COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,2 (1977)

ОБ ОДНОМ КОНСТРУКТИВНОМ АНАЛОГЕ ФУНКЦИЙ m-ГО КЛАССА БЭРА

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание. В настоящей заметке вводятся и исследуются конструктивные аналоги функций m-го класса Бэра. Большинство результатов посвящено A-функциям 1-го класса Бэра и множествам (конструктивных действительных чисел) типа $G_{\sigma}^{\emptyset(m)}$.

Ключевые слова. Конструктивные функции, релятивизованные псевдочисла, m-ый класс Бэра, множество типа $G_{\sigma}^{\emptyset(m)}$.

AMS: Primary 02E99 Ref. Ž.: 2.644.2
Secondary 26A21

В следующем мы пользуемся без дальнейших ссылок понятиями и обозначениями из [8] и понятиями последовательности нормальных алгорифмов (соотв. слов) определенного типа. В дополнение к переменным, введенным в [8], буква j будет переменной для целых чисел, a t переменной для натуральных чисел (НЧ).

КФДП $\mathcal{F}$ мы назовем функцией, если выполнено

$$\forall x(!\mathcal{F}(x) \& (x \leq 0 \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(0)) \& (1 \leq x \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(1))) .$$

Мы напомним, что псевдофундаментальностью (соотв. псевдосходимостью, соотв. псевдонепрерывностью) мы называем фундаментальность (соотв. сходимость, соотв. непрерывность) в классическом смысле.

Для слова P в алфавите Ц и НЧ m мы обозначим:

$$P^{\{0\}} \rightleftharpoons \Lambda \quad \text{и} \quad P^{\{m+1\}} \rightleftharpoons P^{\{m\}} P .$$

Если m и λ_0 НЧ такие, что $\forall k (! \varphi_{\lambda_0}^{\emptyset^{(m)}} (\varkappa(k)))$, то мы назовем отображение, сопоставляющее для любого НЧ k этому НЧ слово R_k, где $R_k \rightleftharpoons c(\varphi_{\lambda_0}^{\emptyset^{(m)}} (\varkappa(k)))$, $\emptyset^{(m)}$-последовательностью слов в Ц, а λ_0 ее геделевым номером; описанное отображение мы обозначим посредством $\{R_k\}_k^{\emptyset^{(m)},\lambda_0}$.

Пусть m НЧ. Слово P мы назовем $\emptyset^{(m)}$-псевдочислом ($\emptyset^{(m)}$-ПЧ), если P РЧ или существуют НЧ m и ℓ такие, что $m \leq m \;\&\; P \rightleftharpoons \ell \diamond^{\{m+1\}}$ и ℓ является геделевым номером псевдофундаментальной $\emptyset^{(m)}$-последовательности РЧ. Множество всех $\emptyset^{(m)}$-ПЧ мы обозначим посредством $\Pi^{\emptyset^{(m)}}$. Если P_0 и P_1 $\emptyset^{(m)}$-ПЧ, $P_0 \in Q \;\&\; P_1 \rightleftharpoons \ell \diamond^{\{m+1\}}$, то мы для всякого НЧ k определим $\underline{P_0}(k) \rightleftharpoons P_0$ и $\underline{P_1}(k) \rightleftharpoons c(\varphi_\ell^{\emptyset^{(m)}} (\varkappa(k)))$.

Мы заметим, что для всякого КДЧ P существует $\emptyset$-ПЧ R такое, что $\forall k (\underline{R}(k) \rightleftharpoons \underline{P}(k))$.

На множестве $\wedge S (S \in D \vee \exists m (S \in \Pi^{\emptyset^{(m)}}))$ мы определим естественным способом отношения равенства ($=$) и "меньше" ($<$) и для любых элементов P_0 и P_1 этого множества мы обозначим $P_0 \leq P_1 \rightleftharpoons \neg (P_1 < P_0)$. Для всякого НЧ m существует $\emptyset^{(m+1)}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат $L_m(k,\ell)$ такой, что $\forall k \ell (c(k) \in \Pi^{\emptyset^{(m)}} \;\&$ $\& \; c(\ell) \in \Pi^{\emptyset^{(m)}} \supset (L_m(k,\ell) \equiv c(k) < c(\ell)))$.

Можно построить нормальные алгорифмы над Ц, осуществляющие для любого НЧ m операции абсолютной величины, сложения, вычитания, умножения и деления на $\wedge S (S \in D \vee S \in \Pi^{\emptyset^{(m)}})$. Эти алгорифмы мы будем обозначать, как это привычно, соответственно посредством $|\;|$, $+$, $-$, $\cdot$ и $/$.

