

Werk

Label: Article

Jahr: 1977

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?316342866_0018|log49

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ОБ АЛГОРИФМИЧЕСКОЙ НЕАППРОКСИМИРУЕМОСТИ ТОЧНЫХ ВЕРХНИХ
ГРАНИЦ КОНСТРУКТИВНЫХ ПСЕВДОСЕЧЕНИЙ

А. КУЧЕРА (А. KUČERA), Прага

Содержание: В настоящей заметке рассматриваются некоторые свойства псевдосечений (по существу нижних дедекндовых сечений), связанные с вопросами алгоритмической аппроксимируемости их точных верхних границ. Приведено необходимое и достаточное условие существования алгоритма, оценивающего снизу расстояние псевдосечения от любого рекурсивно перечислимого множества рациональных чисел в его дополнении.

Ключевые слова: Частично рекурсивная функция, рекурсивно перечислимое множество, псевдосечение, субкреативность, алгоритм нижней оценки расстояния, эффективная неаппроксимируемость.

AMS: 02E99, 02F25

Ref. Ž.: 2.644.2

Э. Шпекер построил возрастающую ограниченную алгоритмическую последовательность рациональных чисел (РЧ), не сходящуюся ни к какому конструктивному действительному числу (КДЧ). И.Д. Заславский усилил этот результат, построив возрастающую ограниченную алгоритмическую последовательность РЧ, для которой существует алгоритм, который по всякому КДЧ являющемуся верхней границей этой последовательности выдает меньшее КДЧ, также являющееся верхней границей этой последовательности. Вопрос о верхних границах алгоритмических последовательностей КДЧ равносильно сведен Цейтиним в [5] к вопросу о верхних границах псевдосечений, и показано, что необхо-

димым и достаточным условием существования понижающего алгоритма для собственного псевдосечения является его сильная неразрешимость. Заметим, что псевдосечение - это по существу нижнее дедекиндово сечение, и понижающий алгоритм для псевдосечения M - алгоритм перерабатывающий всякое КДЧ, являющееся верхней границей M , в меньшее КДЧ, также являющееся верхней границей M .

В настоящей статье рассматриваются условия, при которых для собственного псевдосечения возможно алгоритмически понижать не только любое КДЧ, являющееся его верхней границей, но даже алгоритмически оценивать снизу расстояние между псевдосечением и любым рекурсивно перечислимым (р.п.) множеством $PЧ$ в его дополнении.

В дальнейшем мы пользуемся основными определениями и обозначениями из [1],[2],[3]. Все формулы и утверждения мы понимаем в соответствии с правилами конструктивного понимания математических суждений.

В статье используется аппарат частично рекурсивных функций (ЧРФ). В то же время в статье используются без дополнительных пояснений некоторые понятия и результаты, введенные и доказанные при помощи других аппаратов, равнообъемность которых аппарату ЧРФ общеизвестна (например аппарат нормальных алгоритмов, V -перечислимых множеств).

Множество всех натуральных чисел (НЧ) мы будем обозначать посредством N , множество всех $PЧ$ - \mathcal{Q} . Буквы i, j, k, l, m, n, p, q служат переменными для НЧ, буквы a, b, c, x, y переменными для $PЧ$. Мы будем пользоваться некоторой стандартной нумерацией всех ЧРФ одной переменной φ_n (порождаемой надлежащей ЧРФ двух переменных) и соответствующей ей

нумерацией всех р.п. множеств НЧ $W_{\mathcal{K}}$. Через $D_{\mathcal{K}}$ мы будем обозначать конечное множество, каноническим индексом которого является \mathcal{K} ([3]).

Мы алгорифмически перенумеруем все РЧ, причем каждому РЧ a будет соответствовать НЧ $[a]^N$, и каждому НЧ m - РЧ $[m]^Q$. Таким образом, имеется естественное соответствие множеств РЧ и множеств НЧ. Ввиду этого мы будем без дальнейших пояснений пользоваться некоторыми понятиями, которые обычно относятся к множествам НЧ, но при помощи введенной нумерации без труда переносятся на множества РЧ. Для любого множества НЧ A мы будем обозначать посредством $[A]^Q$ множество РЧ $\{a \mid [a]^N \in A\}$, т.е. $\{a \mid \exists m (m \in A \ \& \ [m]^Q \neq a)\}$.

