Werk

Label: Article

Jahr: 1977

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?316342866_0018|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,1 (1977)

SUR LES GROUPES QUASI-PURS-PROJECTIFS SANS TORSION

Khalil BENABDALLAH et Robert BRADLEY, Montréal

Abstract: Un groupe abélien G est dit quasi-pur-projectif si pour tout sous-groupe pur H de G et pour tout homomorphisme $f: G \longrightarrow G/H$, il existe un endomorphisme φ de G tel que $\nu_H \cdot \varphi = f$ où ν_H désigne l'épimorphisme canonique de G sur G/H. Nous établissons qu'un groupe sans torsion complètement décomposable est quasi-pur-projectif si et seulement si il est soit homogène, soit somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe homogène de rang fini. Nous démontrons également qu'un groupe sans torsion non réduit est quasi-pur-projectif si et seulement si sa partie réduite (unique à isomorphisme près) est quasi-pure-projective de rang fini n'admettant pas $\mathbb{Q}$ comme image épimorphe.

Mots clés: Groupes abéliens sans torsion complètement décomposables, groupes homogènes, quasi-purs-projectifs, de rang fini, sous groupe pur, groupes divisibles, réduits.

AMS: 20K20, 20K15 Ref. Ž.: 2.722.1

Dans ce travail, nous établissons une caractérisation complète des groupes quasi-purs-projectifs sans torsion complètement décomposables. Nous démontrons également que les groupes sans torsion séparables quasi-purs-projectifs réduits sont homogènes. De plus, nous voyons qu'on peut réduire l'étude des groupes sans torsion non réduits quasi-purs-projectifs aux groupes réduits de rang fini n'admettant pas $\mathbb{Q}$ comme image épimorphe. Les notations utilisées sont, sauf avis contraire, celles de [3] et tous les groupes considérés sont abéliens.

Comme suggéré par L. Fuchs [3], p. 134 et pour poursuivre la recherche déjà entreprise dans [1], nous étudierons la classe des groupes quasi-purs-projectifs sans torsion. Rappelons d'abord la définition de groupe quasi-pur-projectif.

<u>Définition</u>. Un groupe G est dit quasi-pur-projectif si, pour tout sous-groupe pur H de G et pour tout homomorphisme $f: G \to G/H$, il existe un endomorphism $\varphi : G \to G$ tel que $\nu_H \cdot \varphi = f$ où ν_H désigne l'épimorphisme canonique $\nu_H: G \to G/H$. Nous écrirons q.p.p. dans ce qui suit.

Il est facile de démontrer le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u>. Soit G un groupe sans torsion et soit H un sous-groupe pur de G. Alors on peut écrire $G = D \oplus R$, $H = D_1 \oplus R_1$, où $D_1 \leq D$ sont divisibles et $R_1 \leq R$ sont réduits. De plus R_1 est pur dans R.

<u>Théorème 2</u>. Si G est un groupe sans torsion non réduit et si on écrit $G = D \oplus R$ où D divisible et R réduit, alors G est q.p.p. si et seulement si R est q.p.p. sans épimorphisme sur $\mathbb{Q}$.

<u>Preuve</u>. Supposons G q.p.p. . Alors R est aussi q.p.p. car R est facteur direct de G. Sans perte de généralité, on peut supposer $D \simeq \mathbb{Q}$. S'il existe un $K \leq R$ tel que $R/K \simeq \mathbb{Q}$, posons $H = D \oplus K$. Alors H est pur dans G et $G/H \simeq Q \simeq D$. On définit $f: G \to G/H$ par $f|_D: D \to G/H$ l'isomorphisme existant par ce qui précède et $f|_R = 0$. Alors, il existe $\varphi : G \to G$ tel que $\nu_H \cdot \varphi = f$ où ν_H désigne la pro-

jection canonique de G sur G/H. Alors $G/H = f(D) =$ $= \nu_H . \varphi\ (D) \leq \nu_H\ (D) = 0$ ce qui est une contradiction.

Inversement, on suppose que R est q.p.p. n'ayant pas d'épimorphisme sur Q. Soit L un sous-groupe pur de G et soit $f: G \longrightarrow G/L$ un homomorphisme quelconque. On peut supposer sans perte de généralité par le lemme précédent que $L =$ $= D_1 \oplus R_1$ où $R_1 \leq R$, $D_1 \leq D$. Alors $G/L \simeq D/D_1 \oplus R/R_1$ où R/R_1 est réduit. Ecrivons $D = D_1 \oplus D_2$. Nous noterons les injections, projections et isomorphismes canoniques suivants par

$$i: R \longrightarrow G,\ j: D \longrightarrow G,\quad \pi_1: G/L \longrightarrow (D + L)\ L$$

$$\pi_2: G/L \longrightarrow (R + L)\ L,\quad \theta_1: (D + L)\ L \longrightarrow D_2$$

$$\theta_2: (R + L)/L \longrightarrow R/R_1,\quad \theta_3: R/R_1 \longrightarrow (R + L)/L$$

