абсолютно непрерывная функция g, $g(0) = 0 \;\&\; g(1) = 1$, и $П_2$Ч η такие, что $\eta \in 0\Delta 1 \;\&\; \sigma_g(\eta) = \xi$. и, следовательно, $D_{кл}(0, g, \eta) \;\&\; D_{кл}(0, \mathcal{F} * g, \eta)$, то $\sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_1$ и ξ не является особой точкой для $\mathcal{F}$.

Пример 2. Существует функция $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}_0(\mathcal{F})$, для которой не существует алгорифм, применимый к всякому рациональному сегменту $a \vartriangle b$, $a \vartriangle b \subseteq 0 \vartriangle 1$, и выдающий по нему КДЧ из $a \triangledown b$, которое не является особой точкой для $\mathcal{F}$.

Пример 3. (Ср. теорему (3.11) [1], стр. 251.) Можно построить функцию $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}_0(\mathcal{F})$, такую, что не существует последовательность последовательностей сегментов $\{\{H_m^p\}_m\}_p$, для которой верно

$$\forall p \,\overline{\mathcal{H}}(\{H_m^p\}_m) \,\&\, \forall x\,(x \in 0 \vartriangle 1 \supset \neg\neg \exists p \neg \exists m\, (x \in (H_m^p)^\circ))$$

и для всякого НЧ p - $[\mathcal{F}, \{H_m^p\}_m]$ функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$.

Теорема 8. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{V}(\mathcal{F})$. Тогда выполнено $\mathcal{Z}(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если для всякой неубывающей абсолютно непрерывной на $0 \vartriangle 1$ функции g, $g(0) = 0 \,\&$ $\&\, g(1) = 1$, выполнено $Д(\mathcal{F} * g)$.

Пример 4. Существует функция слабо ограниченной на $0 \vartriangle 1$ вариации $\mathcal{F}$ такая, что $\mathcal{V}_0(\mathcal{F}) \,\&\, \neg \mathcal{Z}(\mathcal{F})$.

На основании теоремы 11 из [13] и следствия 2 теоремы 7 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 9. 1) Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция такая, что $Д(\mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ в том и только том случае, если не существует регулярное покрытие Φ такое, что

$$\forall \xi\,(\xi \in \Pi \,\&\, \xi \in 0 \vartriangle 1 \,\&\, \neg \exists k\,(\xi \in \Phi_k) \supset \xi \in \Pi_1 \,\& \quad (1)$$
$$\&\, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\xi) = \mathcal{O}_{\mathcal{F}/\Phi}(\xi) \,\&\, \mathcal{O}_{\mathcal{F}/\Phi}(\xi) \in \Pi_2)$$

(соотв. такое, что (1) и $\neg \exists k (\mathcal{F}(Э_l(\Phi_k)) = \mathcal{F}(Э_m(\Phi_k)))$).

2) Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{V}(\mathcal{F})$, а Φ регулярное покрытие такое, что (1). Тогда Φ наследю регулярно.

Пример 5. Существуют наследно регулярное покрытие Φ, равномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$ и абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция $\mathcal{G}$ такие, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}/\Phi \,\&\, \mathcal{G} = \mathcal{G}/\Phi$ (и, следовательно, верно $\mathcal{V}(\mathcal{F}) \,\&\, \mathcal{V}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$), $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$, а $(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ не обладает свойством $(N)^*$.

Теорема 10. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{V}(\mathcal{F})$, а $\mathcal{H}$ равномерно непрерывная функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ такая, что Д$(\mathcal{H})$. Тогда если функция $(\mathcal{F} + \mathcal{H})$ обладает свойством $(N)^*$, то $\mathcal{H}$ обладает свойством $(N)^*$.

Доказательство. Пусть функция $(\mathcal{F} + \mathcal{H})$ обладает свойством $(N)^*$.

Пусть $\xi \in \Pi_1$. Тогда $\sigma_{(\mathcal{F}+\mathcal{H})}(\xi) \in \Pi_1$ (теорема 11 из [13]). Мы допустим, что $\sigma_{\mathcal{H}}(\xi) \in \Pi_2$. Тогда $0 < \xi < 1$ и согласно теореме 13 из [13] и теореме 3 из [15] верно
$\neg\neg(D_{кл}(+\infty, \mathcal{H}, \xi) \vee D_{кл}(-\infty, \mathcal{H}, \xi))$.

