COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,3 (1977)

РАДИКАЛЫ КОЛЕЦ С ИНВОЛЮЦИЕЙ. 2

Катарина САЛАВОВА, Братислава

Резюме: Статья является продолжением [10]. В [1] было показано, что радикал в категории всех ассоциативных колец $\mathcal{R}$ может быть описан внешним образом на языке модулей. Показано, что и в категории колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ это так.

Ключевые слова: Инволюция, категория колец с инволюцией, $*$-идеал, симметрические элементы, радикал.

AMS : 16A21 Реф. Ж.: 2.723.211

---

0. Обозначения. Будем рассматривать категорию колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$. Объектами этой категории считаем ассоциативные кольца с инволюцией, т.е. антиавтоморфизмом порядка два. Морфизмами в этой категории считаем $*$ - гомоморфизмы, т.е. такой гомоморфизм φ, что для любого $x \in A$, $\varphi(x^*) = (\varphi(x))^*$. Множество I будем называть $*$ - идеалом, если I - идеал и $I^* = I$. Элемент x кольца с инволюцией A называется симметрическим (кососимметрическим), если $x^* = x$ $(x^* = -x)$. Если I - $*$ - идеал, то инволюция на кольце A индуцирует инволюцию на фактор-кольце $A/_I$. Категория колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ удовлетворяет аксиомам 1 - 7 из работы [7] и поэтому в ней можно ввести понятие радикала следующим образом. Пусть $\mathfrak{p}$ - произвольное свойство колец с инволюцией. Множество I будем называть $\mathfrak{p}$ - $*$ - идеалом, если I - $*$ - идеал в кольцо, обладающие свойством $\mathfrak{p}$. Через

$\mathfrak{r}(A)$ обозначим сумму всех $\mathfrak{r}$ - $*$ - идеалов кольца A.
В категории колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ определен радикал $\mathfrak{r}$, если выполнены условия:

R^*1. Всякий $*$ -гомоморфный образ $\mathfrak{r}$ -кольца есть $\mathfrak{r}$ -кольцо;

R^*2. $\mathfrak{r}(A)$ является $\mathfrak{r}$ - $*$ -идеалом для всякого кольца A;

R^*3. $\mathfrak{r}\left(A/_{\mathfrak{r}(A)}\right) = 0$ для любого кольца A.

5. Модулы и радикалы в $\mathcal{R}^*$. В [1] было показано, что радикал в категории всех ассоциативных колец $\mathcal{R}$ может быть описан внешним образом на языке модулей. Покажем, что и в категории $\mathcal{R}^*$ это так.

Пусть A - произвольное кольцо с инволюцией. Под A - модулем будем понимать правый A - модуль. Пусть $\Sigma_{(A,*)}$ - произвольный класс A - модулей над кольцом с инволюцией A. $*$ - ядром класса $\Sigma_{(A,*)}$ называется пересечение $Ker\,\Sigma_{(A,*)} = \bigcap Ann^*_A(M)$, где $M \in \Sigma_{(A,*)}$. Если $\Sigma_{(A,*)} = \emptyset$, то считаем, что $Ker\,\Sigma_{(A,*)} = A$. Если $Ker\,\Sigma_{(A,*)} = 0$, то $\Sigma_{(A,*)}$ называется $*$ -точным классом A - модулей.

Пусть каждому кольцу с инволюцией A поставлен в соответствие некоторый класс $\Sigma_{(A,*)}$ нетривиальных A - модулей (может быть и пустой), и пусть Σ_* - класс всех $\Sigma_{(A,*)}$, где A пробегает класс ассоциативных колец с инволюцией.

Определение 5.1. Класс модулей Σ_* назовем $*$ - общим классом модулей, если выполнены условия:

$M^*1)$ Если B - $*$ - идеал в кольце с инволюцией A, то из $M \in \Sigma_{(A/_B,\,*)}$ следует, что $M \in \Sigma_{(A,*)}$;

M^*2) Если B - $*$ - идеал в кольце с инволюцией A, то из $M \in \Sigma_{(A,*)}$ и $B \subseteq Ann_A^*(M)$ следует, что $M \in \Sigma_{(A/_B,*)}$;

M^*3) Если класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - точен, то $\Sigma_{(B,*)} \neq \emptyset$ для любого ненулевого $*$ - идеала B кольца с инволюцией A;

M^*4) Если $\Sigma_{(B,*)} \neq \emptyset$ для любого ненулевого $*$ - идеала кольца A, то класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - точен.

