COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,2 (1977)

ЗАМЕЧАНИЯ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ УПЛОТНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

А.С. ПОТАПОВ, Т.Я. ПОТАПОВА, В.А. ФИЛИН, Воронеж

Резюме: Вычислен индекс уплотняющего сжатия и растяжения конуса и установлены теоремы существования ненулевых неподвижных точек некоторых положительных уплотняющих операторов. Доказана также одна лемма о переопределении положительных уплотняющих операторов.

Ключевые слова: Положительные уплотняющие операторы, неподвижные точки.

AMS: 47H10, 47H15 Ref. Ž.: 7.978.5

Известные теоремы М.А. Красносельского [1] о неподвижных точках операторов, сжимающих или растягивающих конус, обобщались многими авторами в различных направлениях. В работах [2] - [7] эти результаты переносятся на уплотняющие ([8]) (относительно различных мер некомпактности) операторы. Однако во всех указанных работах на конус или оператор накладываются дополнительные (по сравнению с вполне непрерывным случаем) требования, обусловленные методикой доказательства. В настоящей заметке показывается, что эти дополнительные требования можно опустить, а доказательства значительно упростить, если воспользоваться теорией вращения уплотняющих векторных полей. Основную роль при этом играют простые теоремы 1 и 2 (п. 2), по существу хорошо известные для вполне непрерывных, а частично и для уплотняющих операторов ([9] - [12],[14]). В п. 3 мы также показываем, что аналогичной методикой легко получаются обобщения некоторых теорем М.А. Красносельского о позитивных собственных значениях вполне непрерывных положительных операторов на случай уплотняющих операторов (по поводу таких теорем см. также [2],[13]). В последнем 4-м пункте мы доказываем одно утверждение, которое часто оказывается полезным при исследовании вопроса о неподвижных точках положительных уплотняющих операторов. Различные теоремы о переопределении уплотняющих операторов имеются также в работах [4],[7],[13].

1. Предварительные сведения. Пусть E - вещественное банахово пространство с конусом K. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех ограниченных подмножеств E, а через $(\mathcal{D}, \leq)$ - некоторое частично упорядоченное множество (знаком $\leq$ мы обозначаем как частичный порядок в $\mathcal{D}$, так и полуупорядоченность в E, порождаемую конусом K; это делается во избежание нагромождения обозначений, из текста ясно, о каком порядке идет речь). Мерой некомпактности в E называется функция Ψ : $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{D}$ такая, что $\Psi(\overline{co}\,\Omega) = \Psi(\Omega)$ для любого $\Omega \in \mathfrak{M}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать меры некомпактности, которые обладают некоторыми наборами из следующих свойств: мера некомпактности Ψ :

а^0. монотонна, т.е. из $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ следует, что $\Psi(\Omega_1) \leq \Psi(\Omega_2)$;

б^0. полуаддитивна, т.е. для любых $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{M}$ $\Psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = max\{\Psi(\Omega_1), \Psi(\Omega_2)\}$;

в°. инвариантна относительно сдвигов, т.е.

$$\forall(x \in E)\ \forall(\Omega \in \mathfrak{M})\ [\Psi(x+\Omega) = \Psi(\Omega)]\ ;$$

г°. полуоднородна, т.е.

$$\forall(\Omega \in \mathfrak{M},\ \alpha \in R^1)\ [\Psi(\alpha\Omega) = |\alpha|\,\Psi(\Omega)]\ ;$$

д°. алгебраически полуаддитивна, т.е.

$$\forall(\Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{M})\ [\Psi(\Omega_1+\Omega_2) \le \Psi(\Omega_1) + \Psi(\Omega_2)]\ ;$$

е°. отличает некомпактные множества, т.е. если Ω не относительно компактно, то $\Psi(\Omega) \neq \Psi(\{\theta\})$;

ж°. множество значений $\mathcal{D}$ меры некомпактности Ψ линейно упорядочено.

При формулировке того или иного свойства меры некомпактности, естественно, предполагается, что область ее значений $\mathcal{D}$ обладает необходимыми качествами (можно производить алгебраические операции, для любых двух элементов существует их верхняя грань и т.д.).

Заметим, что если мера некомпактности Ψ полуаддитивна, то она монотонна.