Пусть m НЧ. Нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над Ц мы назовем

а) A-функцией, если верно $\forall x y\, (!\mathcal{F}(x)\ \&\ (\mathcal{F}(x) \in$ $\in D \vee \exists m\, (\mathcal{F}(x) \in \Pi^{\emptyset^{(n)}}))\ \&\ (y = x \supset \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x))\ \&$ $\&\ (x \leq 0 \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(0))\ \&\ (1 \leq x \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(1)))$,

б) $A^{\emptyset^{(n)}}$-функцией, если $\mathcal{F}$ A-функция и выполнено $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \in \Pi^{\emptyset^{(n)}})$.

Ясно, что всякая функция является A-функцией.

A-функцию $\mathcal{F}$ мы назовем

а) $\emptyset^{(n)}$-непрерывной в КДЧ x, если существует НЧ p такое, что $\varphi_p^{\emptyset^{(n)}}$ является регулятором непрерывности $\mathcal{F}$ в x, т.е. выполнено $\forall k y\, (!\varphi_p^{\emptyset^{(n)}}(k)\ \&$ $\&\ (|y - x| < 2^{-\varphi_p^{\emptyset^{(n)}}(k)} \supset |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| < 2^{-k}))$,

б) (всюду) $\emptyset^{(n)}$-непрерывной, если существует $\emptyset$-ОРФ f такая, что для всякого КДЧ x — $\varphi_{f(\varkappa(x))}^{\emptyset^{(n)}}$ регулятор непрерывности $\mathcal{F}$ в x,

в) строго $\emptyset^{(n)}$-непрерывной, если для всякого НЧ k существует $\emptyset^{(n)}$-последовательность рациональных интервалов (т.е. элементов множества $\mathfrak{I}$) $\{H_\ell^k\}_\ell^{\emptyset^{(n)}, \lambda_k}$ такая, что $\forall x \neg\neg \exists \ell\, (x \in H_\ell^k)\ \&$ $\forall \ell x y\, (x \in H_\ell^k\ \&\ y \in H_\ell^k \supset |\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)| < 2^{-k})$,

г) $\emptyset^{(n)}$-равномерно непрерывной, если существует $\emptyset^{(n)}$-ОРФ g такая, что $\forall k x y\, (|x - y| < 2^{-g(k)} \supset |\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)| < 2^{-k})$.

Следует заметить, что $\emptyset$-непрерывность A-функций совпадает с их строгой $\emptyset$-непрерывностью.

Мы скажем, что последовательность A-функций $\{\mathcal{F}_\ell\}_\ell$ $\emptyset^{(n)}$-равномерно сходится к A-функции $\mathcal{F}$, если существует $\emptyset^{(n)}$-ОРФ f такая, что

$\forall k \ell x (f(k) \leq \ell \supset |\mathcal{F}_\ell(x) - \mathcal{F}(x)| < 2^{-k})$.

Определения. 1) Мы обозначим $\alpha \rightleftharpoons 0 \square 0$.

2) Слово P мы назовем полигональным остовом, если существуют НЧ m, возрастающая система РЧ $\{a_i\}_{i=0}^{m}$ и система РЧ $\{b_i\}_{i=0}^{m}$ такие, что $a_0 = 0 \& a_m = 1$ и

(1) $$P \rightleftharpoons a_0 \alpha a_1 \dots \alpha a_m \alpha b_0 \alpha b_1 \dots \alpha b_m .$$

Посредством $\mathcal{R}$ мы обозначим нормальный алгорифм над Ц такой, что для всякого полигонального остова P, где (1), и любого КДЧ x выполнено

$$\mathcal{R}(Px) \rightleftharpoons b_0 + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i - b_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \cdot (max(min(x, a_i), a_{i-1}) - a_{i-1}).$$

Мы заметим, что для любого полигонального остова P нормальный алгорифм $\mathcal{R}_P$ является полигональной и, следовательно, $\emptyset$-равномерно непрерывной функцией.

Определения. Пусть $\mathcal{F}$ А-функция, а n НЧ. Мы скажем, что

1) $\mathcal{F}$ принадлежит 0-му классу Бэра, если существует $\emptyset$-равномерно непрерывная функция $\mathcal{G}$ такая, что $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, т.е. верно $\forall x (\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(x))$;

2) $\mathcal{F}$ принадлежит $(n+1)$-му классу Бэра, если существует последовательность А-функций, принадлежащих n-му классу Бэра, $\{\mathcal{F}_m\}_m$, которая псевдосходится к $\mathcal{F}$, т.е. выполнено $\forall x k \neg\neg \exists \ell \forall m (\ell \leq m \supset |\mathcal{F}_m(x) - \mathcal{F}(x)| < 2^{-k})$;

3) $\mathcal{F}$ обладает свойством $\mathcal{B}_n$, если существует $\emptyset^{(n)}$-последовательность полигональных остовов $\{F_m\}_m^{\emptyset^{(n)}, \lambda_0}$ такая, что для всякого КДЧ x $\emptyset^{(n)}$-последовательность КДЧ $\{\mathcal{R}(F_m x)\}_m^{\emptyset^{(n)}, \sigma_x(x)}$ псевдосходится к $\mathcal{F}(x)$.