Мы можем без ограничения общности предположить, что $D_{кл}(+\infty, \mathcal{H}, \xi)$. Тогда не может не существовать рациональный сегмент $a \Delta b$ такой, что

$$(2)\ 0 < a < \xi < b < 1 \,\&\, \forall c d\,(a \le c < \xi < d \le b \supset |c \Delta d| < \Delta(\mathcal{H}, c \Delta d)).$$

Пусть $a \Delta b$ сегмент, а $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{H}_1$ функции, для которых верно (2), $\mathcal{F}_1 = \dfrac{1}{\Delta(\mathcal{H}, a \Delta b)} \cdot \mathcal{F}^{[a \Delta b]}$ и

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{\Delta(\mathcal{H}, a \Delta b)} \cdot (\mathcal{H}^{[a \Delta b]} - \mathcal{H}(a)) .$$

Тогда, очевидно, верно

$$(3)\quad \begin{aligned} &\mathcal{V}(\mathcal{F}_1) \,\&\, Д(\mathcal{H}_1) \,\&\, \mathcal{H}_1(0) = 0 \,\&\, \mathcal{H}_1(1) = 1 \,\&\, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi) \in \Pi_2 \,\&\\ &\&\, \sigma_{(\mathcal{F}_1 + \mathcal{H}_1)}(\xi) \in \Pi_1 \end{aligned}$$

и ввиду (2) и леммы 4 из [14] существуют КДЧ x, р.п. множество НЧ С и функция g такие, что

$$0<x \& \forall x y\,(0 \leq x < y \leq 1 \supset x\cdot(y-x) \leq \Delta([\mathcal{H}_1, C], x \vartriangle y)) \&$$
$$\& \neg \exists \ell\,(\ell \in C \& \xi \in \mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}) \& \mathcal{K}(C) \& g = ([\mathcal{H}_1, C])^{-1}$$

и, следовательно, ввиду теорем 2 и 1 и [11] g возрастающая на $0 \vartriangle 1$ абсолютно непрерывная функция, $g(0) = 0 \& g(1) = 1 \& \sigma_g(\sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi)) = \xi \in \Pi_1$ и $\mathcal{H}_1 * g$ функция квазислабо ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$. Согласно [14] выполнено

$$D_{\text{кл}}(\mathcal{H}_1 * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi)) \& \neg D_{\text{кл}}(0, \mathcal{H}_1 * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi)) \& D_{\text{кл}}(0, g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi))$$

и, следовательно, ввиду следствия 2 теоремы 7 верно $D_{\text{кл}}(0, \mathcal{F}_1 * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi))$. Таким образом,

$$D_{\text{кл}}((\mathcal{F}_1 + \mathcal{H}_1) * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi)) \& \neg D_{\text{кл}}(0, (\mathcal{F}_1 + \mathcal{H}_1) * g, \sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi))$$

и, следовательно, $\sigma_{(\mathcal{F}_1+\mathcal{H}_1)}(\xi) = \sigma_{(\mathcal{F}_1+\mathcal{H}_1)}(\sigma_g(\sigma_{\mathcal{H}_1}(\xi))) \in \Pi_2$ (см. лемму 2 из [14]), что противоречит (3).

Итак, мы доказали $\forall \xi\,(\xi \in \Pi_1 \supset \sigma_{\mathcal{H}}(\xi) \in \Pi_1)$ и согласно теореме 11 из [13] $\mathcal{H}$ обладает свойством $(N)^*$.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, а $x_0 \vartriangle x_1$ сегмент, $x_0 \vartriangle x_1 \subseteq 0 \vartriangle 1$. Тогда если $\mathcal{F}$ функция квазислабо ограниченной вариации на $x_0 \vartriangle x_1$, то функция $\mathcal{F}^{[x_0 \vartriangle x_1]}$ обладает свойством $(N)^*$ и, следовательно, $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $x_0 \vartriangle x_1$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ функция ограниченной вариации на $x_0 \vartriangle x_1$.

