COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

17,1 (1976)

DIE DARSTELLUNG VON PARTIELLEN K-STELLIGEN OPERATIONEN

Jan KASTL, Praha, Tomáš TICHÝ, Rožnov p.R.

Inhalt: Man untersucht den Zusammenhang der partiellen k-stelligen assoziativen Operationen mit den partiellen zweistelligen assoziativen Operationen. Dabei bekommt man heraus, dass jede partielle k-stellige assoziative Operation mit Hilfe der nichtleeren Relationen auf einer Menge darzustellen ist.

Schlüsselwörter: Partielle k-stellige assoziative Operation, Abbildungsrelation, partielle Abbildung.

AMS: 20M20 Ref. Ž.: 2.721.4

In dieser Arbeit wird die Untersuchung der k-abgeschlossenen Teilmengen zweistelliger Operationen aus der Arbeit [1] auf die k-abgeschlossenen Teilmengen partieller zweistelliger assoziativer Operationen erweitert. Auch in diesem Fall bilden alle solche r, für die die gegebene Teilmenge $(r+1)$-abgeschlossen ist, eine additive Unterhalbgruppe der natürlichen Zahlen. Man zeigt auch, dass es eine Kategorie und in ihr eine solche Teilmenge gibt, deren Verdünnung die Form beträchtlich beliebigen Graphs hat, und alle Zahlen r, für die sie bezüglich der partiellen Operation der Morphismenzusammensetzung $(r+1)$-abgeschlossen ist, eine vorgeschriebene additive Unterhalbgruppe der natürlichen Zahlen bilden.

Angesichts [1] gilt die verallgemeinerte Behauptung, so dass auch jede partielle k-stellige assoziative Operation wie induzierte durch partielle zweistellige assoziative Operation auf der k-abgeschlossenen Teilmenge zu gewinnen ist. Von dieser Behauptung kann man leicht zu den Sätzen über Darstellung partieller k-stelliger assoziativer Operation mit Hilfe nichtleerer Abbildungsrelationen und im Fall der Geltung der Bedingung (S) über Darstellung mit Hilfe der Abbildungen übergehen. Dieses Verfahren von Darstellung unter (S)-Voraussetzung wurde vom zweiten Autor in [3] gewonnen.

<u>Bezeichnung</u>: Wir verwenden sie im gewöhnlichen Sinn. In möglichen Undeutlichkeiten verweisen wir auf die genauere Erklärung in der Arbeit [1].

<u>Definition</u>: Unter einer partiellen k-stelligen Operation δ auf der Menge Y (k ist natürliche Zahl ≥ 2) verstehen wir beliebige partielle Abbildung δ aus der Menge Y^k in die Menge Y (δ kann auch leere Abbildung sein).

δ ist dann eine partielle assoziative Operation, wenn für jedes Paar $1 \leq i,j \leq k$ und für beliebiges System $y_1,\dots,y_{2k-1} \in Y$ die ganze Gleichung

$$\delta(\underbrace{y_1,\dots,y_{i-1}}_{i-1}, \delta(y_i,\dots,y_{k+i-1}), \underbrace{y_{k+i},\dots,y_{2k-1}}_{k-i}) =$$

$$= \delta(\underbrace{y_1,\dots,y_{j-1}}_{j-1}, \delta(y_j,\dots,y_{k+j-1}), \underbrace{y_{k+j},\dots,y_{2k-1}}_{k-j})$$

klar und gültig ist, sofern wenigstens eine ihre Seite klar ist.

<u>Definition</u>: Sei γ partielle zweistellige assoziative Operation auf der Menge X. Die Teilmenge $Y \subseteq X$ heisst k-

abgeschlossene Teilmenge (X,γ) (für $2 \leq k \in N$ ← natürliche Zahlen ≥ 1), sofern es für jedes k-Tupel $(y_1,\ldots,y_k) \in Y^k$, für das der Ausdruck $\gamma(y_1, \gamma(y_2,\ldots, \gamma(y_{k-1},y_k)\ldots)) = z$ definiert ist, $z \in Y$ gilt.