Alors $\theta_2 . \pi_2 . f . i: R \longrightarrow R/R_1$ et donc il existe $\varphi_1:$ $: R \longrightarrow R$ tel que $\nu_{R_1} . \varphi_1 = \theta_2 \pi_2 f i$ ou ν_{R_1} est l'épimorphisme canonique de R sur R/R_1. Soit $\varphi : G \longrightarrow G$ défini par $\varphi . j = \theta_1 . \pi_1 . f . j$ et

$\varphi . i = \theta_1 . \pi_1 . f . i + \varphi_1$. Alors, si $d \in D$,

$$\nu_L . \varphi(d) = \nu_L . \theta_1 . \pi_1 f(d) = \pi_1 . f(d) = f(d)$$

car

$f(d) \in (D + L)\ L$. De même, si $r \in R$,

$$\nu_L . \varphi(r) = \nu_L . \theta_1 . \pi_1 f(r) + \theta_3 . \nu_{R_1} . \varphi_1(r)$$

$$= \pi_1 . f(r) + \theta_3 . \theta_2 . \pi_2 f(r)$$

$$= \pi_1 . f(r) + \pi_2 . f(r) = f(r)$$

Donc G est q.p.p.

En vue du résultat précédent, l'étude des groupes sans torsion non réduits q.p.p. se ramène à celle des groupes q.p.p. réduits de rang fini n'admettant pas $\mathbb{Q}$ comme image épimorphe.

Nous avons besoin des lemmes suivants, dont les preuves sont immédiates.

<u>Lemme 3</u>. Si G et H sont des groupes sans torsion et si G est de rang un, alors il existe un homomorphisme f: : $G \longrightarrow H$ tel que $f(g) = h$ où $g \in G$ et $h \in H$ si et seulement si la caractéristique de g est plus petite ou égale à celle de h. Dans ce cas, f est unique.

<u>Lemme 4</u>. Si un groupe sans torsion G est somme directe de deux groupes homogènes G_1 et G_2 tels que le type de G_1 est soit plus grand, soit non comparable avec le type de G_2, alors G_1 est totalement invariant dans G.

<u>Théorème 5</u>. Si G est somme directe de G_1 et G_2 deux groupes sans torsion réduits de rang un et si G est q.p.p., alors G est homogène.

<u>Preuve</u>. Désignons par $c(g)$ la caractéristique et par $t(g)$ le type d'un élément g de G. Si G n'est pas homogène, on peut supposer $G_1 = \langle x \rangle_*$ où $c(x) = (k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, 0, k_{n+1}, \ldots)$, $G_2 = \langle y \rangle_*$ où $c(y) = (\ell_1, \ell_2, \ldots)$ avec soit $c(x) > c(y)$, soit $c(x)$ et $c(y)$ non comparables.

Soit $H = \langle x + p_n y \rangle_*$. Alors H est un sous-groupe pur de rang un de G et donc G/H est de rang un. Par conséquent, $t(x + y + H) = t(x + H) \geq t(x)$ et il existe un entier m, premier avec p_n, tel que $c(m(x + y + H)) \geq c(x)$. Alors on peut définir un homomorphisme f: $G \longrightarrow G/H$ tel que $f(x) = -m(x +$

$+ y + H)$ et $f(G_2) = 0$. Comme G est q.p.p., il existe φ : $: G \longrightarrow G$ tel que $\nu_H . \varphi = f$ où $\nu_H : G \longrightarrow G/H$ est l'épimorphisme canonique. Mais alors $\varphi(x) + H = f(x) = -m(x + y + H)$ d'où $\varphi(x) + mx + my \in \langle x + p_n y \rangle_*$. Donc, il existe des entiers a, b, qu'on peut supposer premiers entre eux, tels que $a(\varphi(x) + mx) + amy = bx + bp_n y$. Par le lemme 4, $\varphi(x) \in G_1$. Donc, par indépendance linéaire $amy = bp_n y$, $a = p_n d$ car $(m,p_n) = 1$ et donc $p_n d(\varphi(x) + mx) = bx$ avec $(p_n, b) = 1$ car p_n divise a. Donc p_n divise $\underline{x}$ ce qui est une contradiction. Par conséquent, G est homogène.

On obtient alors:

<u>Théorème 6</u>. Si G est un groupe sans torsion séparable q.p.p. réduit, alors G est homogène.