Пусть Λ - призвольное множество, M - некоторое подмножество E. Оператор $A : \Lambda \times M \longrightarrow E$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности Ψ (или Ψ - уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \in M$ множество $A(\Lambda \times \Omega)$ также содержится в $\mathfrak{M}$ и неравенство $\Psi[A(\Lambda \times \Omega)] \ge \Psi(\Omega)$ возможно лишь в случае, когда Ω относительно компактно (если область значений $\mathcal{D}$ меры некомпактности Ψ линейно упорядочена, то последнее условие означает, что $\Psi[A(\Lambda \times \Omega)] < \Psi(\Omega)$ для любого не относительно компактного множества $\Omega \subseteq M$). Оператор $A : \Lambda \times M \longrightarrow E$ называется (q, Ψ)-ограниченным, если для любого ограниченного подмножества $\Omega \subseteq M$ $A(\Lambda \times \Omega) \in \mathfrak{M}$ и $\Psi[A(\Lambda \times \Omega)] \leq q\,\Psi(\Omega)$.

Пусть T – замкнутое подмножество банахова пространства E. Обозначим через $\bar{U}$ и $\dot{U}$ соответственно замыкание и границу в индуцированной топологии пространства T открытого в T множества U. Пусть на $\bar{U}$ определен непрерывный уплотняющий относительно монотонной меры некомпактности Ψ оператор $A: \bar{U} \longrightarrow T$ не имеющий на $\dot{U}$ неподвижных точек. Оказывается, что в этой ситуации можно определить целочисленную характеристику $ind\,(A, \bar{U})$ (индекс уплотняющего оператора A на $\dot{U}$, или вращение векторного поля $I - A$), обладающую основными обычными свойствами вращения вполне непрерывных векторных полей:

1^o Если операторы A_1 и A_2 гомотопны на $\dot{U}$ относительно T, то

$$ind\,(A_1, \bar{U}) = ind\,(A_2, \bar{U}).$$

2^o Если $ind\,(A, \bar{U}) \neq 0$, то оператор A имеет в U хотя бы одну неподвижную точку.

3^o Пусть $Ax \equiv a$. Тогда $ind\,(A, \bar{U}) = 1$, если $a \in U$ и $ind\,(A, \bar{U}) = 0$, если $a \bar{\in} \bar{U}$.

4^o Пусть $\bar{U} = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, где U_i – открытые в T попарно непересекающиеся множества, на относительных границах которых нет неподвижных точек. Тогда
$$ind\,(A, \bar{U}) = \sum_{i=1}^{n} ind\,(A, \bar{U}_i).$$

2. Теоремы об индексах. В дальнейшем через $B(x_0, r)$ обозначается (открытый) шар радиуса r с центром в точке x_0, а через K_r и S_r – соответственно множество

$B(\theta, r) \cap K$ и (относительная) граница множества K_r в K (очевидно, $S_r = \{x : x \in K,\ \|x\| = r\}$).

<u>Теорема 1</u>. Пусть на $\overline{K}_r$ задан Ψ -уплотняющий непрерывный положительный оператор A , причем мера некомпактности Ψ обладает свойствами б^{0},в^{0},е^{0},ж^{0}.

Пусть существует ненулевой элемент $h_0 \in K$ такой, что

$$(*) \qquad x \neq Ax + \alpha h_0$$

при любых $\alpha \geq 0$, $x \in S_r$. Тогда $ind\,(A, \overline{K}_r) = 0$.

Доказательство. Заметим прежде, что в условиях теоремы можно считать, что $\|h_0\| > r + \sup\limits_{x \in S_r} \|Ax\|$. Далее, из свойств меры некомпактности Ψ вытекает, что операторы $A_1 x = Ax + h_0$ и $A_2 x \equiv h_0$ Ψ -уплотняют. Докажем, что оператор A гомотопен оператору A_2 на S_r относительно K . Рассмотрим оператор

$$G(\lambda, x) = \begin{cases} Ax + 2\lambda h_0, & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-\lambda)Ax + h_0, & \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Очевидно, G непрерывен, положителен и $G(0, \cdot) = A$, $G(1, \cdot) = A_2$. Кроме того, G Ψ -уплотняет (по совокупности переменных λ , x). Действительно, пусть $\Omega \in \mathfrak{M}$. Нетрудно видеть, что

$$G([0,1] \times \Omega) \subseteq co\,[A(\Omega) \cup (A(\Omega) + h_0)] \,\cup$$

$$\cup\, co\,[A(\Omega) + h_0,\ h_0]$$

Воспользовавшись свойствами полуаддитивности и инвариантности относительно сдвига меры некомпактности Ψ , а также линейной упорядоченности ее области значений, получим:

$$\Psi[G([0,1]\times\Omega] \le \Psi[A(\Omega)] < \Psi(\Omega) .$$

И, наконец, $G(\lambda, x) \neq x$ при $x \in S_r$ и $\lambda \in [0,1]$. В самом деле, равенство $x = Ax + 2\lambda h_0$ невозможно по условию, а $x \neq 2(1-\lambda)Ax + h_0$ в силу выбора h_0. Из свойств $1^\circ, 3^\circ$ индекса получаем требуемое.