Сначала мы заново сформулируем понятие субкреативного множества из [6].

Определение. Р.п. множество НЧ A мы назовем субкреативным, если существует общерекурсивная функция (ОРФ) f такая, что

$$\forall \mathcal{K} (W_{\mathcal{K}} \cap D_{f(\mathcal{K})} \neq (N-A) \cap D_{f(\mathcal{K})}) .$$

Замечание 1. Легко доказать, что р.п. множество НЧ A субкреативно тогда и только тогда, когда существует ЧРФ φ такая, что

$$\forall \mathcal{K} (W_{\mathcal{K}} \cap A = \emptyset \supset ! \varphi(\mathcal{K}) \ \& \ D_{\varphi(\mathcal{K})} \not\subseteq A \cup W_{\mathcal{K}}) .$$

Замечание 2. Согласно результатам М.И. Кановича ([6], [7]), всякое субкреативное множество является сильно неразрешимым ([5]), но с другой стороны существуют сильно неразрешимые множества, не являющиеся субкреативными. Существование субкреативных множеств очевидно (примером служат креативные множества).

Мы будем рассматривать понятие субкреативности в связи с псевдосечениями. Мы сформулируем заново понятие псевдосечения из [5].

Определение. 1) Р.п. множество РЧ A мы назовем псевдосечением, если $A = \{x \mid \exists y (y \in A \ \& \ x < y)\}$.

2) Псевдосечение A мы назовем собственным, если существуют РЧ a, b такие, что $a \in A \ \& \ b \notin A$.

Замечание 3. Если не ограничиться рамками КДЧ, и ввести в рассмотрение тоже псевдочисла ([2]), то по всякому собственному псевдосечению легко построить псевдочисло, являющееся его "точной верхней границей".

Приведем для субкреативных псевдосечений характеристику, которая сильнее существования понижающего алгоритма.

Определение. 1) Пусть M - собственное псевдосечение, ψ - ЧРФ. Мы обозначим $Ap(\psi, M)$, если

а) $\forall m (\psi(m) \ \& \ m \leq n \Rightarrow \psi(m))$,

б) $\forall m (\psi(m) \Rightarrow ([\psi(m)]^a + 2^{-n} \notin M) \ \& \ ([\psi(m)]^a - 2^{-n} \in M))$.

2) Собственное псевдосечение M мы назовем эффективно неаппроксимируемым, если существует ЧРФ η такая, что

(1) $\forall k (Ap(\eta, M) \Rightarrow \eta(k) \ \& \ \neg \eta(k))$.

Обозначение. Посредством sgl мы обозначим ОРФ двух переменных такую, что для любых НЧ p, q

$$[W_{sgl(p,q)}]^a = \{a \mid \exists k (k \in W_p \ \& \ a \geq [k]^a - [q]^a)\}.$$

Таким образом, р.п. множество РЧ $[W_{sgl(p,q)}]^a$ - "сдвиг" р.п. множества РЧ $[W_p]^a$ на число $[q]^a$

Определение. ЧРФ ω мы назовем алгоритмом нижней оценки расстояния для собственного псевдосечения M , если

$$\forall k ([W_k]^\alpha \cap M = \emptyset \supset ! \omega(k) \& [\omega(k)]^\alpha > 0 \& \\ \& [W_{\text{сгф}(k, \omega(k))}]^\alpha \cap M = \emptyset) .$$

Теорема 1. Для любого собственного псевдосечения M следующие условия попарно эквивалентны:

- 1) псевдосечение M субкреативно,
- 2) псевдосечение M обладает алгоритмом нижней оценки расстояния,
- 3) псевдосечение M эффективно неаппроксимируемо.

Доказательство. Пусть M - собственное псевдосечение.

- 1) Мы допустим, что M - субкреативно. Тогда можно построить ОРФ ω_1, ω_2 такие, что для всякого НЧ k , если $[W_k]^\alpha \cap M = \emptyset$, то $[D_{\omega_1(k)}]^\alpha \notin M \cup B_k$, и $[D_{\omega_2(k)}]^\alpha \notin M \cup B_k \cup \{a \mid \exists x (x \leq a \& x \in [D_{\omega_1(k)}]^\alpha) \& \forall y (y \in [D_{\omega_1(k)}]^\alpha \& x < y \supset y \in B_k)\}$,

где $B_k \subseteq \{a \mid \exists b (b \in [W_k]^\alpha \& a \geq b)\}$, и, следовательно, $\neg \exists a b (a \in [D_{\omega_1(k)}]^\alpha \& b \in [D_{\omega_2(k)}]^\alpha \& a > b \& \forall y (b \leq y \leq a \supset y \notin M \cup B_k))$.