Замечание 1. Согласно [2] и [3] для всяких НЧ n и $\emptyset^{(n+1)}$-ЧРФ f существует $\emptyset^{(n)}$-ОРФ двух переменных g такая, что $\forall pq(f(p) \simeq q \equiv \neg\neg \exists k \forall l (k \leq l \supset g(p, l) = q))$.

Замечание 2. 1) Ясно, что A-функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $\mathcal{B}_0$ в том и только том случае, если она принадлежит 1-му классу Бэра.

2) Для любой псевдофундаментальной последовательности функций $\{\mathcal{F}_m\}_m$ существует $A^{\emptyset}$-функция $\mathcal{G}$ такая, что $\forall x m (|\underbrace{\mathcal{G}(x)}(m) - \mathcal{F}_m(x)| < 2^{-m})$.

3) Ввиду 2) и того, что для любых НЧ n и псевдофундаментальной последовательности $\emptyset^{(n)}$-ПЧ существует $\emptyset^{(n+1)}$-ПЧ, которое является ее псевдопределом, мы имеем: если n НЧ и $\mathcal{F}$ A-функция, принадлежащая $(n+1)$-му классу Бэра, то существует $A^{\emptyset^{(n)}}$-функция $\mathcal{G}$ такая, что $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

4) Если n НЧ, а $\{F_k\}_k^{\emptyset^{(n+1)}, \lambda_0}$ $\emptyset^{(n+1)}$-последовательность полигональных остовов, то а) согласно замечанию 1 и s-m-n теореме существует $\emptyset$-ОРФ ψ такая, что для всякого НЧ k $\{G_{k,l}\}_l^{\emptyset^{(n)}, \psi(k)}$ $\emptyset^{(n)}$-последовательность полигональних остовов и выполнено $\neg\neg \exists m \forall l (m \leq l \supset \supset (G_{k,l} \asymp F_k))$, и, следовательно,

б) существует последовательность $A^{\emptyset^{(n)}}$-функций, обладающих свойством $\mathcal{B}_n$, $\{G_k\}_k$ такая, что $\forall k x (\mathcal{G}_k(x) = \mathcal{R}(F_k x))$.

На основании замечания 2 легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть n НЧ, а $\mathcal{F}$ A-функция, обладающая свойством $\mathcal{B}_n$. Тогда $\mathcal{F}$ принадлежит $(n+1)$-му классу

Вэра.

<u>Определения</u>. Пусть n НЧ, а $\mathcal{L}$ и $\mathfrak{M}$ словарные множества.

1) Мы обозначим $\mathcal{L} = \mathfrak{M}$, если $\forall S (S \in \mathcal{L} \equiv S \in \mathfrak{M})$.

2) $\mathcal{L}$ мы назовем множеством КДЧ, если $\mathcal{L} \subseteq D$, т.е. $\forall S (S \in \mathcal{L} \supset S \in D)$.

3) Для множеств КДЧ понятия - быть множеством типа $G^{\emptyset(n)}$ (соотв. $G_{\sigma}^{\emptyset(n)}$) определены в замечании 1 из [8].

<u>Замечание 3</u>. Если $\{F_m\}_m^{\emptyset,\lambda_0}$ $\emptyset$-последовательность полигональных остовов, а a РЧ, то $\wedge S (S \in D \,\&\, \forall n \neg\neg \exists m (n \leq m \,\&\, \mathcal{R}(F_m S) > a - 2^{-n}))$ является множеством типа $G_{\sigma}^{\emptyset}$.

Классическая теория функций Бэра приведена, например, в [1].

<u>Теорема 1</u>. Пусть n НЧ, а $\mathcal{F}$ A-функция. Тогда

1) $\mathcal{F}$ принадлежит $(n+1)$-му классу Бэра (соотв. $\mathcal{F}$ обладает свойством $\mathcal{B}_n$) в том и только том случае, если для любого РЧ a множества КДЧ $\wedge S (S \in D \,\&\, \mathcal{F}(S) \geq a)$ и $\wedge S (S \in D \,\&\, \mathcal{F}(S) \leq a)$ являются множествами типа $G_{\sigma}^{\emptyset(n)}$;

2) $\mathcal{F}$ обладает свойством $\mathcal{B}_{n+1}$ в том и только том случае, если существует $A^{\emptyset(n+1)}$-функция $\mathcal{G}$ такая, что $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Ввиду замечания 1 легко доказать следующие утверждения.