На основании этого, теоремы 1, теоремы 3 из [10] и теоремы 9 мы сразу получаем следующие утверждения.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, которая обладает свойством $(T_1)^*$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$.

Теорема 11. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}_0(\mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ и, следовательно, представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных (на $0 \vartriangle 1$) функций.

<u>Теорема 12</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ функции такие, что $\mathcal{Z}(\mathcal{F})\,\&$ $\&\ \text{Д}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ обладает свойством $(N)^*$ и для почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ верно $\exists u\,(0 \le u\ \&\ D(u, \mathcal{F}-\mathcal{G}, x))$. Тогда $\mathcal{F}-\mathcal{G}$ является неубывающей.

Доказательство. Мы можем предположить, что $\mathcal{F}(0) =$ $= \mathcal{G}(0)$. Достаточно доказать $0 \le \mathcal{F}(1) - \mathcal{G}(1)$.

Мы допустим, что $\mathcal{F}(1) - \mathcal{G}(1) < 0$, и определим $\mathcal{H} \rightleftharpoons \mathcal{G} - \mathcal{F}$. Согласно лемме 4 из [14] существуют КДЧ x и w и р.п. множество НЧ C такие, что

$$(4)\quad 0 < x < w < \mathcal{H}(1)\ \&\ \mathcal{H}(C)\ \&\ \forall l\,(l \in C \supset w\cdot|\mathcal{L}_{\llcorner}l_{\lrcorner}| > \Delta(\mathcal{H}, \mathcal{L}_{\llcorner}l_{\lrcorner}))\ \&\ \forall x y\,(0 \le x < y \le 1 \supset \Delta([\mathcal{H}, C], x \vartriangle y) > x\cdot|x \vartriangle y|).$$

Ввиду наших предположений сегменты $\mathcal{L}_{\llcorner}l_{\lrcorner}$, $l \in C$, образуют S_{σ}-множество меры 1, которое содержится в $0 \vartriangle 1$, выполнено $\mathcal{Z}([\mathcal{F}, C])\ \&\ \text{Д}([\mathcal{H}, C])\ \&\ [\mathcal{G}, C] = [\mathcal{F}, C] + [\mathcal{H}, C]$, $[\mathcal{G}, C]$ обладает свойством $(N)^*$ (см. замечание 1). Следовательно, ввиду (4) и теоремы 10 функция $[\mathcal{H}, C]$ обладает свойством $(N)^*$ и тогда ввиду леммы 3 из [11] и отмеченных нами свойств множества C выполнено $\mathcal{H}(1) = [\mathcal{H}, C](1) < w$, что противоречит (4).

<u>Следствие 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Z}(\mathcal{F})$, $x_0 \vartriangle x_1$ сегмент, $x_0 \vartriangle x_1 \subseteq 0 \vartriangle 1$, и пусть для почти всех КДЧ y из $x_0 \vartriangle x_1$ верно $\exists u\,(0 \le u\ \&\ D(u, \mathcal{F}, y))$. Тогда $\mathcal{F}$ является неубывающей на $x_0 \vartriangle x_1$.

<u>Следствие 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Z}(\mathcal{F})$, а $\{F_m\}_m \in S$ такое, что $\text{Д}(\mathcal{F}, \{F_m\}_m)$. Тогда 1) $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ в том и только том случае, если существует функция $\mathcal{G}$, обладающая свойством $(N)^*$, для которой выполнено $\text{Д}(\mathcal{G}, \{F_m\}_m)$, и 2) $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $0 \vartriangle 1$

тогда и только тогда, когда существует $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что $\{F_n\}_n = \{G_n\}_n$ (см. теорему 9 из [11] и теорему 1).

Теорема 13. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$, и $\mathcal{H}$ функция ограниченной вариации (на $0 \vartriangle 1$) такая, что Д$(\mathcal{H})$ и функция $\mathcal{H} - \mathcal{F}$ является неубывающей. Тогда $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна (на $0 \vartriangle 1$).