<u>Теорема 2</u>. Пусть на K_r задан Ψ-уплотняющий (Ψ - мера некомпактности, обладающая свойствами б$^\circ$,в$^\circ$,е$^\circ$,ж$^\circ$) непрерывный положительный оператор A, причем

$$(**) \qquad Ax \neq \lambda x$$

при любых $x \in S_r$, $\lambda \ge 1$. Тогда $ind(A, \overline{K}_r) = 1$.

Доказательство очевидно: в условиях теоремы оператор A гомотопен на S_r относительно K оператору $A_3 x \equiv \theta$.

3. <u>Теоремы о неподвижных точках и собственных значениях</u>. Напомним, что неравенства

$$Ax \not\geq x , \qquad \|x\| = r , \quad x \in K$$

$$Ax \not\leq (1+\varepsilon)x , \qquad \|x\| = R , \quad \varepsilon > 0, \ x \in K$$

определяют оператор "сжатия" ($R > r$) или "растяжения" ($r > R$) конуса ([1]).

Из этих неравенств следует, что, во-первых, для любого $h_0 \in K$ ($h_0 \neq \theta$) выполнено условие ($*$) теоремы 1 на S_r и, во-вторых, на S_R выполнено условие ($**$) теоремы 2. Но тогда из свойств 4° и 2° индекса и теорем 1 и 2 очевидным образом вытекает следующая

<u>Теорема 3</u>. Пусть мера некомпактности Ψ обладает свойствами б$^\circ$,в$^\circ$,е$^\circ$,ж$^\circ$ и пусть непрерывный положительный Ψ-уплотняющий оператор A является "сжатием" или "растя-

жением" конуса K . Тогда A имеет по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Как и в случае вполне непрерывных операторов, индекс уплотняющих операторов обладает "устойчивостью" при малых возмущениях (см., например, [8]). В частности, если положительный оператор $A: K \longrightarrow K$ (q, Ψ)-ограничен, где $q < 1$ и мера некомпактности Ψ удовлетворяет условиям а$^{\circ}$,в$^{\circ}$,г$^{\circ}$, д$^{\circ}$, то линейные операторы $A'(\theta)$ и $A'(\infty)$ (производная Фреше в нуле по конусу и сильная асимптотическая производная по конусу, соответственно; (если они существуют) также (q, Ψ)-ограничены и при достаточно малых r

$$ind\,(A, \overline{K}_r) = ind\,(A'(\theta), \overline{K}_r)\ ,$$

а при достаточно больших R

$$ind\,(A, \overline{K}_R) = ind\,(A'(\infty), \overline{K}_R)\ .$$

Используя последнее соображение, нетрудно видеть, что из теорем 1 и 2 вытекает

<u>Теорема 4</u>. Пусть непрерывный положительный (q, Ψ)-ограниченный оператор A $(A\theta = \theta)$ $(q < 1$, Ψ удовлетворяет условиям б$^{\circ}$ - ж$^{\circ}$) имеет производную Фреше $A'(\theta)$ по конусу и сильную асимптотическую производную $A'(\infty)$ по конусу. Пусть выполняется одна из следующих пар условий:

1. Оператор $A'(\infty)$ не имеет позитивных собственных значений, превосходящих или равных 1.

2. Оператор $A'(\theta)$ имеет собственный вектор $h_0 \in K: A'(\theta)h_0 = \lambda_0 h_0$, где $\lambda_0 > 1$ и 1 не является его позитивным собственным значением.

Или

1'. Оператор $A'(\theta)$ не имеет позитивных собственных значений, превосходящих или равных 1.

2'. Оператор $A'(\infty)$ имеет собственный вектор $h_0 \in K : A'(\infty) h_0 = \lambda_0 h_0$, где $\lambda_0 > 1$ и 1 не является его позитивным собственным значением.