<u>Лемма 2</u>. Пусть n НЧ, $\mathcal{F}$ A-функция, а $\{\mathcal{F}_m\}_m$ последовательность A-функций, обладающих свойством $\mathcal{B}_n$, которая $\emptyset^{(n+1)}$-равномерно сходится к $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $\mathcal{B}_n$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть n НЧ, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ A-функции, обладающие свойством $\mathcal{B}_n$, P $\emptyset^{(n)}$-ПЧ, а $\mathcal{H}$ A-функция та-

кая, что $\forall x\,(\mathcal{H}(x) = P)$. Тогда A-функции $|\mathcal{F}|$, $(\mathcal{F}+\mathcal{G})$, $(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G})$ и $\mathcal{H}$ обладают свойством $\mathcal{B}_m$. Если $\neg\exists x\,(\mathcal{G}(x) = 0)$, то A-функция $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ обладает свойством $\mathcal{B}_m$.

Следствие. Пусть m НЧ, а $\mathcal{F}$ A-функция. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $\mathcal{B}_m$ в том и только том случае, если A-функция $\mathcal{F}/(1+|\mathcal{F}|)$ обладает свойством $\mathcal{B}_m$.

Ввиду лемм 2 и 3, следствия леммы 3 и свойств всюду определенной КФДП $\frac{x}{1+|x|}$ верно следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть m НЧ, а $\mathcal{F}$ A-функция. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $\mathcal{B}_m$ в том и только том случае, если для всякого НЧ p A-функция $max\,(min\,(\mathcal{F}, p), -p)$ обладает свойством $\mathcal{B}_m$.

Обозначения. 1) Посредством $\mathfrak{A}^<$ мы обозначим нормальный алгорифм над Ц такой, что $\forall xy\,(!\mathfrak{A}^<(x \square y) \equiv x < y)$.

2) Для всяких НЧ k и ℓ мы определим

$$Comp\,(k,\ell) \rightleftharpoons (c(\ell) \in \mathfrak{I}\,\&\,\neg\neg(\neg(c(k) \in D) \vee$$

$$!\mathfrak{A}^<(\exists_m(c(\ell)) \square c(k)) \vee !\mathfrak{A}^<(c(k) \square \exists_\ell(c(\ell)))))$$

и $\mathcal{L}_k \rightleftharpoons \wedge S\,(S \in D\,\&\,\neg\neg\exists m\,(Comp\,(k,m)\,\&\,S \in c(m)))$.

Тогда согласно замечанию 2 из [8] $Comp\,(k,\ell)$ $\emptyset^{(1)}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат и для любого НЧ k $\mathcal{L}_k$ множество КДЧ типа $G^{\emptyset^{(1)}}$ такое, что $(c(k) \in D \supset \forall x\,(x \in \mathcal{L}_k \equiv \neg(x = c(k)))) \,\&\, (\neg(c(k) \in D) \supset \mathcal{L}_k = D)$.

Замечание 4. Пусть m НЧ, а $B\,(k,\ell)$ $\emptyset^{(m)}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат. Тогда ввиду замечания 2 из [8] числовое множество $\{p \mid \neg\neg(\neg(c(p) \in D) \vee$

$$\neg\forall k\neg\neg\exists\ell\,(B(k,\ell)\,\&\,c(\ell) \in \mathfrak{I}\,\&\,!\mathfrak{A}^<(\exists_\ell(c(\ell)) \square c(p))\,\&$$

$$!\mathfrak{A}^<(c(p) \square \exists_m(c(\ell)))))\}$$

является $\emptyset^{(m+1)}$-рекурсивно перечислимым.

Пусть τ^2 примитивно рекурсивная функция двух переменных, осуществляющая взаимно однозначное отображение $N \times N$ на N, и π_1^3, π_2^3 и π_3^3 примитивно рекурсивные функции такие, что $\forall k (\tau^2(\tau^2(\pi_1^3(k), \pi_2^3(k)), \pi_3^3(k)) = k)$.

Мы определим $T_2^{\emptyset^{(n)}}(k, p, q, m) \rightleftharpoons T_1^{\emptyset^{(n)}}(k, \tau^2(p, q), m)$ (см. [8]).

Теорема 2. 1) Пусть m НЧ, а $\mathcal{H}$ неинфинитное (т.е. конечное в классическом смысле) $\emptyset^{(n)}$-рекурсивно перечислимое числовое множество. Тогда

$$\wedge S (S \in D \,\&\, \neg\neg \exists k (k \in \mathcal{H} \,\&\, \forall p \neg\neg \exists q (\neg\neg \exists m\, T_2^{\emptyset^{(n)}}(k, p, q, m) \,\&\, c(q) \in \mathfrak{I} \,\&\, S \in c(q))))$$

является множеством КДЧ типа $G_\sigma^{\emptyset^{(n)}}$.

2) Пусть m НЧ, а $\mathcal{H}$ $\emptyset^{(n+1)}$-рекурсивно перечислимое числовое множество. Тогда

(2) $$\wedge S (S \in D \,\&\, \forall k (k \in \mathcal{H} \supset \forall p \neg\neg \exists q (\neg\neg \exists m\, T_2^{\emptyset^{(n)}}(k, p, q, m) \,\&\, c(q) \in \mathfrak{I} \,\&\, S \in c(q))))$$

является множеством КДЧ типа $G_\sigma^{\emptyset^{(n)}}$.