<u>Замечание 5.2</u>. Класс неприводимых модулей над кольцами с инволюцией является $*$ - общим.

<u>Определение 5.3</u>. Пусть Σ_* - $*$ - общий класс модулей. Тогда Σ_* - радикалом $R(\Sigma_*, A)$ кольца A назовем $*$ - ядро класса $\Sigma_{(A,*)}$, т.е. $R(\Sigma_*, A) = Ker\, \Sigma_{(A,*)} = \cap\{Ann_A^*(M) \mid M \in \Sigma_{(A,*)}\}$. Отметим, что $R(\Sigma_*, A)$ - $*$ - идеал кольца A. Если $\Sigma_{(A,*)} = \emptyset$, то кольцо A назовем Σ_*-радикальным. Если класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - точен, т.е. $R(\Sigma_*, A) = 0$, то кольцо A назовем Σ_* - полупростым. Заметим, что кольцо A будет Σ_* -радикальным тогда и только тогда, когда $A = R(\Sigma_*, A)$.

<u>Предложение 5.4</u>. $*$ - гомоморфный образ Σ_* - радикального кольца с инволюцией является Σ_* - радикальным кольцом.

<u>Предложение 5.5</u>. Если B такой $*$ - идеал кольца A, что $B \subseteq R(\Sigma_*, A)$, то $R(\Sigma_*, A/_B) = R(\Sigma_*, A)/_B$.

<u>Доказательство</u>. Если $\Sigma_{(A,*)} = \emptyset$, то в силу аксиомы M^*1 $\Sigma_{(A/_B,*)} = \emptyset$, т.е. $R(\Sigma_*, A/_B) = A/_B = R(\Sigma_*, A)/_B$. Если же $\Sigma_{(A,*)} \neq \emptyset$, то из включений $B \subseteq R(\Sigma_*, A) \subseteq Ann_A^*(M)$ и условий M^*1, M^*2 получаем,

что $R(\Sigma_*, B) = \cap\{Ann^*_{A/B}(M) \mid M \in \Sigma_{(A/B,*)}\} =$
$= (\cap\{Ann^*_A(M) \mid M \in \Sigma_{(A,*)}\})/_B = R(\Sigma_*, A)/_B$.

Следствие 5.6. $R\left(\Sigma_*, A/_{R(\Sigma_*,A)}\right) = 0$.

Предложение 5.7. В любом кольце с инволюцией A его Σ_* - радикал $R(\Sigma_*, A) = R$ совпадает с пересечением всех таких $*$ - идеалов T_α , фактор-кольца по которым Σ_* - полупросты.

Доказательство. Так как $R\left(\Sigma_*, A/_R\right) = 0$, то $R \supseteq \cap T_\alpha$. Пусть теперь $A_\alpha = A/_{T_\alpha}$ и $R(\Sigma_*, A_\alpha) = 0$, т.е. $\cap Ann^*_{A_\alpha}(M) = 0$, где $M \in \Sigma_{(A_\alpha,*)}$. Если M рассматривать как A - модуль, то $T_\alpha \subseteq Ann^*_A(M)$ и $Ann^*_A(M) = Ann^*_A(M)/_{T_\alpha}$, т.е. $\cap Ann^*_A(M) = T_\alpha$, где $M \in \Sigma_{(A_\alpha,*)}$. В силу M^*1 из последнего равенства получаем, что
$T_\alpha \supseteq \cap\{Ann^*_A(M) \mid M \in \Sigma_{(A,*)}\} = R$.
Следовательно, $\cap T_\alpha = R$.

Определение 5.8. Кольцо с инволюцией A называется $*$ - подпрямой суммой колец с инволюцией A_α , если в кольце существуют такие $*$ - идеалы T_α , что $\cap T_\alpha = 0$ и кольцо A_α $*$ - изоморфно кольцу $A/_{T_\alpha}$ с индуцированной инволюцией.

Следствие 5.9. $*$ - подпрямая сумма $*$ - полупростых колец с инволюцией A_α будет Σ_* - полупростым кольцом с инволюцией.

Определение 5.10. Пусть Σ_* - $*$ - общий класс модулей. Через $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ будем обозначать класс всех колец A , обладающих $*$ - точным модулем M из класса $\Sigma_{(A,*)}$.

