COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
17,1 (1976)

SUR DES PROPRIETES D'APPROXIMATION DES ESPACES DE DISTRIBUTIONS, II

Jiří JELÍNEK, Praha

Résumé: Pour un sous-espace normal $\mathcal{H}$ de distributions, les suites de multiplicateurs $\{\alpha_k\}$ ont été introduites dans la partie I de cet article [1]. Ici, on considère un ensemble concret de suites de régularisations $\{\varphi_k\}$ et on recherche des conséquences des suppositions $\lim \alpha_k T = T$, $\lim T * \varphi_k = T$.

Mots clefs: L'espace normal (resp. permis) de distributions, suite de régularisations, suite de multiplicateurs, propriété d'approximation, mesure de Dirac.

AMS: 46F05 Ref. Ž.: 7.972.4

Dans la 1e partie de cet article [1], on a recherché, entre outre, des espaces normaux $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$ avec la propriété

$$(1) \qquad \lim T * \varphi_k = T$$

dans $\mathcal{H}$, pour chaque $T \in \mathcal{H}$ et pour chaque suite $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}$. Pour cela, on a considéré n'importe quel ensemble fixe de suites de régularisation de certaines propriétés (cf. supposition 1 dans [1]).

Dans cette 2e partie de l'article, on se borne au cas spécial de l'ensemble des suites de régularisations, donné par la définition 1. Pour les espaces de distributions définies sur un ouvert $G \subsetneqq R^n$, la propriété d'approximation par régularisation (1) en général n'a pas le sens; on introduit alors la propriété d'approximation par noyau

$$\lim_k \int T(t)\ \nu_k(x,t)\ dt = T(x)$$

dans $(\mathcal{H})_x$ où le support des $\nu_k \in \mathcal{E}$ est propre (cf. les suppositions 1 et 2) ce qui permet de définir l'intégral envisagée comme distribution sur G . Des raisons techniques, on va écrire le noyau dans la forme $\nu_k(x - t,t)$. Dans le théorème de cet article, on montre des connexions entre ces deux notions de la propriété d'approximation.

On prend les mêmes suites de multiplicateurs et le même espace $\mathcal{a}$ que dans [1], supposition 2, tandis que les suites de régularisations seront définies comme suit:

Définition 1. Appelons suite de régularisations chaque suite $\{\lambda \sigma_k\}$ avec $0 \leq \lambda \in \mathcal{E}$, $\lambda(0) = 1$, $0 \leq \sigma_k = \check{\sigma}_k \in \mathcal{D}$, $\int \sigma_k \longrightarrow 1$, supp $\sigma_k \longrightarrow \{0\}$ (dans le sens topologique).

Notons que l'ensemble des suites de régularisations satisfait à la supposition 1 de [1] .

Remarque. Egalement on pourrait considérer comme suites de régulariastions les suites $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}$ avec $\varphi_k \geq 0$, $\int \varphi_k \longrightarrow 1$, supp $\varphi_k \longrightarrow \{0\}$. Dans ce cas-là on obtiendrait des résultats analogues d'une manière analogue ou bien plus simple.

Proposition 1. Soit $\mathcal{H}$ un espace normal de distributions sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H} * \mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ et supposons que pour chaque $T \in \mathcal{H}$ l'application $\varphi \longmapsto T * \varphi$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}$ soit continue. Si $\lim T * \varphi_k = T$ pour chaque $T \in \mathcal{H}$ et pour chaque suite $\{\varphi_k\}$ de la forme $\varphi_k = \lambda \sigma_k$, $0 \leq \sigma_k = \check{\sigma}_k \in \mathcal{D}$, $\int \sigma_k \to 1$, supp $\sigma_k \to \{0\}$, λ étant une fonction linéaire arbitraire avec $\lambda(0) = 1$, il en est de même pour chaque fonction $\lambda \in \mathcal{E}$, $\lambda(0) = 1$.