Итак, "объединение неинфинитного $\emptyset^{(n)}$-р.п. (соотв. пересечение $\emptyset^{(n+1)}$-р.п.) множества множеств КДЧ типа $G_\sigma^{\emptyset^{(n)}}$" является множеством КДЧ типа $G_\sigma^{\emptyset^{(n)}}$.

Доказательство. Мы ограничимся доказательством части 2). Согласно нашим предположениям и замечанию 1 существуют $\emptyset^{(n+1)}$-ЧРФ f и $\emptyset^{(n)}$-ОРФ двух переменных g такие, что

$$\forall q (q \in \mathcal{H} \equiv \neg\neg \exists p (f(p) \simeq q)) \,\&\, \forall p q (f(p) \simeq q \equiv \neg\neg \exists k \forall l (k \leq l \supset g(p, l) = q)).$$

Мы для всяких НЧ k и l определим

$B(k, l) \rightleftharpoons (c(l) \in$

$\in \mathfrak{I} \,\&\, \neg\neg (\exists m\, T_2^{\emptyset^{(n)}}(g(\pi_1^3(k), \pi_2^3(k)), \pi_3^3(k), l, m) \vee$

$\vee \exists q(\pi_2^3(k) < q \,\&\, \neg(g(\pi_1^3(k), \pi_2^3(k)) = g(\pi_1^3(k), q)))))$.

Тогда $B(k, \ell)$ является $\emptyset^{(n)}$-р.п. числовым предикатом и множество (2) равно множеству

$\wedge S(S \in D \,\&\, \forall k \neg\neg \exists \ell (B(k,\ell) \,\&\, S \in c(\ell)))$.

Следствие. Пусть n НЧ и $\mathcal{L}$ множество КДЧ типа $G^{\emptyset^{(n+1)}}$. Тогда $D \setminus \mathcal{L}$ множество КДЧ типа $G_\sigma^{\emptyset^{(n)}}$.

Лемма 5. Пусть n НЧ, а $\mathfrak{M}$ $\emptyset^{(n)}$-рекурсивно перечислимое числовое множество. Мы определим

$\mathcal{L}_1 \rightleftharpoons \wedge S(S \in D \,\&\, \forall k (c(k) \in D \,\&\, c(k) = S \supset k \in \mathfrak{M}))$,

$\mathcal{L}_2 \rightleftharpoons \wedge S(S \in D \,\&\, \forall k (c(k) \in D \,\&\, c(k) = S \supset \neg(k \in \mathfrak{M})))$.

Тогда $\mathcal{L}_1$ множество типа $G_\sigma^{\emptyset^{(\max(n,1))}}$, а $\mathcal{L}_2$ множество типа $G_\sigma^{\emptyset^{(\max(n-1,1))}}$.

Доказательство. Мы заметим, что $\mathcal{L}_1 = \bigcap_{\neg(k \in \mathfrak{M})} \mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_2 = \bigcap_{k \in \mathfrak{M}} \mathcal{L}_k$, и применим теорему 2.

На основании этой леммы, замечания 4 и свойств предиката $L_n(k, \ell)$ мы получаем следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть n НЧ, а $\mathcal{L}$ множество КДЧ типа $G_\sigma^{\emptyset^{(n)}}$. Тогда $D \setminus \mathcal{L}$ множество КДЧ типа $G_\sigma^{\emptyset^{(n+1)}}$.

Следствие 2. Пусть n НЧ, $\mathcal{F}$ $A^{\emptyset^{(n)}}$-функция, а a РЧ. Тогда существует $\emptyset^{(n+1)}$-рекурсивно перечислимое числовое множество $\mathfrak{M}$ такое, что $\forall p(c(p) \in D \supset (p \in \mathfrak{M} \equiv \mathcal{F}(c(p)) > a))$, и, следовательно, $\wedge S(S \in D \,\&\, \mathcal{F}(S) \leq a)$ множество КДЧ типа $G_\sigma^{\emptyset^{(\max(n,1))}}$

Лемма 6. Пусть n НЧ, а $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ дизъюнктные множества КДЧ типа $G_\sigma^{\emptyset^{(n)}}$. Тогда существуют $\emptyset^{(n)}$-последовательность полигональных остовов $\{F_s\}_s^{\emptyset^{(n)}, \lambda_0}$ и $A^{\emptyset^{(n)}}$-функция $\mathcal{F}$ такие, что

$\forall x(\neg\neg(\mathcal{F}(x)=0\vee\mathcal{F}(x)=1)\&\neg\neg\exists p\forall q(p\leq q\supset \mathcal{R}(F_q x)=$
$\mathcal{F}(x))\&\forall i(0\leq i\leq 1\&0\leq x\leq 1\&x\in\mathfrak{M}_i\supset\mathcal{F}(x)=i))$.