Es ist leicht zu sehen, dass Y eine k-abgeschlossene Teilmenge von (X,γ) genau in dem Fall ist, wenn wir durch die Vorschrift: $(y_1,\ldots,y_k) \in Y^k$, $\sigma(y_1,\ldots,y_k) = \gamma(y_1,\ldots, \gamma(y_{k-1},y_k)\ldots)$ -- ist genau dann definiert, wenn die rechte Seite klar ist -- eine partielle k-stellige (assoziative) Operation σ auf der Menge Y bekommen.

<u>Definition:</u> Bezüglich der gegebenen partiellen zweistelligen assoziativen Operation (X,γ) bezeichnen wir für beliebige Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $N(Y)$ die Menge aller $r \in N$, so dass Y die $(r+1)$-abgeschlossene Teilmenge von (X,γ) ist.

<u>Behauptung 1</u> : Sei γ partielle zweistellige assoziative Operation auf der Menge X. Für $Y \subseteq X$ ist $N(Y)$ eine Unterhalbgruppe der natürlichen Zahlen bezüglich der Addition.

<u>Beweis</u> ist evident.

Auch für den Fall partieller assoziativer Operationen sind alle $N(Y)$ genau die additiven Unterhalbgruppen von N -- [1]. Die Behauptung 4 aus [1] kann man jetzt für Kategorien verallgemeinern.

<u>Bemerkung 1:</u> Wir halten (T,G) für gerichteten Graph mit unendlichem Weg, wenn es für $\forall m \in N$ $t_1,\ldots,t_m \in T$ derart gibt, dass $(t_1,t_2), \ldots, (t_{m-1},t_m) \in G$.

Sei T eine Menge. Man definiere auf T^2 folgende partielle, offensichtlich assoziative, Operation τ :
Für (t_1,t_2) , $(t_3,t_4) \in T^2$ wird $\tau((t_1,t_2),(t_3,t_4))$ genau dann definiert, wenn $t_2 = t_3$, und ist das (t_1,t_4) .

Für gerichteten Graph (T,G) verstehen wir unter $N(G)$ die Unterhalbgruppe der natürlichen Zahlen bezüglich der partiellen Operation τ auf T^2 .

<u>Behauptung 2</u>: Sei N_1 additive Unterhalbgruppe der natürlichen Zahlen, $T(G)$ sei ein gerichteter Graph mit unendlichem Weg, so dass $N(G) \supseteq N_1$ gilt. Dann gibt es eine Kategorie $(K, \circ)$, die erfüllt:

1) Es gibt eine Bijektion μ aus T auf die Menge von Objekten K^o .

2) Es gibt eine Teilmenge von Morphismen $Y \subseteq K^m$ derart, dass es bezüglich der partiellen Operation $\circ$ $N(Y) = N_1$ gilt.

3) Das Paar (t_1,t_2) liegt im Graph G genau dann, wenn es in Y einen aus dem Objekt $\mu(t_2)$ in Objekt $\mu(t_1)$ gehenden Morphismus gibt.

4) Ist der Graph (T,G) endlich, so ist auch die Kategorie $(K, \circ)$ endlich.

<u>Beweis</u>: Man nehme nach [1] solche Teilmenge $S \subseteq X^X$, die bezüglich der Kompositionsoperation $N(S) = N_1$ erfüllt. ($S \neq \emptyset$, $X \neq \emptyset$ -- endliche.)

$(K, \circ)$ ist die Kategorie aller Abbildungen zwischen den Mengen $\{X \times \{t\}\}_{t \in T}$ (mit der Komposition), d.h.
$K^o = \{X \times \{t\} ; t \in T\}$, $K^m = \{f: X \times \{t_2\} \longrightarrow X \times \{t_1\}$;

$t_1, t_2 \in T \}$.

Wir definieren $\mu(t) = X \times \{t\}$;

$Y = \{ s_{t_1 t_2} : X \times \{t_2\} \longrightarrow X \times \{t_1\} ;\ s \in S\ ,\ (t_1, t_2) \in G \}$,

wo $s_{t_1 t_2}(x, t_2) = (s(x), t_1)$ definiert ist.