Démonstration. Soit P_i, Q_i $(i = 1,2,\dots,n)$ les projections sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ définie comme suit:

$$\left.\begin{array}{l} P_i\ \varphi(x_1,\dots,x_n) \\ Q_i\ \varphi(x_1,\dots,x_n) \end{array}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\,[\varphi(x_1,\dots,x_n) \pm \varphi(x_1,\dots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\dots,x_n)]\,.$$

Ces projections commutent mutuellement et on a la décomposition de l'identité $I = (P_1 + Q_1) \dots (P_n + Q_n)$. En calculant ce produit, on obtient une somme de termes de la forme $X_1 X_2 \dots X_n$ avec $X_i = P_i$ ou Q_i. La proposition sera alors démontrée si on vérifie la relation

$$\lim T * \varphi\sigma_k = \varphi(0)\cdot T$$

pour $\varphi = X_1 X_2 \dots X_n \lambda$. Si le nombre des Q_i entre les X_i $(i = 1,2,\dots,n)$ est pair, on a $\varphi = \check{\varphi}$. On le voit si on remplace, pour un j, x_j par x_{-j} en laissant fixe les autres x_i, utilisant l'ordre des facteurs $X_1 \dots X_{j-1} X_{j+1} \dots X_n X_j$. De la même raison, si le nombre des Q_i est impair et si Q_j se trouve entre eux, on a $\psi = \check{\psi}$ pour la fonction $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x_j}$. Nous ne nous occuperons que de ce dernier cas, le premier étant analogue:

$\lim T * \varphi\sigma_k = \lim T(x) * (1 + x_j - 1)\ \psi(x)\ \sigma_k(x) = 0 = \varphi(0)T$ (Suivant les hypothèses de la proposition, on a pris une fois $\lambda(x) = 1 + x_j$, l'autre fois $\lambda(x) = 1$. Dans le cas où $\psi(0) = 0$, écrivons $\psi(x) = 1 + [\psi(x) - 1]$.)

<u>Remarque</u>. La supposition λ constante au lieu de λ linéaire ne suffit pas pour obtenir le même résultat, comme le montre l'exemple qui précède le lemme 2 dans [1].

Soit U en ensemble fermé dans $G \times G$. On va appeler l'ensemble U propre si pour chaque compact $K \subset G$, l'ensemble

$$\{(x,y) \in U \; ; \; x \in K \;\; \text{ou} \;\; y \in K\}$$

est compact. Sie $\nu \in \mathcal{E}_{G \times G}$ est à support propre et que $T \in \mathcal{D}'_G$, on peut définir

$$(2) \qquad \int T(t) \, \nu(x,t) \, dt \in (\mathcal{D}'_G)_x$$

comme distribution qui à chaque $\in \mathcal{D}_G$ fait correspondre le nombre

$$\int T(t) \left(\int \nu(x,t) \quad (x) \, dx \right) dt \; ,$$

car

$$\int \nu(x,t) \quad (x) \, dx \in (\mathcal{D}_G)_t \; .$$

La distribution (2) est alors une fonction infinîment différentiable: la valeur dans le point x est donnée également par (2). Si de plus T est à support compact, la distribution (2) l'est aussi.

<u>Supposition 1</u>. Supposons donnée une suite décroissante $\{U_k\}$ ($j = 0,1,2,\ldots$) de voisinages de la diagonale

$\{(x,x)\ ;\ x \in G\}$ dans $G \times G$, U_j fermé et propre pour chaque j , $\bigcap_j U_j = \{(x,x)\ ;\ x \in G\}$. Désignons par $\mathcal{Z}$ l'ensemble des fonctions $\nu \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times G}$ telles que $\operatorname{supp} \nu(x - t,t) \subset U_0 \subset$ $\subset (G)_x \times (G)_t$,

$$(3) \qquad \nu(y,t) = \nu(-y,t)$$

$$(4) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} | D_t^p (y,t) |\, dy \leq b_p M_p(t)$$

$$(5) \qquad (t + y,t) \notin U_j \Longrightarrow | D_y^q D_t^p \nu(y,t)| \leq c_{pqj} M_p(t)$$

pour tous les j , p , $t \in G$, $y \in \mathbb{R}^n$, avec des nombres b_p , c_{pqj} dépendants de ν et avec les fonctions M_p de la supposition 2 de [1]. Disons qu'une suite $\{\nu_k(y,t)\} \subset \mathcal{Z}$ converge vers la distribution $\delta(y) \times 1_t$ dans $\mathcal{Z}$ si l'on a

$\int \nu_k(y,t)dy = 1$ pour chaque $t \in G$,

$$(6) \qquad \int | D_t^p \nu_k(y,t) |\, dy \leq b_p M_p(t)$$

où les nombres b_p ne dépendent pas de k et enfin, à chaque j il y a un k_0 de sorte que $\operatorname{supp} \nu_k(x - t,t) \subset$ $\subset (U_j)_{x,t}$ pour $k \geq k_0$.

