COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

17,3 (1976)

CONTINUITÉ LIPSCHITZIENNE DU SPECTRE COMME FONCTION D'UN OPÉRATEUR NORMAL

Vlastimil PTÁK et Jaroslav ZEMÁNEK, Praha

Abstract: The authors prove that the spectrum of a normal operator on a Hilbert space, as a set-valued function, is lipschitzian in the Hausdorff metric. As an application, a localization theorem for eigenvalues of normal matrices is given.

Key words: Normal operator, spectrum, continuity of the spectrum.

AMS: Primary 47A10, 47B15 Ref. Ž.: 7.974.4
Secondary 15A60 2.732.26

Introduction. On sait que le spectre n'est pas, en général, une fonction continue de l'opérateur. Par contre - pour la classe des opérateurs normaux, par exemple - le spectre est même une fonction lipschitzienne, la distance des spectra étant considérée, naturellement, dans la métrique de Hausdorff (Théorème 1 du présent travail).

Le premier résultat positif de cette sorte, en cas de dimension finie, est celui de A.J. Hoffman et H.W. Wielandt [6]. Celui-ci, étant fondé sur la notion de trace et celle de valeur propre, ne peut pas être généralisé aux espaces de dimension infinie sans conditions supplémentaires. Dans le livre de N. Bourbaki [3], p. 105, on mentionne seulement la continuité simple du spectre sur les éléments normaux, ce résultat étant originairement dû à J.D. Newburgh [10]. Pour la continuité uniforme en dimension finie, on a le travail de F.L. Bauer et C.T. Fike [2]; voir aussi la monographie récente de J. Stoer et R. Bulirsch [12], p. 76. Pour les opérateurs hermitiens en dimension infinie , le résultat est donné dans le livre de T. Kato [9], p. 291.

Le résultat général, surprenant par l'extrême simplicité de son énoncé et de sa démonstration, est très important pour un nombre d'applications intéressantes. Il sera donc utile de le formuler explicitement. Il paraît que récemment, en connection avec ces applications, ce résultat a été obtenu probablement par plusieurs auteurs de façon indépendante. Ainsi Professeur J.-P. Kahane, à qui nous avons communiqué se résultat au commencement de novembre 1975, nous a signalé ultérieurement le travail jusqu'à présent inédit de B. Aupetit [1] dans lequel le théorème est également contenu. En décembre 1975 nous avons reçu à Prague l'article de J.B. Conway [4] qui, en contexte un peu différent, est parvenu (p. 138) en principe au même résultat. Pour la première inclusion du Théorème 1, voir aussi T. Kato [9], p. 291.

Comme une des applications possibles du Théorème 1 nous démontrons ici un théorème de localisation (Théorème 2) qui représente une généralisation aux opérateurs normaux d'un résultat connu pour les opérateurs hermitiens (voir, par exemple, M. Fiedler [5], ou bien [12], p. 92). Il convient de noter que Théorème 2 est aussi conséquence de certains résultats obtenus antérieurement par le premier auteur [11].

<u>Préliminaires.</u> Si (E,d) est un espace métrique, $x \in E$, $M \subset E$, on définit la distance $d(x,M)$ du point x de l'ensemble M comme il suit

$$d(x,M) = \inf d(x,m), \ m \in M.$$

Le voisinage fermé de l'ensemble M, désigné par $V(M,r)$, sera l'ensemble

$$V(M,r) = \{x \in E;\ d(x,M) \leq r\}.$$

Si M_1 et M_2 sont deux sous-ensembles compacts de E, il existe un nombre positif r tel que $M_1 \subset V(M_2,r)$ et $M_2 \subset$ $\subset V(M_1,r)$; la borne inférieure de tels r sera désignée par $\operatorname{dist}(M_1,M_2)$. On l'appelle la métrique de Hausdorff correspondant à d. Maintenant on peut énoncer le