Следствие 5.11. Кольцо с инволюцией A является Σ_* - полупростым тогда и только тогда, когда A - $*$ - подпрямая сумма колец из класса $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

Лемма 5.12. Если B - Σ_* - радикальный $*$ - идеал кольца A, то $B \subseteq R(\Sigma_*, A)$.

Доказательство. Действительно, если допустить, что $B \nsubseteq R(\Sigma_*, A)$, то существует такой A - модуль $M \in \Sigma_{(A,*)}$, что $B \nsubseteq Ann^*_A(M)$. Поэтому $\bar{B} = B/Ann^*_B(M)^* = B/B \cap Ann^*_A(M) = B + Ann^*_A(M)/Ann^*_A(M)$ - ненулевой $*$ - идеал в Σ_* - полупростом кольце $A/Ann^*_A(M)$. В силу M^*3, $\Sigma_{(\bar{B},*)} \neq \emptyset$, но тогда в силу M^*1, $\Sigma_{(B,*)} \neq \emptyset$. Получили противоречие с Σ_* - радикальностью $*$ - идеала B.

Следствие 5.13. Сумма T любого множества Σ_* - радикальных $*$ - идеалов R_α кольца A есть Σ_* - радикальный $*$ - идеал.

Предложение 5.14. Σ_* - радикал $R(\Sigma_*, A)$ кольца с инволюцией A совпадает с суммой T всех его Σ_* - радикальных $*$ - идеалов.

Доказательство. Ввиду следствия 5.13 и леммы 5.12 $R(\Sigma_*, A) \supseteq T$ фактор-кольцо A/T не содержит ненулевых Σ_* - радикальных $*$ - идеалов. В силу M^*4, кольцо A/T Σ_* - полупросто. В силу предложения 5.7, $R(\Sigma_*, A) \subseteq T$.

Теорема 5.15. а) Всякий Σ_* - радикал является радикалом в категории колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$, т.е. удовлетворяет условиям R^*1 - R^*3.

б) Обратно, если ρ - произвольный радикал в категории $\mathcal{R}^*$, то существует такой $*$ - общий класс Σ_* - модулей, что ρ совпадает с Σ_* - радикалом.

в) Для того, чтобы некоторый класс колец $\mathfrak{M}$ совпадал с $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ для подходящего $*$ - общего класса Σ_* -

модулей необходимо и достаточно, чтобы: α) класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет свойству U^* ; β) $S_{\mathfrak{M}}$ - полупростые кольца с инволюцией исчерпывались $*$ - подпрямыми суммами колец из класса $\mathfrak{M}$.

Доказательство. а) Следует непосредственно из предложения 5.4, следствия 5.6, предложения 5.14, следствия 5.13.

б) Пусть $\mathcal{z}$ - произвольный радикал в категории $\mathfrak{R}^*$ и $\mathfrak{M} = \{A \in \mathfrak{R}^* \mid A \neq 0, \mathcal{z}(A) = 0\}$.

Каждому кольцу с инволюцией A поставим в соотвествие класс $\Sigma_{(A,*)} = \{M_A \mid MA \neq 0, A/Ann^*_A(M) \in \mathfrak{M}\}$. Легко видеть, что класс Σ_* всех $\Sigma_{(A,*)}$ удовлетворяет M^*1 и M^*2. Покажем, что для построенного класса Σ_*-модулей $\mathfrak{M}(\Sigma_*) = \mathfrak{M}$. Пусть $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$. По определению класса $\Sigma_{(A,*)}$ -модулей, $\mathcal{z}(A) = 0$. Наоборот. Пусть кольцо A - $\mathcal{z}$ - полупросто. Вложим кольцо A в кольцо с единицей M и рассмотрим M как A - модуль. Тогда $M \in \Sigma_{(A,*)}$ и $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$. Покажем, что $R(\Sigma_*, A) = \mathcal{z}(A)$ для любого кольца с инволюцией A . Действительно, пусть $R(\Sigma_*, A) = A$, т.е. $\Sigma_{(A,*)} = \emptyset$ и $\mathcal{z}(A) \neq A$. Тогда $\mathcal{z}(A/\mathcal{z}(A)) = 0$. По предыдущему замечанию и M^*1, $\Sigma_{(A,*)} \neq \emptyset$. Приходим к противоречию. Если же $\mathcal{z}(A) = A$ и $\Sigma_{(A,*)} \neq \emptyset$, т.е. существует $M \in \Sigma_{(A,*)}$, то по предыдущему замечанию, $\mathcal{z}(A/Ann^*_A(M)) = 0$. Ввиду предложения 1.2 из [7], $\mathcal{z}(A) \subseteq Ann^*_A(M) \neq A$. Получили противоречие.