Обозначения. а) Для всяких НЧ m и i, $0\leq i\leq 2^m$, мы посредством c_i^m обозначим РЧ $\frac{i}{2^m}$.

б) Для полигональных остовов F и $\overline{F}$, систем НЧ $\{\nu_j\}_{j=1}^{\tau}$ и $\{\overline{\nu}_j\}_{j=1}^{\overline{\tau}}$ и слова $k\,\square\, a\,\nabla\, b$, где

$F\rightleftharpoons c_0^m\propto c_1^m\ldots\propto c_{2m}^m\propto d_0\propto d_1\ldots\propto d_{2m}$,

$\overline{F}\rightleftharpoons c_0^{\overline{m}}\propto c_1^{\overline{m}}\ldots\propto c_{2\overline{m}}^{\overline{m}}\propto \overline{d}_0\propto \overline{d}_1\ldots\propto \overline{d}_{2\overline{m}}$,

$\tau=2^m$, $\overline{\tau}=2^{\overline{m}}$, $\{\nu_j\}_{j=1}^{\tau}$, $\{\overline{\nu}_j\}_{j=1}^{\overline{\tau}}$, $\{d_i\}_{i=1}^{2^m}$ и $\{\overline{d}_i\}_{i=1}^{2^{\overline{m}}}$ системы нулей и единиц, k НЧ и $a\nabla b\in\mathfrak{I}$, мы будем писать

α) $R_1(F,\{\nu_j\}_{j=1}^{\tau},\ \overline{F},\{\overline{\nu}_j\}_{j=1}^{\overline{\tau}})$,

если выполнено $\overline{m}=m+1\&\forall i((0\leq i\leq 2^m\supset$
$\supset(\overline{d}_{2i}\rightleftharpoons d_i))\&(1\leq i\leq 2^m\supset(\overline{d}_{2i-1}\rightleftharpoons\overline{\nu}_{2i-1}\rightleftharpoons\overline{\nu}_{2i}\rightleftharpoons\nu_i)))$,

β) $R_2(F,\{\nu_j\}_{j=1}^{\tau},k\,\square\,a\nabla b,\ \overline{F},\{\overline{\nu}_j\}_{j=1}^{\overline{\tau}})$,

если $\overline{m}=m\ \&\ (k=0\vee k=1)$ и существуют целые числа $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ такие, что $\frac{2\varkappa_0}{2^m}=a\ \&\ \frac{2\varkappa_1}{2^m}=b\ \&$
$\&\forall i((0\leq i\leq 2^{\overline{m}}\supset(2\varkappa_0<i<2\varkappa_1\supset(\overline{d}_i\rightleftharpoons k))\ \&$
$\&(\neg(2\varkappa_0<i<2\varkappa_1)\supset(\overline{d}_i\rightleftharpoons d_i)))\&(1\leq i\leq 2^{\overline{m}}\supset$
$(2\varkappa_0<i\leq 2\varkappa_1\supset(\overline{\nu}_i\rightleftharpoons k))\&(\neg(2\varkappa_0<i\leq 2\varkappa_1)\supset(\overline{\nu}_i\rightleftharpoons\nu_i))))$.

Доказательство леммы 6. Существует $\phi^{(n)}$-последовательность слов $\{k_t\,\square\,a_t\nabla b_t\}_t^{\phi^{(n)},\sigma_0}$ такая, что

а) для всякого НЧ t — k_t НЧ, $k_{2t}=0\ \&\ k_{2t+1}=1\ \&\ a_t\nabla b_t\in\mathfrak{I}$ и существуют целые числа $\varkappa_0^t$ и $\varkappa_1^t$ такие, что $\frac{\varkappa_0^t}{2^{t+1}}=a_t\ \&\ \frac{\varkappa_1^t}{2^{t+1}}=b_t$, и

б) выполнено $\forall i x\,(0 \leq i \leq 1 \,\&\, 0 \leq x \leq 1 \supset$
$\supset (x \in \mathfrak{M}_i \equiv \forall p \neg\neg \exists q\,(p < q \,\&\, x \in a_{2q+i} \triangledown b_{2q+i})))$.