Notons que pour $\nu \in \mathcal{Z}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, on a $\nu(y,t)\alpha(t) \in$ $\in (\mathcal{Z})_{yt}$. Ça résulte de [1] (2).

Supposition 2. Soit $\mathcal{H}$ un espace normal de distributions sur un ouvert $G \subset \mathbb{R}^n$; supposons que $\mathcal{A}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ et que l'application $\alpha \longmapsto \alpha T$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ soit continue pour chaque $T \in \mathcal{H}$. Supposons encore que pour chaque distribution $T \in \mathcal{H}$ à support compact et pour chaque suite $\{\varphi_k\}$ de régularisations (définition 1), on ait

$\lim T * \varphi_k = T$ dans $\mathcal{H}$ (on supprime le nombre fini d'indices k pour lesquels on n'a pas $\operatorname{supp} T * \varphi_k \subset G$).

Lemme 1. Soient $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{H}$ des espaces selons les suppositions 1 et 2. Supposons que pour chaque $T \in \mathcal{H}$, $\nu \in \mathcal{Z}$ et $\eta \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times G}$ satisfaisant à

$$(7) \qquad |D_x^q D_t^p \eta(y,t)| \leq a_{pq} M_p(t)$$

pour tous les p , q , $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in G$ (a_{pq} dépendent de η) , on ait

$$(8) \qquad \int T(t) \nu(x-t,t) \eta(x-t,t) dt \in (\mathcal{H})_x \ .$$

Si $\mathcal{W}$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}$ et que $\{a_{pq}\}$, $\{b_p\}$, $\{c_{pqj}\}$ sont des systèmes de nombres positifs, il y a alors un compact $K_0 \subset G$ de sorte que pour toutes les fonctions $\eta \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times G}$, $\nu \in \mathcal{Z}$ satisfaisant à (4), (5), (7) et telles que $\nu(y,t) = 0$ pour $t \in K_0$, on ait

$$\int T(t) \nu(x-t,t) \eta(x-t,t) dt \in (\mathcal{W})_x \ .$$

Démonstration. Supposons le contraire et choississons ([1], supposition 2) une suite $\{\beta_j\} \subset \mathcal{D}$ convergeante vers 1 dans $\mathcal{A}$ et telle que $\beta_{j+1} = 1$ sur le support de β_j . Construisons par récurrence une suite partielle $\{\beta_{j_k}\}$ de la manière suivante. Posons $j_1 = 2$. Si l'assertion du lemme n'est pas vrai, il y a, pour $k \geq 1$, des fonctions $\nu_k \in \mathcal{Z}$, $\eta_k \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times G}$ telles qu'on ait (6),

$$(9) \qquad (t+y,t) \notin U_j \Longrightarrow |D_y^q D_t^p \nu_k(y,t)| \leq c_{pqj} M_p(t) \ ,$$

$$(10) \qquad |D_y^q D_t^r \eta_k(y,t)| \leq a_{pq} M_p(t)$$

pour tous les p, q, j, $y \in R^n$, $t \in G$, $\nu_k(y,t) = 0$ pour $t \in \operatorname{supp} \beta_{j_{k-1}+2}$ et que

$$(11) \qquad \int T(t)\, \nu_k(x-t,t)\, \eta_k(x-t,t)dt \notin (\mathcal{W})_x .$$

Comme le support de $\nu_k(x-t,t)\,\beta_j(x)$ est compact (supposition 1), les applications

$$\alpha \longmapsto \beta_j(x) \int T(t)\, \nu_k(x-t,t)\, \eta_k(x-t,t)\, \alpha(t)dt$$

de $\mathcal{a}$ dans $(\mathcal{H})_x$ sont continues, étant continues même en tant qu'applications de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}$. Alors leur limite simple $(j \longrightarrow \infty)$

$$\alpha \longmapsto \int T(t)\, \nu_k(x-t,t)\, \eta_k(x-t,t)\, \alpha(t)dt$$

est une application continue d'après [1], lemme 1. Ecrivons β_j à la place de α et choisissons un $j_k \geq j_{k-1} + 3$ si grand que (cf. (11))

$$(12) \qquad \int T(t)\, \nu_k(x-t,t)\, \eta_k(x-t,t)\, \beta_{j_k}(t)dt \notin \frac{1}{2}\, (\mathcal{W})_x .$$