Die Inklusion $N_1 \subseteq N(Y)$ folgt aus der Beziehung $N_1 = N(S) \subseteq N(G)$ und der unendliche Weg des Graphs (T,G) gewährleistet dann $N(Y) \subseteq N_1$.

Anderseits kann man auch für die k-abgeschlossenen Teilmengen partieller zweistelliger assoziativer Operationen zeigen, dass die auf ihnen induzierten partiellen k-stelligen assoziativen Operationen eine ganz beliebige Form haben können.

Behauptung 3: Sei σ partielle k-stellige assoziative Operation auf der Menge Y , $(k \geq 2)$. Es gibt eine Menge F mit partieller zweistelliger assoziativer Operation γ und eine injektive Abbildung $\psi : Y \longrightarrow F$, so dass für bel. $(y_1, \dots, y_k) \in Y^k$ $\psi(\sigma(y_1, \dots, y_k)) = \gamma(\psi(y_1), \dots$ $\dots, \gamma(\psi(y_{k-1}), \psi(y_k))..)$ klar und gültig ist, sofern eine Seite dieser Gleichung klar ist.

Beweis: Wir ergänzen die partielle Operation σ auf die totale Operation λ auf der Menge $X = Y \cup \{0\}$ (man nehme $0 \notin Y$ an). Für beliebige $x_1, \dots, x_k \in X$

$$\lambda(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} = \sigma(x_1, \dots, x_k) \text{ , wenn } x_1, \dots, x_k \in Y \text{ und } \sigma(x_1, \dots, x_k) \text{ klar ist} \\ = 0 \text{ in übrigen Fällen} \end{cases}$$

Leicht ist es zu sehen, dass diese Operation λ assoziativ ist. Man wende auf $\mathcal{A}$ die Behauptung 1 aus [1] an.

Wir bemerken noch, dass die Abbildung $\varphi : X \longrightarrow F$ dann erfüllt: Für bel. $y_1,\dots,y_i \in X$, $z_1,\dots,z_j \in X$, $1 \leq i$, $j \leq \leq k-1$

$$\varphi(y_1) \circ \dots \circ \varphi(y_i) = \varphi(z_1) \circ \dots \circ \varphi(z_j) \Longrightarrow i = j$$

(siehe Bemerkung 1 in [1]).

Man bezeichne jetzt mit H die Teilmenge von allen solchen $f \in F$, für die es $y, y_1, \dots, y_n \in Y$, $n \in N$, $1 \leq i \leq j \leq n$ derart gibt, dass $f = \varphi(y_i) \circ \varphi(y_{i+1}) \circ \dots \circ \varphi(y_j)$ und $\varphi(y) = = \varphi(y_1) \circ \dots \circ \varphi(y_n)$ gelten.

Man definiere auf der Menge F solche partielle zweistellige Operation γ : γ ist lediglich für solche Paare (f_1, f_2) aus F^2 definiert, die $f_1 \in H$, $f_2 \in H$, $f_1 \circ f_2 \in H$ erfüllen, und es ist dann $\gamma(f_1, f_2) = f_1 \circ f_2$ gleich.

Die partielle Operation γ ist assoziativ.

Für f_1, f_2, f_3 sei nämlich $\gamma(\gamma(f_1, f_2), f_3)$ klar, also $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \in H$; $f_1, f_2, f_3 \in H$. Es gibt daher $1 \leq i \leq j \leq \leq n$; r $(\in N)$; $y, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{j+1}, \dots, y_n, z_1, \dots, z_r \in Y$ derart, dass

$$\varphi(y_1) \circ \dots \circ \varphi(y_{i-1}) \circ f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \varphi(y_{j+1}) \circ \dots \circ \varphi(y_n) = = \varphi(y) \ , \quad f_1 = \varphi(z_1) \circ \dots \circ \varphi(z_r)$$

gelten. Daraus folgt $f_2 \circ f_3 \in H$ und also auch folgender Ausdruck ist klar:

$\gamma(f_1, \gamma(f_2, f_3)) = f_1 \circ f_2 \circ f_3$. Analogisch ist die Definierbarkeit auf die andere Seite zu beweisen.