Мы построим $\emptyset^{(n)}$-последовательность полигональных остовов $\{F_s\}_s^{\emptyset^{(n)}, \lambda_0}$ и $\emptyset^{(n)}$-последовательность систем нулей и единиц $\{\{v_j^s\}_{j=1}^{2^{s+1}}\}_s^{\emptyset^{(n)}, \lambda_1}$ такие, что
$(F_0 \rightleftharpoons c_0^1 \propto c_1^1 \propto c_2^1 \propto 0 \propto 0 \propto 0) \,\&\, v_1^0 = v_2^0 = 0$
и для всякого НЧ s не могут не существовать полигональный остов $\overline{F}_s$ и система нулей и единиц $\{\overline{v}_j^s\}_{j=1}^{2^{s+2}}$, для которых выполнено $R_1(F_s, \{v_j^s\}_{j=1}^{2^{s+1}}, \overline{F}_s, \{\overline{v}_j^s\}_{j=1}^{2^{s+2}}) \,\&$
$R_2(\overline{F}_s, \{\overline{v}_j^s\}_{j=1}^{2^{s+2}}, k_s \square a_s \triangledown b_s, F_{s+1}, \{v_j^{s+1}\}_{j=1}^{2^{s+2}})$.

Ввиду наших предположений верно $\forall x \neg\neg \exists j\, t\,(0 \leq j \leq 1 \,\&$
$\&\, \forall s\,(t \leq s \supset \mathcal{R}(F_s x) = j) \,\&\, \forall i\,(0 \leq i \leq 1 \,\&\, 0 \leq x \leq 1 \,\&\, x \in \mathfrak{M}_i \supset j = i))$
и легко построить $A^{\emptyset^{(n)}}$-функцию $\mathcal{F}$ такую, что
$\forall x \neg\neg \exists p \forall q\,(p \leq q \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{R}(F_q x))$.

Доказательство теоремы 1. Ввиду замечаний 2 и 3, леммы 1 и следствия 2 леммы 5 нам достаточно ограничиться следующим. Пусть n НЧ, $\mathcal{F}$ A-функция и пусть для всякого РЧ a множества $\wedge S\,(S \in D \,\&\, \mathcal{F}(S) \geq a)$ и $\wedge S\,(S \in D \,\&\, \mathcal{F}(S) \leq a)$ являются множествами типа $G_\sigma^{\emptyset^{(n)}}$.

Пусть p и m НЧ. Согласно лемме 6 для всякого целого числа j, $-p \cdot 2^m \leq j < p \cdot 2^m$, существует A-функция $\mathcal{G}_{p,m,j}$ обладающая свойством $\mathcal{B}_m$ и такая, что
$\forall x\,(\neg\neg(\mathcal{G}_{p,m,j}(x) = 0 \vee \mathcal{G}_{p,m,j}(x) = 1) \,\&\, (\mathcal{F}(x) \leq \frac{j}{2^m} \supset \mathcal{G}_{p,m,j}(x) = 0) \,\&\, (\frac{j+1}{2^m} \leq \mathcal{F}(x) \supset \mathcal{G}_{p,m,j}(x) = 1))$.

Мы построим A-функцию $\mathcal{G}_{p,m}$ такую, что

$$\mathcal{G}_{p,m} = \Big(\sum_{j=-p\cdot 2^m}^{p\cdot 2^m - 1} \frac{1}{2^m} \cdot \mathcal{G}_{p,m,j}\Big) - p .$$

Тогда верно $|\mathcal{G}_{p,m} - max(min(\mathcal{F}, p), -p)| < 2^{-m}$ и согласно лемме 3 $\mathcal{G}_{p,m}$ обладает свойством $\mathcal{B}_m$.

Ввиду сказанного и лемм 2 и 4 доказательство закончено.

Теорема 3. Для всякого $\{F_n\}_n \in S$ (см. [4]) существует A-функция $\mathcal{F}$, принадлежащая 2-му классу Бэра, такая, что для почти всех КДЧ x выполнено $\exists y (y = \mathcal{F}(x) \,\&\, P(y, \{F_n\}_n, x))$ (см. [5]).

Пример 1. Можно построить $\{F_n\}_n \in L_1$ (см. [4]), для которого не существует A-функция $\mathcal{F}$, принадлежащая 1-му классу Бэра и обладающая тем свойством, что для почти всех КДЧ x верно $\exists y (y = \mathcal{F}(x) \,\&\, P(y, \{F_n\}_n, x))$.

Замечание 5. Согласно доказательству теоремы 5 из [8] для всякого нормального алгоритма $\mathcal{L}$ над Ц существует множество КДЧ $\mathcal{L}$ типа $G^{\emptyset}_{\sigma}$ такое, что $\forall x ((\forall y (y = x \supset\, !\mathcal{L}(y)) \supset x \in \mathcal{L}) \,\&\, (x \in \mathcal{L} \supset \neg\neg \exists y (y = x \,\&\, !\mathcal{L}(y))))$.

Ввиду замечаний 2 и 5 и теорем 1 и 2 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 4. A-функция $\mathcal{F}$ принадлежит 1-му классу Бэра в том и только том случае, если существует $A^{\emptyset}$-функция $\mathcal{G}$ такая, что $\mathcal{F} = \mathcal{G} \,\&\, \forall x m \neg\neg \exists k \forall l y (k \le l \,\&\, y = x \supset |\underbrace{\mathcal{G}(x)}(l) - \underbrace{\mathcal{G}(y)}(l)| < 2^{-m})$.