Проверим условие M^*3. Пусть класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - точен. Тогда $\mathcal{z}(A) = 0$. Пусть $\Sigma_{(B,*)} = \emptyset$ для какого-то ненулевого $*$ - идеала B кольца A . Тогда $R(\Sigma_*, B) = B =$

$= \mathfrak{s}(B)$. Но $R(\Sigma_*, A) = \mathfrak{s}(A) = 0$. Следовательно, $B \subseteq \subseteq \mathfrak{s}(A) = 0$. Получили противоречие. Свойство M^*4 проверяется аналогично.

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Sigma_*)$ для подходящего $*$ - общего класса Σ_* - модулей. Проверим необходимость условий α), β). Пусть B - $*$ - идеал кольца Z и $Z \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$. Тогда $R(\Sigma_*, Z) = 0$, по свойству M^*3, $\Sigma_{(B,*)} \neq \emptyset$, т.е. $R(\Sigma_*, B) \neq B$. Рассмотрим естественный эпиморфизм кольца B на кольцо $B/R(\Sigma_*, B)$. Ввиду следствия 5.11, кольцо $B/R(\Sigma_*, B)$ является $*$ - подпрямой суммой колец из класса $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$. Следовательно, условие α) выполнено. Проверим β). Заметим, что $R(\Sigma_*, B) = S_{\mathfrak{M}(\Sigma_*)}(B)$ для любого кольца с инволюцией B. Но $R(\Sigma_*, -)$ - полупростые кольца - это $*$ - подпрямые суммы колец из класса $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ (следствие 2.11), т.е. выполнено условие β).

Проверим достаточность условий α) и β). Положим $\Sigma_{(A,*)} = \{M \mid MA \neq 0$ и $A/Ann^*_A(M) \in \mathfrak{M}\}$. Аналогично первой части доказательства можно показать, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Sigma_*)$ и класс удовлетворяет условиям M^*1 - M^*4.

6. Специальные радикалы и специальные модули

Определение 6.1. Пусть каждому кольцу с инволюцией A поставлен в соответствие некоторый класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - первичных A - модулей. Класс $\Sigma_* = \cup \Sigma_{(A,*)}$ называется $*$ - специальным классом модулей, если выполнены условия:

MS^*1) Если $M \in \Sigma_{(A/P,*)}$, где P - $*$ - идеал в A, то $M \in \Sigma_{(A,*)}$ (здесь $xa = x\bar{a}$);

MS^*2) Если $M \in \Sigma_{(A,*)}$ и P - $*$ - идеал в A

такой, что $P \subseteq Ann_A^*(M)$, то $M \in \Sigma_{(A/P,*)}$;

$MS^*3)$ Если $M \in \Sigma_{(A,*)}$ и $MB \neq 0$, где B - $*$ - идеал кольца A, то $M \in \Sigma_{(B,*)}$;

$MS^*4)$ Если $M \in \Sigma_{(B,*)}$ и B - $*$ - идеал в A, то $MB \in \Sigma_{(A,*)}$. Σ_* - специальным радикалом кольца с инволюцией A назовем пересечение $R(\Sigma_*, A) = \bigcap\limits_{M \in \Sigma_{(A,*)}} Ann_A^*(M)$. Если $\Sigma_A = \emptyset$, то будем считать, что $R(\Sigma_*, A) = A$. Если $R(\Sigma_*, A) = 0$, то кольцо A назовем Σ_*- полупростым. $*$ - идеал B кольца A назовем Σ_* - радикальным если B, рассматриваемое как кольцо, является Σ_* - радикальным. Далее под Σ_* - радикалом будем понимать Σ_* - специальный радикал.

<u>Следствие 6.2</u>. Класс всех $*$ - первичных модулей над кольцами с инволюцией является $*$ - специальным классом модулей.

<u>Доказательство</u>. Следует учесть лемму 2.11, лемму 2.13 и лемму 2.14 из [10].