Die injektive Abbildung $\psi : Y \longrightarrow F$, die wir durch die Restriktion von φ auf die Menge $Y \subseteq X$ bekommen, liefert die gesuchte Eintauchung der partiellen Operation σ in die partielle zweistellige assoziative Operation γ.

Für bel. $y_1,..,y_k \in Y$ gilt das Folgende:

I. Ist $\sigma(y_1,..,y_k)$ klar, so gilt $\psi(\sigma(y_1,...,y_k)) = \varphi(\lambda(y_1,..,y_k)) = \psi(y_1) \circ .. \circ \psi(y_k)$. Daraus sehen wir, dass $\gamma(\psi(y_1),..,\gamma(\psi(y_{k-1}), \psi(y_k))..) = \psi(\sigma(y_1,..,y_k))$ klar und gültig ist.

II. Umgekehrt gilt es aus dem Sinn des ersten Ausdruckes: $\gamma(\psi(y_1),..,\gamma(\psi(y_{k-1}), \psi(y_k))..) = \varphi(\lambda(y_1,..,y_k))$ $(\in H)$.

Wäre $\lambda(y_1,..,y_k) = 0$, so gälte es demzufolge: Existieren $z, z_1,..,z_{i-1}, z_{j+1},..,z_n \in Y$, $1 \leq i \leq j \leq n$ derart, dass

$$\varphi(z) = \varphi(z_1) \circ .. \circ \varphi(z_{i-1}) \circ \varphi(0) \circ \varphi(z_{j+1}) \circ .. \circ \varphi(z_n) = \underbrace{\varphi(0) \circ .. \circ \varphi(0)}_{i+n-j}$$

gilt. Dabei weiter gilt $\varphi(z) =$

$$= \underbrace{\varphi(0) \circ .. \circ \varphi(0)}_{i+n-j} = \underbrace{\varphi(0) \circ .. \circ \varphi(0)}_{r}$$

für irgendwelche $1 \leq r \leq k-1$. Aber es muss sein: $r = 1$, $\varphi(z) = \varphi(0)$. Das ist der Widerspruch, denn φ ist injektiv.

Es muss also $\lambda(y_1,..,y_k) \neq 0$ gelten, d.h.

$$\varphi(\lambda(y_1,..,y_k)) = \psi(\sigma(y_1,..,y_k)).$$

Diese Behauptung bewegt uns leicht zu den Sätzen über Darstellung von partiellen k-stelligen Operationen.

Definition: Unter Abbildungsrelationen verstehen wir eine nichtleere Menge $f \neq \emptyset$ von Paaren, so dass folgende Implikation gilt: $(y_1,x) \in f$, $(y_2,x) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$ (x, y_1, y_2 - bel.).

Lemma: Sei γ partielle zweistellige assoziative Operation auf der Menge X. Dann gibt es eine Menge S von

Abbildungsrelationen und eine Bijektion $\beta : X \longrightarrow S$ derart, dass für bel. $x_1, x_2 \in X$ $\gamma(x_1, x_2)$ genau dann klar ist, wenn $\beta(x_1) \circ \beta(x_2) \neq \emptyset$, und dann $\beta(\gamma(x_1, x_2)) = \beta(x_1) \circ \beta(x_2)$.

Beweis: Man nehme die Menge $X' = X \cup \{1\}$, wo $1 \notin X$. Man definiert auf X' die partielle zweistellige Operation γ' folgenderweise:

für $(x_1, x_2) \in X^2$ wird $\gamma'(x_1, x_2)$ genau dann definiert, wenn $\gamma(x_1, x_2)$ klar ist, und dann $\gamma'(x_1, x_2) = \gamma(x_1, x_2)$;

für $(x, 1)$, $x \in X$ wird $\gamma'(x, 1) = x$ immer definiert;

für $(1, x)$, $x \in X'$ – γ' wird nicht definiert.