На основании замечания 2 и теоремы 4 мы сразу получаем следующие утверждения. Понятия, связанные с псевдодифференцируемостью, введены в [6] и [7].

Следствие 1. Пусть $\mathcal{F}$ A-функция, а $\{\mathcal{F}_m\}_m$ последовательность функций, которая псевдосходится к $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{F}$ принадлежит 1-му классу Бэра.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{F}$ функция, которая является конечно псевдодифференцируемой в каждом КДЧ из $0 \triangledown 1$. Тогда существует $A^{\emptyset}$ -функция $\mathcal{G}$, принадлежащая 1-му классу Бэра, такая, что $\forall x (x \in 0 \triangledown 1 \supset D_{кл}(\mathcal{G}(x), \mathcal{F}, x))$.

Пример 2. Существуют функция $\mathcal{F}$, удовлетворяющая условию Липшица, и $A^{\emptyset}$ -функция $\mathcal{G}$, принадлежащая 1-му классу Бэра, такие, что $\forall x\, D_{кл}(\mathcal{G}(x), \mathcal{F}, x)$ и $\mathcal{G}$ не является псевдонепрерывной ни в одном КДЧ из $0 \triangledown 1$.

Лемма 7. Пусть $\mathcal{G}$ A -функция, принадлежащая 1-му классу Бэра. Тогда существует $\emptyset^{(1)}$-ОРФ двух переменных f такая, что $\forall k \ell (c(\ell) \in \mathcal{J} \supset c(f(k,\ell)) \in \mathcal{J}\ \&$
$\&\ c(f(k,\ell)) \subseteq c(\ell)\ \&\ \forall x y (x \in c(f(k,\ell))\ \&$
$\&\ y \in c(f(k,\ell)) \supset |\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(y)| < 2^{-k}))$.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{F}$ $A^{\emptyset}$ -функция. Если выполнено хотя бы одно из выписанных ниже условий, то $\mathcal{F}$ принадлежит 1-му классу Бэра.

а) $\mathcal{F}$ $\emptyset^{(1)}$ -равномерно непрерывна,

б) $\mathcal{F}$ строго $\emptyset^{(1)}$-непрерывна.

в) $\mathcal{F}$ псевдонепрерывна и является неубывающей.

г) $\mathcal{F}$ является выпуклой на $0 \triangledown 1$.

д) Существует $\emptyset^{(1)}$ -последовательность КДЧ $\{P_m\}_m^{\emptyset^{(1)},\lambda_0}$ такая, что для всякого КДЧ x , $\neg \exists m\ (x = P_m)$, $\mathcal{F}$ $\emptyset'$ -непрерывна в точке x .

Пример 3. Существуют $A^{\emptyset}$ -функции $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$, которые не принадлежат 1-му классу Бэра, причем $\mathcal{F}_1$ является $\emptyset^{(2)}$-равномерно непрерывной, $\mathcal{F}_2$ всюду $\emptyset^{(1)}$ -непрерывна и $\mathcal{F}_3$ является неубывающей.

Пример 4. Существуют КФДП $\mathcal{F}$, $\forall x (!\mathcal{F}(x) \supset 0 < x < 1)$, и $A^{\emptyset}$ -функция $\mathcal{G}$, которая не принадлежит 1-му классу Бэра, такие, что

$\forall x(\neg\neg(\mathcal{G}(x)=0 \vee \mathcal{G}(x)=1) \& (\mathcal{G}(x)=1 \equiv\ !\mathcal{F}(x))) \ \&$
$\forall x \exists q \forall y (|y-x| < 2^{-q} \supset \mathcal{G}(y) \leq \mathcal{G}(x))$
и, следовательно, $\mathcal{G}$ "полунепрерывна сверху".

<u>Теорема 6</u>. Можно построить последовательность $A^{\emptyset}$ -функций, принадлежащих 1-му классу Вэра, $\{\mathcal{G}_n\}_n$ такую, что для любой КФДП $\mathcal{F}$ существует НЧ n , для которого выполнено
$\forall x(0 \leq x \leq 1 \ \& \ !\mathcal{F}(x) \supset \mathcal{G}_n(x) = \mathcal{F}(x))$.

Литература

[1] НАТАНСОН И.П.: Теория функций вещественной переменной, Москва 1957.

[2] GOLD E.M.: Limiting recursion, J. Symbolic Logic 30 (1965), 28-48.

[3] PUTNAM H.: Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski, J.Symb.Logic 30(1965), 49 - 57.

[4] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[5] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 667-691.

[6] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[7] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975),583-599.

[8] ДЕМУТ О.: Об областях определения эффективных операторов над общерекурсивными функциями и конструктивных функций действительной переменной, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 633-646.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova Universita
Malostranské nám. 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 11.2. 1977)