Тогда оператор A имеет в K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Замечание. Известно, что условие $ind\,(A, \overline{K}_r) = 0$ обеспечивает существование позитивного собственного значения $\lambda > 1$ у оператора A. Поэтому условия $Ax \not\geq x$, $x \in K$, $\|x\| = r$, теоремы 3 или условия 2 и 2' теоремы 4 можно рассматривать как достаточные условия существования собственных векторов в конусе у уплотняющего (относительно соответствующей меры некомпактности) оператора A.

4. <u>Лемма о переопределенном операторе</u>. Пусть $A : K \longrightarrow K$ непрерывный положительный (q, Ψ)-ограниченный оператор, где Ψ - вещественная полуаддитивная инвариантная относительно сдвига и полуоднородная мера некомпактности. Зададим оператор $\tilde{A}$ формулой

$$\tilde{A}x = \frac{\|x\|}{r} A\left(\frac{r}{\|x\|} x\right), \quad \tilde{A}\theta = \theta$$

где $r > 0$ - некоторое число.

Очевидно, $\tilde{A}$ - непрерывный, положительный оператор.

<u>Лемма</u>. Оператор $\tilde{A}$ является $(q + \varepsilon, \Psi)$-ограниченным оператором, где ε - произвольное положительное число.

Доказательство. Пусть $\Omega \subset K$ - некоторое ограниченное множество ($\|x\| \leq R$, если $x \in \Omega$). Нетрудно видеть, что $\tilde{A}\Omega$ также ограничено, поэтому, для доказательства леммы необходимо проверить, что

$\Psi[\tilde{A}\Omega] \le (q+\varepsilon)\Psi(\Omega)$. (Можно считать, что $\Psi[\tilde{A}\Omega] \neq 0$.)

Так как оператор $\tilde{A}$ непрерывен, то для любого $\eta > 0$ существует δ такое, что $\tilde{A}[B(\theta,\delta)] \subset B(\tilde{A}\theta, \eta)$. Представим множество Ω в виде объединения $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ где $\Omega_1 = \{x : x \in \Omega, \|x\| < \delta\}$, $\Omega_2 = \{x : x \in \Omega, \|x\| \ge \delta\}$. В силу свойств Ψ, $\Psi[\tilde{A}\Omega_1] \le \le \eta\Psi[B(\theta,1)]$. Возьмем η настолько маленьким, чтобы $\eta\cdot\Psi[B(\theta,1)]$ было меньше $\Psi[\tilde{A}\Omega]$ и по нему выберем соответствующее δ . Тогда

$$\Psi[\tilde{A}\Omega] = max\{\Psi[\tilde{A}\Omega_1], \Psi[\tilde{A}\Omega_2]\} = \Psi[\tilde{A}\Omega_2] .$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить, что

$$\Psi[\tilde{A}\Omega_2] \le (q+\varepsilon)\Psi[\Omega_2] .$$

Разобьем отрезок $[\delta, R]$ точками $\delta = r_1 < r_2 < r_3 < \ldots \ldots r_m = R$ таким образом, что $\frac{r_{i+1}}{r_i} \le \frac{q+\varepsilon}{q}$. Тогда $\Omega_2 = \bigcup_{i=1}^{m-1} \omega_i$, где

$\omega_i = \{x : x \in \Omega_2, r_i \le \|x\| \le r_{i+1}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Заметим теперь, что если множество Ω_2 представлено в виде объединения конечного числа множеств $\Omega_2 = \cup\omega_i$, то, в силу полуаддитивности Ψ для доказательства последнего неравенства достаточно установить, что для любого i

$$\Psi[A\omega_i] \le (q+\varepsilon)\Psi[\omega_i] .$$

Введем в рассмотрение следующие множества

$$\omega_i^1 = \frac{r}{r_i}\omega_i , \qquad \omega_i^2 = \frac{r}{r_{i+1}}\omega_i ,$$

$$\omega_i^3 = \{y : y = \frac{r}{\|x\|}x , \quad x \in \omega_i\} ,$$

а также множества

$$\omega_i^4 = \frac{r_i}{r}A\omega_i^3 , \qquad \omega_i^5 = \frac{r_{i+1}}{r}A\omega_i^3 ,$$

$$\omega_i^6 = \{x : x = \frac{\|x\|}{r} A\left(\frac{r}{\|x\|}x\right), \ x \in \omega_i\} .$$

Нетрудно видеть, что $\omega_i^3 \subseteq co\{\omega_i^1 \cup \omega_i^2\}$ и $\omega_i^6 \subseteq co\{\omega_i^4 \cup \omega_i^5\}$.