Мы построим ОРФ ω такую, что

- а) $[\omega(k)]^\alpha$ равно наименьшему положительному РЧ, содержащемуся в множестве $\{ |x - y| \mid y \in [D_{\omega_2(k)}]^\alpha \& x \in [D_{\omega_1(k)}]^\alpha \}$, если такое число существует,
- б) $[\omega(k)]^\alpha = 0$, в противном случае.

Ввиду сказанного видно, что ОРФ ω - алгоритм нижней оценки расстояния для M .

- 2) Пусть ω - алгоритм нижней оценки расстояния для M . Мы построим ОРФ g такую, что для всякого НЧ k $[W_{g(k)}]^\alpha = \{a \mid \exists m (! \varphi_k(m) \& [\varphi_k(m)]^\alpha + 2^{-m} \leq a)\}$.

Тогда выполнено $\forall k(Ar(\varphi_k, M) \supset [W_{g(k)}]^Q \cap M = \emptyset)$.

Далее, легко доказать, что

$$\forall k \exists q (!\varphi_k(m+1) \& Ar(\varphi_k, M) \& [q]^Q = 2^{-m} \supset \\ \supset [W_{cgv(g(k), q)}]^Q \cap M \neq \emptyset).$$

Мы построим ЧРФ η такую, что

$$\forall k ([\eta(k)]^Q \simeq 1 + \mu_m(2^{-m} \in [\omega(g(k))]^Q)).$$

Тогда, очевидно η - ЧРФ, требуемая в определении эффективной неаппроксимируемости для M .

3) Пусть η - ЧРФ, для которой (1). Зафиксируем РЧ a, b такие, что $a \in M$ & $b \notin M$. Построим ОРФ h такую, что

$$\text{для любых НЧ } k, m \quad !\varphi_{h(k)}(m) \equiv \exists y (y \in [W_k]^Q \& \\ \& y - 2^{-m+1} \in M), !\varphi_{h(k)}(m) \supset ([\varphi_{h(k)}(m)]^Q - 2^{-m} \in M) \& \\ \& \exists y (y \in [W_k]^Q \& y \in [\varphi_{h(k)}(m)]^Q + 2^{-m}).$$

Тогда выполнено $\forall k ([W_k]^Q \cap M = \emptyset \supset Ar(\varphi_{h(k)}, M))$.

Нетрудно доказать, что

$$\forall k \exists q ([W_{cgv(h, q)}]^Q \cap M \neq \emptyset \& [q]^Q = 2^{-m} \supset !\varphi_{h(k)}(m+1)).$$

Мы построим ЧРФ α такую, что для любого НЧ k

$$!\alpha(k) \equiv !\eta(h(k)), \text{ и если } !\alpha(k), \text{ то } [D_{\alpha(k)}]^Q \\ \text{содержит именно приведенные РЧ } a + j \cdot 2^{-i} \quad (j = 0, \dots, j_0), \\ \text{где } i \leq \eta(h(k)), \quad j_0 \leq \mu_m(b - a < m \cdot 2^{-i}).$$

Тогда выполнено

$$\forall k ([W_k]^Q \cap M = \emptyset \supset !\alpha(k) \& [D_{\alpha(k)}]^Q \not\subseteq M \cup [W_k]^Q),$$

и, следовательно, псевдосечение M субкреативно.

Теорема доказана.

В [5] показано, что существуют два собственных сильно неразрешимых псевдосечения, сумма которых не является сильно

неразрешимой. С другой стороны, на основании предыдущей теоремы, можно доказать следующее утверждение.

Следствие. Сумма субкреативного псевдосечения и любого собственного псевдосечения является субкреативным псевдосечением.

В работе [5] рассматривается вычислимый оператор, позволяющий перевести всякое р.п. множество НЧ A в псевдосечение

$$\mathcal{U}(A) = \{ \alpha \mid \exists k (D_k \subseteq A \ \& \ \alpha < \sum_{l \in D_k} 2^{-l}) \} .$$

В [5] показано, что для любого р.п. множества НЧ A псевдосечение $\mathcal{U}(A)$ сильно неразрешимо в том и только том случае, если множество A сильно неразрешимо. Оказывается, что аналогичное утверждение верно и для свойства субкреативности.