Доказательство. Согласно теореме 1 и следствию 1 теоремы 10 нам достаточно доказать, что $\mathcal{F}$ функция ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$. На основании теоремы 2 мы можем без ограничения общности предположить, что $\forall x y (0 \le x < y \le 1 \supset |x \vartriangle y| \le \le \Delta(\mathcal{H}, x \vartriangle y))$. Тогда ввиду теоремы 2 и теоремы 3 из [5] функция g, где $g^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(\mathcal{H}, 0 \vartriangle 1)} \cdot (\mathcal{H} - \mathcal{H}(0))$, абсолютно непрерывна на $0 \vartriangle 1$ и $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1$. Но тогда верно Д$(\mathcal{F} * g) \,\&\, \forall x y (0 \le x < y \le 1 \supset \Delta(\mathcal{F} * g, x \vartriangle y) \le$
$\le \Delta(\mathcal{H}, 0 \vartriangle 1) \cdot |x \vartriangle y|)$

и, следовательно, согласно теореме 3 из [5] $\mathcal{F} * g$ абсолютно непрерывна (на $0 \vartriangle 1$) и, таким образом, $\mathcal{F} * g$ и $\mathcal{F}$ функции ограниченной вариации (на $0 \vartriangle 1$).

Изучая свойства функций, обладающих свойством $\mathcal{Y}$ (соотв. $\mathcal{Y}_0$), мы тем самым получили ряд результатов о $\mathcal{Y}$ - (соотв. $\mathcal{Y}_0$ -) интегрируемости и соответствующем ей интеграле - в частности - однозначность значения интеграла, линейность и монотонность интегрирования, возможность интегрирования по частям, теоремы о подстановке и т.д. . Полученные результаты свидетельствуют о том, что эти интегралы обладают многими свойствами аналогичными свойствам интеграла Перрона (ср.[1]).

Замечание 3. Пусть $\{F_n\}_n \in S$ и пусть $\{F_n^1\}_n \in S$,

$\{F_n^2\}_n \in S$ и $|\{F_n\}_n|$ $\mathcal{I}$ -интегрируемые объекты, $\{F_n^1\}_n \leq \{F_n^2\}_n$. Тогда согласно следствиям теорем 10 и 12 и лемме 3 из [3] существует $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что $\{G_n\}_n = \{F_n\}_n$, и для всякого $\{H_n\}_n \in S$, $\{F_n^1\}_n \leq \{H_n\}_n \leq$ $\leq \{F_n^2\}_n$, можно построить $\{K_n\}_n \in L_1, \{K_n\}_n = \{H_n\}_n - \{F_n^1\}_n$, и, следовательно, $\{H_n\}_n$ $\mathcal{I}$ -интегрируемый объект, причем из $\mathcal{I}_0$ -интегрируемости $\{F_n^1\}_n$ (соотв. $\{F_n^2\}_n$) следует $\mathcal{I}_0$ -интегрируемость $\{H_n\}_n$.

На заключение мы заметим, что верно следующее утверждение.

Теорема 14. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $Д(\mathcal{F})$, и пусть для всякой возрастающей на $0 \Delta 1$ абсолютно непрерывной (на $0 \Delta 1$) функции g, удовлетворяющей условию Липшица, $g(0) = 0 \,\&\, g(1) = 1$, существует $\{G_n\}_n \in S$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\exists u\, (P(u, \{G_n\}_n, x) \,\&\, D_{кл}(u, \mathcal{F} * g, x))$. Тогда верно $\mathcal{I}(\mathcal{F})$.

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова, т. 67(1962), 295-361.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 463-492.

[5] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструк-

тивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 667-691.

[6] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 705-726.

[7] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 423-451.

[8] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 587-610.

[9] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 687-711.

[10] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивном аналоге свойства (T_1), Comment. Math. Univ. Carolinae 14(1973), 421-439.

[11] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивных аналогах свойств (N) и (S), Comment. Math. Univ. Carolinae 14 (1973), 565-582.

[12] ДЕМУТ О.: О связи представимости конструктивной функции в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций и дифференцируемости этой функции, Comment. Math. Univ. Carolinae 15(1974), 195-210.

[13] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975),315-331.

[14] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[15] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 111-126.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Malostranské nám. 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 1.6. 1977)