Für bel. $a \in X$ nehmen wir $L_a = \{(y, x)\ ;\ x \in X',\ y = \gamma'(a, x)$ hat den Sinn $\}$. Wir sehen, dass immer $(a, 1) \in L_a$, L_a eine Abbildungsrelation ist. Die Bijektion $\beta : X \longrightarrow S = \{L_a\ ;\ a \in X\}$, die durch $\beta(a) = L_a$ definiert wird, erfüllt das angeführte Erfordernis.

Das ist leicht mit Hilfe folgender Eigenschaft der partiellen Operation γ' zu beweisen: Für bel. $x_1, x_2 \in X$, $x_3 \in X'$ $\gamma'(\gamma(x_1, x_2), x_3) = \gamma'(x_1, \gamma'(x_2, x_3))$ klar und gültig ist, sofern wenigstens eine Seite dieser Gleichung klar ist.

Behauptung 4: Die partielle k-stellige Operation σ auf der Menge Y ist assoziativ genau dann, wenn es eine Menge von Abbildungsrelationen C und eine bijektive Abbildung $\alpha : Y \longrightarrow C$ derart gibt, dass für bel. $y_1, \ldots, y_k \in Y$ das Folgende gilt: $\sigma(y_1, \ldots, y_k)$ ist in Y genau dann klar,

wenn $\alpha(y_1) \circ \ldots \circ \alpha(y_k) \neq \emptyset$, und dann
$\alpha(\sigma(y_1,\ldots,y_k)) = \alpha(y_1) \circ \ldots \circ \alpha(y_k)$.

Beweis: Existieren solche C und α , ist σ bestimmt assoziativ. Umgekehrt tauchen wir assoziative partielle Operation σ in zweistellige assoziative Operation γ ein und wenden wir das vorgehende Lemma auf γ an.

Bemerkung 2: Man beachte, dass sich diese Behauptung ganz gleich für die Menge C von beliebigen nichtleeren Relationen formulieren lässt.

Definition: Unter genauer Bedeutung von partieller Abbildung werden wir, zum Unterschied von Abbildungsrelation, ein Dreitupel (f,X,Y) anfassen, wo $f \subseteq Y \times X$ und es gilt: $(y_1,x) \in f$, $(y_2,x) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$.

Wir definieren Komposition von zwei partiellen Abbildungen $(f_1,X_1,Y_1) \bullet (f_2,X_2,Y_2)$ genau dann, wenn $X_1 = Y_2$, und sie ist $(f_1 \circ f_2, X_2, Y_1)$ gleich.

Bedingung (S)

Wir sagen, dass die auf der Menge Y operierende partielle k-stellige Operation σ die Bedingung (S) erfüllt, wenn es solche zwei Abbildungen d , r aus der Menge Y in eine Menge $\mathcal{O}$ gibt, die die folgende Erforderung erfüllen:

Für bel. $y_1,\ldots,y_k \in Y$ ist $\sigma(y_1,\ldots,y_k)$ genau dann klar, wenn $d(y_1) = r(y_2)$, $d(y_2) = r(y_3),\ldots,$ $d(y_{k-1}) = r(y_k)$ gilt, und dann gilt noch $d(\sigma(y_1,\ldots,y_k)) = d(y_k)$, $r(\sigma(y_1,\ldots,y_k)) = r(y_1)$.

<u>Behauptung 5</u>: Die partielle k-stellige Operation σ auf der Menge Y ist assoziativ und dabei die Bedingung (S) erfüllt genau in dem Fall, wenn es eine Menge P von partiellen Abbildungen und eine Bijektion $\pi : Y \longrightarrow P$ derart gibt, dass für $y_1,..y_k \in Y$ die Gleichung $\pi(\sigma(y_1,..,y_k)) = \pi(y_1) \bullet .. \bullet \pi(y_k)$ klar und gültig ist, sobald eine ihre Seite klar ist.

<u>Beweis</u>: Wir werden für beliebiges Dreitupel $|(a_1,a_2,a_3)|_i = a_i$ $(i = 1,2,3)$ schreiben.