Comme les supports de $\nu_k(x-t,t)\, \beta_{j_k}(t)$ sont disjoints, on obtient de [1] (2) que

$$\nu(y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i(y,t)\, \beta_{j_i}(t) \in \mathcal{Z} .$$

De la même raison, la fonction

$$\eta(y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(y,t) \cdot [\beta_{j_i+1}(t) - \beta_{j_{i-1}+2}(t)]$$

satisfait à (7) où on choisit convenablement les a_{pq} . On voit que

$$(13) \qquad \nu(y,t)\,\eta(y,t)\,\beta_{j_k+1}(t) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i(y,t)\,\eta_i(y,t)\,\beta_{j_i}(t) .$$

En désignant

$$T_k(x) = \int T(t)\nu(x-t,t)\,\eta(x-t,t)\,\beta_{j_k+1}(t)dt ,$$

on obtient de (13) et (12) que $T_k - T_{k-1} \notin \frac{1}{2}(\mathcal{W})_x$ pour chaque k . Mais, par contre, on peut prouver comme ci-dessus que l'application

$$\alpha \mapsto \int T(t)\nu(x-t,t)\,\eta(x-t,t)\,\alpha(t)dt$$

de $\mathcal{A}$ dans $(\mathcal{H})_x$ est continue.

Lemme 2. Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'_{R^n}$ un espace satisfaisant à la supposition 2 avec $M_p = 1$ pour tous les p ; supposons que

$$(14) \qquad \int T(t)\,\eta(x-t,t)\,\varphi_k(x-t)dt \in (\mathcal{H})_x$$

et que

$$\lim T * \varphi_k = T$$

dans $\mathcal{H}$ pour chaque $T \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ (cf. la notation et la remarque qui suivent le lemme 2 dans [1]) et pour chaque suite $\{\varphi_k\}$ de régularisations. Si $T \in \mathcal{H}$, $\mathcal{W}$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}$, on peut alors trouver un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ de sorte qu'à chaque $\varepsilon > 0$ il y ait un $\delta > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{r}\eta \in \mathcal{V},\ \sigma = \check{\sigma} \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n},\ \int |\sigma| \leq 1,\\ \operatorname{supp} \sigma \subset \{y \in \mathbb{R}^n ;\ |y| \leq \delta\}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\int T(t)\eta(x-t,t)\sigma(x-t)dt \in \left(\int\sigma\right)\eta(0,x)T(x) + \varepsilon(\mathcal{W})_x$$

<u>Démonstration</u> I. Démontrons d'abord le lemme pour $\varepsilon = 1$ et pour $\sigma \geq 0$. On peut supposer que $\mathcal{W}$ soit convexe et équilibré et que $\int \sigma = 1$. Si l'assertion du lemme n'est pas valable dans ce cas spécial, on peut trouver des suites $\{\eta_m\} \subset \mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ et $\{\sigma_m\} \subset \mathcal{D}$ ($m = 1,2,\ldots$) de manière que $|D^{p,q}\,\eta_m(y,t)| \leq M_p(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^n$, $|y| \leq m$, $|p| \leq m$, $|q| \leq m$, $\sigma_m = \check{\sigma}_m \geq 0$, $\int \sigma_m = 1$, $\operatorname{supp} \sigma_m \subset \{y ;\ |y| \leq \frac{1}{m}\}$ et

$$(15) \qquad \int T(t)\,\eta_m(x-t,t)\,\sigma_m(x-t)dt \notin \eta_m(0,x)T(x) + (\mathcal{W})_x$$

$\{\sigma_m\}$ est alors une suite de régularisations et la suite $\{\eta_m\}$ est bornée dans $\mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$; (15) contredit le théorème dans [1] pour $\mathcal{N} = \mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$.

II. On peut démontrer d'une manière analogue qu'à chaque ensemble $\mathcal{V}$ borné dans $\mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ et à chaque $\varepsilon > 0$, il y a un $\delta > 0$ tel que l'assertion du lemme soit valable pour $\sigma \geq 0$.