<u>Théorème 1.</u> Soit H un espace de Hilbert, A et T deux opérateurs linéaires bornés sur H, A étant normal. Alors

$$\sigma(T) \subset V(\sigma(A),\ |T - A|).$$

Si A_1 et A_2 sont deux opérateurs normaux, alors

$$\operatorname{dist}(\sigma(A_1),\ \sigma(A_2)) \leq |A_1 - A_2|.$$

<u>Démonstration.</u> Evidemment, il suffit de démontrer seulement la première inclusion. Soit λ un nombre complexe tel que $d(\lambda, \sigma(A)) > |T - A|$. L'opérateur $(\lambda - A)^{-1}$ étant normal, on a l'égalité

$$|(\lambda - A)^{-1}| = |(\lambda - A)^{-1}|_{\sigma} = d(\lambda, \sigma(A))^{-1}.$$

En même temps

$$\lambda - T = \lambda - A - (T - A) = (\lambda - A)(1 - (\lambda - A)^{-1}(T - A)),$$

$$|(\lambda - A)^{-1}(T - A)| \leq d(\lambda, \sigma(A))^{-1}\,|T - A| < 1;$$

ainsi, l'opérateur $\lambda - T$ est représenté comme produit de deux opérateurs réguliers. Par conséquent, $(\lambda - T)^{-1}$ existe ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque 1.</u> Récemment J. Janas [8] a prouvé la continuité simple du spectre sur la classe des opérateurs hyponormaux (c'est-à-dire tels que $T^* T - TT^* \geq 0$). En reprenant la démonstration du Théorème 1, on voit que le spectre est en effet lipschitzien sur cette classe; pour les propriétés fondamentales des opérateurs hyponormaux voir, par exemple, le livre de V.I. Istrăţescu [7].

La conséquence suivante n'est formulée que pour le cas de dimension finie, le cas général étant tout-à-fait analogue.

<u>Théorème 2.</u> Soit A une matrice normale (n,n) décomposée selon les blocs

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ & \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

le bloc A_{22} étant de dimension $(n - 1, n - 1)$. Notant r la racine carrée de $\sum_{k\geq 2} |a_{1k}|^2 = \sum_{j\geq 2} |a_{j1}|^2$, on a $|a_{11} - \lambda| \leq r$ pour au moins une valeur propre λ de A.

<u>Démonstration.</u> Soit P la projection

$$P = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 0, & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0, & 0, & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et soit Q la projection complémentaire; ainsi $P + Q = I$. Posons $T = PAP + QAQ$. D'après le théorème précédent on a

$$\sigma(T) \subset V(\sigma(A), r)$$

compte tenu du fait que $|A - T| = r$. Puisque $a_{11} \in \sigma(T)$, le disque $|a_{11} - \lambda| \leq r$ doit contenir un point du spectre de A ce qui achève la démonstration.

Remarque 2. Pour d'autres applications remarquables de l'idée fondamentale du Théorème 1 voir le travail [13] du second auteur, aussi bien que [1] et [4].

Références

[1] B. AUPETIT: Continuité et uniforme continuité du spectre dans les algèbres de Banach, à paraitre.

[2] F.L. BAUER, C.T. FIKE: Norms and exclusion theorems, Numer. Math. 2(1960), 137-141.

[3] N. BOURBAKI: Théories spectrales, Paris 1967.

[4] J.B. CONWAY: On the Calkin algebra and the covering homotopy property, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975), 135-142.

[5] M. FIEDLER: Additive compound matrices and an inequality for eigenvalues of symmetric stochastic matrices, Czech. Math. J. 24(1974), 392-402.

[6] A.J. HOFFMAN, H.W. WIELANDT: The variation of the spectrum of a normal matrix, Duke Math. J. 20(1953), 37-39.

[7] V.I. ISTRĂŢESCU: Introducere în teoria operatorilor liniari, Bucureşti 1975.

[8] J.JANAS: Note on the spectrum and joint spectrum of hyponormal and Toeplitz operators, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 23(1975), 957-961.

[9] T. KATO: Perturbation theory for linear operators, New York 1966.

[10] J.D. NEWBURGH: The variation of spectra, Duke Math. J. 19(1951), 165-176.

[11] V. PTÁK: An inclusion theorem for normal operators, Acta Sci. Math. Szeged, sous presse.

[12] J. STOER, R. BULIRSCH: Einführung in die Numerische Mathematik II, Berlin 1973.

[13] J. ZEMÁNEK: Spectral radius characterizations of commutativity in Banach algebras, Studia Math., sous presse.

Matematický ústav ČSAV

Žitná 25, 11567 Praha 1

Československo

(Oblatum 22.3. 1976)