Man setze voraus, dass es die beschriebenen P, π gibt. Sei $\mathcal{O} = \{|p|_2 ; p \in P\} \cup \{|p|_3 ; p \in P\}$. Auf der Menge Y definieren wir dann die Abbildungen d, $r: Y \longrightarrow \mathcal{O}$ durch die Vorschrift $d(y) = |\pi(y)|_2$, $r(y) = |\pi(y)|_3$. Das Verfahren der Komposition von partiellen Abbildungen und die Injektivität der Abbildung π gewährleisten, dass σ die Bedingung (S) erfüllt und assoziativ ist.

Sei umgekehrt σ eine partielle (S)-erfüllende assoziative Operation. Man nimmt nach der Behauptung 4 die Menge C der Abbildungsrelationen und die Bijektion $\alpha : Y \longrightarrow C$. Seien d, $r: Y \longrightarrow \mathcal{O}$ die Abbildungen aus der Bedingung (S). Man nehme noch $\mathcal{O} \cap F' = \emptyset$ an, wo $c \subseteq F' \times F'$ für jedes $c \in C$ ist.

Wir ordnen durch die Vorschrift π zu jedem $y \in Y$ eine partielle Abbildung $\pi(y) = (\alpha(y), F' \cup \{d(y)\}, F' \cup \{r(y)\})$ zu. Es folgt jetzt aus der Bedingung (S) und aus der Eigenschaft von α leicht, dass die Abbildung $\pi : Y \longrightarrow P = \{\pi(y) ; y \in Y\}$ wirklich Folgendes erfüllt:

$\pi(\sigma(y_1,..,y_k)) = \pi(y_1) \bullet .. \bullet \pi(y_k)$, sobald eine Seite klar ist.

Nachtrag: Die vorangehende Behauptung ist ganz übereinstimmend für die Menge P, die die Abbildungen zwischen disjunkten nichtleeren Mengen bilden, und bezüglich der gewöhnlichen Operation der Komposition von "anknüpfenden" Abbildungen zu äussern.

Beweis: Wir sehen leicht, dass sich die Menge $\{f: X_{m_1} \longrightarrow X_{m_2} ; \ldots\}$ von Abbildungen zwischen disjunkten nichtleeren Mengen ganz identisch wie solche Menge $\{(f, X_{m_1}, X_{m_2}) ; \ldots\}$ von partiellen Abbildungen beträgt.

Anderseits kann man jede Menge P von partiellen Abbildungen auf eine Menge Z von Abbildungen übertragen.

Man bilde zu der Menge X die gleichmächtige Menge $Z(X) = \{X\} \times X \times \{0\} \cup \{(X,0,1)\}$. ($Z(X) \cap Z(Y) \neq \emptyset \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow X = Y$.) Wir ordnen zu $p = (f,X,Y) \in P$ die folgenderweise definierte Abbildung $\varphi(p): Z(X) \longrightarrow Z(Y)$ zu:

$\varphi(p)(X,x,0) = (Y,y,0)$ für $\forall x \in X$, so dass $\exists(!)\, y$ $(y,x) \in f$

$\varphi(p)(X,x,0) = (Y,0,1)$ für $\forall x \in X$, so dass $\text{non}\exists\, y$ $(y,x) \in f$

$\varphi(p)(X,0,1) = (Y,0,1)$

φ ist offensichtlich die Bijektion P auf die Menge $Z = \{\varphi(p) ; p \in P\}$ von Abbildungen zwischen disjunkten nichtleeren Mengen. Man überprüft leicht $\varphi(p_1 \bullet p_2) =$ $= \varphi(p_1) \bullet \varphi(p_2)$.

L i t e r a t u r :

[1] KASTL J.: Die k-abgeschlossenen Teilmengen der Halbgruppen, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 135-146.

[2] MACLANE S.: Categories for the Working Mathematician, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1972.

[3] TICHÝ T.: Algebraická charakterisace systémů zobrazení (Diplomová práce 1972), unveröffentlicht.

Matematicko-fyzikální fakulta
Universita Karlova
Sokolovská 83, 18600 Praha 8
Československo

Tesla Rožnov
národní podnik
75661 Rožnov pod
Radhoštěm
Československo

(Oblatum 29.9. 1975)