Теперь, воспользовавшись свойствами меры некомпактности Ψ и (q, Ψ)-ограниченностью A получаем

$$\Psi[\tilde{A}\omega_i] = \Psi[\omega_i^6] \le max\{\Psi[\omega_i^4], \Psi[\omega_i^5]\} =$$

$$= \Psi[\omega_i^5] = \frac{r_{i+1}}{r}\Psi[A\omega_i^3] \le \frac{r_{i+1}}{r} q \ \Psi[\omega_i^3] \le$$

$$\le \frac{r_{i+1}}{r} q \ max\{\Psi[\omega_i^1], \Psi[\omega_i^2]\} =$$

$$= \frac{r_{i+1}}{r} q \Psi[\omega_i^1] = \frac{r_{i+1}}{r} q \frac{r}{r_i} \Psi[\omega_i] =$$

$$= \frac{r_{i+1}}{r_i} q \Psi[\omega_i] \le (q+\varepsilon)\Psi[\omega_i] .$$

Лемма доказана.

Замечание. Если оператор A является Ψ-уплотняющим, то аналогичным приемом можно доказать, что переопределенный оператор $\tilde{A}$ также будет Ψ-уплотнять (Ψ - мера некомпактности со свойствами, перечисленными в начале п. 4).

Авторы искренне благодарны Б.Н. Садовскому за советы и полезное обсуждение этой статьи.

Примечание (2.2. 1977). Когда статья была уже в редакции, авторам стали известны (еще неопубликованные) результаты Й. Данеша, в которых, в частности, аналогичной методикой получаются обобщения теорем М.А. Красносельского о сжатии и растяжении конуса и содержатся некоторые утверждения этой статьи.

Литература

[1] М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ: Положительные решения операторных уравнений, М., Физматгиз, 1962.

[2] D.E. EDMUNDS, A.J.B. POTTER, C.A. STUART: Non-compact positive operators, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 328 (1972), 67-81.

[3] H. AMANN: Fixed points of asymptotically linear maps in ordered Banach spaces, J. Funct. Anal. 1973, 14, n 2, 162-171.

[4] A.J.B. POTTER: A fixed point theorem for positive K-set contractions, Proc. Edinburgh Math. Soc., 1974, 19, n 1, 93-102.

[5] А.А. КАЛМЫКОВ: Неподвижные точки уплотняющих операторов, растягивающих конус, Уч. зап. Пермского гос. унив. 309(1974), 29-32.

[6] И.В. МИСЮРКЕЕВ: О существовании неподвижных точек у сильно асимптотически линейных по конусу уплотняющих операторов, Уч. зап. Пермского гос. унив. 309(1974), 20-25.

[7] Г.В. ЛЯЛЬКИНА: О неподвижных точках положительных сильно асимптотически линейных по конусу уплотняющих операторов, Уч. зап. Пермского гос. унив. 291 (1975), 25-30.

[8] В.Н. САДОВСКИЙ: Предельно компактные и уплотняющие операторы, Успехи мат. наук 27(1972), 81-146.

[9] Ю.А. ИСАЕНКО: Индекс неподвижной точки линейных положительных операторов, Сб. трудов аспирантов Воронежск. унив., мат. фак., Воронеж, 1969, 54-58.

[10] Ю.В. ПОКОРНЫЙ: Об относительных индексах положителных операторов, Тр. мат. фак., Воронеж, ун-т, 4 (1971), 79-89.

[11] Ю.Г. БОРИСОВИЧ, Ю.И. САПРОНОВ: К топологической теории компактно сужаемых отображений, Тр. семинара

по функц. анал., Воронеж, 12(1969), 43-68.

[12] М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, П.П. ЗАБРЕЙКО: Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975.

[13] В.А. ФИЛИН: Разрешимость операторных уравнений с уплотняющими операторами, Докл. Акад. Наук Тадж. ССР, 17(1974), 12-15.

[14] E.D. NUSSBAUM: Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations II, J. Diff. Equations, 14(1973), 360-394.

Воронежский государственный
университет
г. Воронеж
С С С Р

(Oblatum 23.11. 1976)