<u>Preuve</u>. En effet, toute paire d'éléments non nuls de G est dans un facteur direct complètement décomposable qui est alors aussi q.p.p. et par le théorème 5 il est homogène et pur dans G.

<u>Lemme 7</u>. Si G est sans torsion homogène, si H est sous-groupe de G et si $g + H \in G/H$ tel que $c(g + H) \geq c(x)$ pour un $x \in G$, alors il existe $g' \in G$ tel que $g' + H = g + H$ et $c(g') \geq c(x)$.

<u>Preuve</u>. On ordonne les nombres premiers pour avoir $c(x) = (k_1, k_2, \ldots, \ell_1, \ell_2, \ldots)$ où $k_i \notin \{0,\infty\}$ et $\ell_i \in \{0,\infty\}$. Comme $t(g) = t(x)$ et en réordonnant s'il le faut les nombres premiers correspondant aux k_i, on a la situation suivante:

$$c(g) = (r_1, r_2, \ldots, t_1, t_2, \ldots)$$

avec $r_i < k_i$, $i = 1,2,\ldots,s$, $r_i \geq k_i$, $i = s + 1, \ldots$, $t_i \geq \ell_i$,

$i = 1,2,\ldots$. Si $s = 0$, $c(g) \geq c(x)$ et on prend $g' = g$. Supposons donc $s \neq 0$. Comme $c(g + H) \geq c(x)$, on aura $g + H = = p_i^{k_i} g_i + H$, $i = 1,2,\ldots,s$. Donc $g - p_i^{k_i} g_i \in H$, $i = 1,2,\ldots,s$. Il suffit donc de trouver des entiers $a_1,a_2,\ldots,a_s$ tels que $g' = g + \sum_{i=1}^{s} a_i(g - p_i^{k_i} g_i) = (1 + \sum_{i=1}^{s} a_i)g - \sum_{i=1}^{s} a_i p_i^{k_i} g_i$, $c(g') \geq c(x)$.

Pour chaque $i = 1,2,\ldots,s$, il existe un nombre entier n_i premier avec $p_1 p_2 \ldots p_s$ tel que $c(n_i p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s} g_i) \geq c(x)$ car G est homogène. Il suffit donc de résoudre les systèmes de congruences

$$(1) \qquad a_i \equiv 0 \quad (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots p_s^{k_s} n_i) \quad i = 1,\ldots,s$$

$$a_i \equiv -1 \quad (p_i^{k_i})$$

$$(2) \qquad 1 + \sum_{i=1}^{s} a_i \equiv 0 \quad (p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s})$$

Le premier système est résoluble par le théorème chinois des résidus. De plus, toute solution de (1) est solution de (2) car

$$1 + \sum_{i=1}^{s} a_i \equiv 1 + a_i \equiv 0 \quad (p_i^{k_i})$$

Donc $c(g') \geq c(x)$ et $g' + H = g + H$.

<u>Théorème 8</u>. Si G est sans torsion complètement décomposable réduit alors G est q.p.p. si et seulement si il est homogène.

<u>Preuve</u>. Si G est q.p.p., il est homogène par le théo-

rème 5. Si G est homogène, on écrit $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ où chaque G_i est de rang un. Soit H un sous-groupe pur de G et soit $f : G \longrightarrow G/H$ un homomorphisme quelconque. Clairement, il suffit de trouver pour tout $i \in I$, un $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ tel que $\nu_H \cdot \varphi_i = f|_{G_i}$ où ν_H est l'épimorphisme canonique de G dans G/H. Evidemment, il suffit de trouver une telle fonction pour un i fixe. Soit x un élément non nul de G_i et soit $g \in G$ tel que $f(x) = g + H$. Alors $c(g + H) \geq c(x)$ et donc, par le lemme précédent, il existe $g' \in H$ tel que $g' + H = g + H$ et $c(g') \geq c(x)$. Soit $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ défini par $\varphi_i(x) = g'$. Alors $\nu_H \cdot \varphi_i = f|_{G_i}$ et donc G est q.p.p.

On obtient enfin:

Théorème 9. Un groupe sans torsion complètement décomposable est q.p.p. si et seulement si il est soit homogène, soit somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe homogène de rang fini.

Bibliographie

[1] BENABDALLAH K. et BRADLEY R.: Sur les groupes quasi-purs-projectifs torsions, à paraitre.

[2] BENABDALLAH K. et LAROCHE A.: Sur le problème 17 de L. Fuchs, à paraitre.

[3] FUCHS L.: Infinite Abelian Groups, vol.I, Academic Press, New York, 1970.

[4] FUCHS L.: Infinite Abelian Groups, vol. II, Academic Press, New York, 1973.

Université de Montréal
Département de Mathématiques
Montréal
Canada

(Oblatum 30.8. 1976)