<u>Предложение 6.3</u>. Если B - $*$ - идеал кольца с инволюцией A, то $R(\Sigma_*, B) = B \cap R(\Sigma_*, A)$.

<u>Доказательство</u>. Из определения 2, условий MS^*3, MS^*4 леммы 2.14 следует, что $B \cap R(\Sigma_*, A) =$

$= B \cap (\bigcap Ann^*(M) \mid M \in \Sigma_{(A,*)}) = \bigcap\{Ann_B^*(M \mid M \in \Sigma_{(A,*)}\} \geq$

$\geq R(\Sigma_*, B)$; $R(\Sigma_*, B) = \bigcap\{Ann_B^*(M) \mid M \in \Sigma_{(B,*)}\} =$

$= \bigcap\{B \cap Ann_A^*(MB) \mid M \in \Sigma_{(B,*)}\} =$

$= B \cap (\bigcap\{Ann_A^*(MB) \mid M \in \Sigma_{(B,*)}\} \geq B \cap R(\Sigma_*, A)$.

<u>Следствие 6.4</u>. Σ_* - радикал произвольного кольца A является Σ_* - радикальным $*$ - идеалом, содержащим любой другой Σ_* - радикальный $*$ - идеал кольца A.

Следствие 6.5. Любой Σ_* - $*$ - специальный класс модулей является $*$ - общим классом модулей.

Следствие 6.6. Σ_* - спциальный радикал является радикалом в категории $\mathcal{R}^*$.

Теорема 6.7. Если Σ_* - $*$ - специальный класс модулей, то $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ является $*$ - специальным классом колец. Обратно, для всякого $*$ - специального класса $\mathfrak{M}$ существует $*$ - специальный класс модулей Σ_* такой, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

Доказательство. Пусть Σ_* - $*$ - специальный класс модулей. Покажем, что класс $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ удовлетворяет условиям $S*1$, $S*4$ и $S*5$. Проверим условие $S*1$. Пусть $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$, тогда по лемме 2.8 в [10] A - $*$ - первичное кольцо.

$S*4$) Пусть B - ненулевой $*$ -идеал кольца $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$, т.е. существует $*$ -точный A - модуль $M_A \in \Sigma_{(A,*)}$. Тогда $MB \neq 0$ и $M_B \in \Sigma_{(B,*)}$. Но $Ann^*_B(M) = Ann^*_A(M) \cap B = 0$, т.е. $B \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

$S*5$) Пусть A - ненулевой $*$ - идеал $*$ - первичного кольца C, причем $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$, т.е. существует $*$ - точный A - модуль $M_A \in \Sigma_{(A,*)}$. По свойству MS^*4, $MA \in \Sigma_{(C,*)}$ и по лемме 2.14 из [10] $0 = Ann^*_A(M) = Ann^*_C(MA) \cap A$. Из $*$ - первичности кольца C следует, что $C \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

Обратно, пусть $\mathfrak{M}$ - $*$ - специальный класс колец. Каждому кольцу с инволюцией поставим в соответствие класс $\Sigma_{(A,*)}$ всех $*$ - первичных A - модулей, удовлетворяющих условию: $A/Ann^*_A(M) \in \mathfrak{M}$. Пусть $\Sigma_* = \cup \Sigma_{(A,*)}$. Проверим, что класс Σ_* является искомым. Условия $MS*1$ и $MS*2$ следуют из леммы 2.11 из [10].

$MS*3$) Пусть $M_A \in \Sigma_{(A,*)}$ и $MB \neq 0$ для $*$ - идеала

B кольца A. Тогда $0 \neq B/Ann_B^*(M) = B/B \cap Ann_A^*(M) =$ $= B + Ann_A^*(M)/Ann_A^*(M) \subseteq A/Ann_A^*(M) \in \mathfrak{M}$.

Следовательно, по свойству S^*4, $B/Ann_B^*(M) \in \mathfrak{M}$, т.е. $M_B \in \Sigma_{(B,*)}$.

$MS^*4)$ Пусть $M \in \Sigma_{(B,*)}$ и B - $*$ - идеал кольца A. По лемме 2.14 из [10], MB $*$ - первичный A - модуль. Имеет место цепочка включений: $A/Ann_A^*(MB) \supseteq B +$ $+ Ann_A^*(MB)/Ann_A^*(MB) \cong B/Ann_A^*(MB) \cap B = B/Ann_B^*(M)$.