Теорема 2. Для любого р.п. множества НЧ A множество $\mathcal{U}(A)$ субкреативно в том и только том случае, если множество A субкреативно.

Доказательство. 1) Пусть A - субкреативное множество НЧ.

Мы построим ОРФ g такую, что для всякого НЧ k

$$W_{g(k)} = \{ m \mid \exists n (D_n \subseteq A \ \& \ m \notin D_n \ \& \ \exists \alpha (\alpha \in [W_k]^q \ \& \ \alpha < 2^{-m} + \sum_{l \in D_n} 2^{-l})) \} .$$

Легко видеть (см. лемму 4 §4 из [5]), что

$$\forall k ([W_k]^q \cap \mathcal{U}(A) = \emptyset \supset W_{g(k)} \cap A = \emptyset) .$$

Нетрудно проверить, что

$$\forall k n q ([W_{g \circ h}(k, q)]^q \cap \mathcal{U}(A) \neq \emptyset \ \& \ [q]^q = 2^{-n} \supset \{ 0, \dots, n \} \subseteq A \cup W_{g(k)}) .$$

Ввиду сказанного и субкреативности A ясно, что псевдосечение $\mathcal{U}(A)$ обладает алгоритмом нижней оценки расстояния и, ввиду теоремы 1, является субкреативным.

2) Пусть для р.п. множества НЧ A псевдосечение $\mathcal{U}(A)$ суб-

креативно. Мы построим ОРФ \mathcal{K} такую, что для всякого НЧ \mathcal{K}

$$[W_{\mathcal{K}(\mathcal{K})}]^{\mathcal{Q}} = \{a \mid \exists m (D_m \subseteq W_{\mathcal{K}} \ \& \ a \geq 2 - \sum_{\ell \in D_m} 2^{-\ell})\} .$$

Тогда выполнено

$$\forall \mathcal{K} (W_{\mathcal{K}} \cap A = \emptyset \supset [W_{\mathcal{K}(\mathcal{K})}]^{\mathcal{Q}} \cap \mathcal{U}(A) = \emptyset) .$$

Легко доказать, что

$$\forall \mathcal{K} \exists q (\{0, \dots, m\} \subseteq A \cup W_{\mathcal{K}} \ \& \ [q]^{\mathcal{Q}} = 2^{-m} \supset [W_{\text{cgl}(\mathcal{K}(\mathcal{K}), q)}]^{\mathcal{Q}} \cap \mathcal{U}(A) \neq \emptyset) .$$

Применив к псевдосечению $\mathcal{U}(A)$ теорему 1, мы получим алгоритм нижней оценки расстояния для $\mathcal{U}(A)$. Исходя от этого алгоритма, легко получить (см. замечание 1) ОРФ, требуемому определением субкреативности для множества A . Теорема доказана.

На основании теоремы 2 § 4 из [5], замечания 2 и предыдущей теоремы получаем следующее следствие.

- Следствие. 1) Существует субкреативное псевдосечение.
 2) Существует сильно неразрешимое псевдосечение, которое не является субкреативным.

Л и т е р а т у р а

- [1] МАРКОВ А.А.: Теория алгоритмов, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова XLII (1954).
 [2] ШАНИН Н.А.: Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова LXVII (1962), 15-294.
 [3] РОДЖЕРС Х.: Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Москва 1972.
 [4] ШАНИН Н.А.: О конструктивном понимании математических суждений, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова LII (1958), 226-311.

- [5] ЦЕЙТИН Г.С.: О верхних границах перечислимых множеств конструктивных вещественных чисел, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова СХІІІ (1970), 102-172.
- [6] КАНОВИЧ М.И.: Сложность ограниченного разрешения алгоритмов, Исследования по теории алгоритмов и математической логике, ВЦ АН СССР Москва 1973, 3-41.
- [7] КАНОВИЧ М.И.: Об универсальности сильно неразрешимых множеств, Доклады АН СССР 204(1972), 533-535.
- [8] КАНОВИЧ М.И.: Сложность предела шпекеровых последовательностей, Доклады АН СССР 214(1974), 1020-1023.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Malostranské nám. 25, Praha 1

Československo

(Oblatum 7.4. 1977)