Но $B/Ann_B^*(M) \in \mathfrak{M}$ и $A/Ann_A^*(MB)$ - $*$ - первичное кольцо. Применяя S^*4, получаем, что $A/Ann_A^*(MB) \in \mathfrak{M}$, т.е. $MB \in \Sigma_{(A,*)}$.

Осталось показать, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Sigma_*)$. Из определения класса $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ следует, что $\mathfrak{M}(\Sigma_*) \subseteq \mathfrak{M}$. Наоборот, пусть $A \in \mathfrak{M}$, тогда A - $*$ - первичное кольцо, и по лемме 2.8 из [10] существует $*$ - точный, $*$ - первичный A - модуль M, т.е. $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

<u>Следствие 6.8</u>. Радикал ρ является $*$ - специальным радикалом в $\mathcal{R}^*$ тогда и только тогда, когда существует $*$ - специальный класс Σ_* - модулей такой, что $R(\Sigma_*, -) = \rho$.

7. <u>Примеры $*$ - специальных радикалов</u>

<u>Замечание 7.1</u>. Пусть Σ - специальный класс модулей (см. [9]) и радикал $R(\Sigma, -)$ замкнут относительно инволюции. Для любого кольца с инволюцией положим $\Sigma_{(A,*)} = \Sigma_A$. Тогда Σ_* $*$ - специальный класс модулей и $R(\Sigma_*, A) =$ $= R(\Sigma, A)$.

Приведем несколько примеров $*$ - специальных классов модулей.

1. Класс Σ_* всех $*$ - первичных модулей. Соответствующий Σ_* - $*$ - специальный класс колец $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ совпадает с классом всех $*$ - первичных колец. Следовательно, ввиду теоремы 6 из [4], $R(\Sigma_*, A)$ совпадает с первичным радикалом кольца A.

2. Класс Σ_* всех первичных модулей над кольцами с инволюцией. Соответствующий Σ_* - $*$ - специальный класс колец $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ совпадает с классом всех $*$ - первичных колец. Ввиду замечания 7.1, $R(\Sigma_*, A)$ совпадает с первичным радикалом кольца A.

3. Класс Σ_* всех неприводимых модулей над кольцами с инволюцией. Соответствующий Σ_* - $*$ - специальный класс колец $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ совпадает с классом всех $*$ - примитивных колец (см. [8]). $R(\Sigma_*, A)$ совпадает с радикалом Джекобсона и равен пересечению всех его $*$ - примитивных идеалов.

4. Класс Σ_* всех простых модулей (см. [9]). Соответствующий Σ_* - $*$ - специальный класс колец $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ совпадает с классом всех $*$ - простых колец (т.е. не имеющих собственных $*$ - идеалов) с единицей. $R(\Sigma_*, A)$ совпадает с радикалом Брауна-Маккоя.

Отметим, что в примере 1.4 из [10] $*$ - специальный радикал существенно зависит от инволюции кольца и, следовательно, он не может быть продолжен до (специального) радикала в категории колец.

В заключение автор приносит благодарность доценту А.В.

Михалеву за внимание к работе.

Литература

[1] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю.М. РЯБУХИН: Модули и радикалы, Докл. Акад. Наук СССР 156(1964), 991-994.

[2] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ: Первичные модули и радикалы Бэра, Сибирский мат. журнал 2(1961), 801-806.

[3] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ: Радикалы ассоциативных колец, Математический сборник 44(1958), 179-212.

[4] MARTINDALE W.S. 3rd.: Rings with involution and polynomial identities, J. algebra 11(1966), 186-194.

[5] SZASZ F.: Radikale der Ringe, Akademiai Kiadó, Budapest, 1975.

[6] COZZENS J.H.: Simple principal left ideal domains, J. algebra 23(1972), 66-75.

[7] Ю.М. РЯБУХИН: Радикалы в категориях, Математические исследования 2(1967), 107-165.

[8] BAXTER W.E., MARTINDALE W.S. 3rd.: Rings with involution and polynomial identities, Canad. J. Math. 20(1968), 465-473.

[9] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю.М. РЯБУХИН: Специальные модули и специальные радикалы, Докл. Акад. Наук СССР 147(1962), 1274-1277.

[10] К. САЛАВОВА: Радикалы колец с инволюцией 1, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 367-381.

Podtatranského 8
80100 Bratislava
Československo

(Oblatum 13.4. 1977)