III. Supposons toujours $\sigma \geq 0$ et démontrons le lemme pour n'importe quel $\varepsilon > 0$. On peut supposer $\int \sigma = 1$. Soit

$$\mathcal{V}_1 = \{ \eta \in \mathcal{E}(\mathcal{a}_F) \; : \; |D^{q,p}\, \eta\,(y,t)| \leq 1 \text{ pour}$$

$$t \in \mathbf{R}^n, \; |y| \leq m, \; |q| \leq m, \; |p| \leq m \}$$

le voisinage de 0 dans $\mathcal{E}(\mathcal{a}_F)$ que nous venons de trouver pour $\varepsilon = 1$ et posons

$$\mathcal{V} = \{ \eta \in \mathcal{E}(\mathcal{a}_F) \; : \; |D^{q,p}\, \eta(y,t)| \leq 1 \text{ pour}$$

$$t \in \mathbf{R}^n, \; |y| \leq m+2, \; |q| \leq m+1, \; |p| \leq m+1 \}.$$

Choisissons $\beta \in \mathcal{D}_{\{|y| \leq m+2\}}$ et $\varphi \in \mathcal{D}_{\{|y| \leq \min(1, \frac{\varepsilon}{4n})\}}$ de sorte que $\beta(y) = 1$ pour $|y| \leq m+1$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi = 1$. Ecrivons chaque $\eta \in \mathcal{V}$ dans la forme

$$\eta = \eta_0 + (\eta - \eta_0)$$

où

$$\eta_0(y,t) = [\eta\,(y,t)\,\beta\,(y)] * [\varphi(y)\,\varphi(t)] \, .$$

η_0 parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{E}(\mathcal{a}_F)$, $\eta - \eta_0 \in \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{V}_1$; le résultat découle alors de la 1[e] et 2[e] parties de cette démonstration.

IV. On a trouvé un $\sigma > 0$ satisfaisant au lemme sous l'hypothèse $\sigma \geq 0$. On va démontrer le lemme sans cette hypothèse en supposant $\operatorname{supp} \sigma \subset \{|y| \leq \frac{\sigma}{2}\}$. Soit $\{\beta_j\} \subset \mathcal{D}$ une suite convergeante vers 1 dans $\mathcal{a}$. Les applications

$$\sigma \longmapsto \int T(t)\, \beta_j(x)\, \eta\,(x-t,t)\, \sigma\,(x-t)\,dt$$

de $\mathcal{D}_{\{|y| \leq \sigma\}}$ dans $(\mathcal{H})_x$ sont continues étant continues même en tant qu'applications dans $\mathcal{D}$. Alors leur limite simple $(j \to \infty)$ est une application continue de $\mathcal{D}_{\{|y| \leq \sigma\}}$ dans $(\mathcal{H})_x$ (lemme 1 de [1]). Si $\operatorname{supp} \sigma \subset \{|y| \leq \frac{\sigma}{2}\}$, on peut alors trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi = \check{\varphi} \geq 0$, $\int \varphi = 1$, supp $\varphi \subset \{|y| \leq \frac{\sigma}{2}\}$ si proche à la mesure de Dirac qu'on ait

$$(16) \quad \int T(t)\eta(x-t,t)\,[\sigma(x-t) - \sigma^*(x-t)]dt \in$$
$$\in \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{W})_x$$

où $\sigma^* = \sigma * \varphi$. Ecrivons $\sigma = \sigma_+ - \sigma_-$ où $\sigma_+(y) = \max(0, \sigma(y))$ et désignons $\int \sigma_+ = c_1$, $\int \sigma_- = c_2$, $\sigma_1 = \sigma_+ * \varphi$, $\sigma_2 = \sigma_- * \varphi$. Pour $i = 1,2$, on a $\sigma_i \in \mathcal{D}_{\{|y|<\sigma\}}$, $\sigma_i = \check{\sigma}_i \geq 0$, $\int \sigma_i = c_i$, $c_1 + c_2 = \int \sigma$, $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma^*$. Utilisons le lemme pour le cas déjà démontré en y posant $\frac{\sigma_i}{c_i}$ à la place de σ et $\frac{\varepsilon}{2}$ à la place de ε . On obtient

$$\int T(t)\eta(x-t,t)\,\sigma^*(x-t)dt \in \left(\int \sigma\right)\eta(0,x)T(x) +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{W})_x \ .$$

Avec (16), ça donne l'assertion du lemme.

<u>Corollaire</u>. Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}_G$ un espace satisfaisant à la supposition 2. Si $T \in \mathcal{H}$, $\mathcal{W}$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}$, K un compact dans G , on peut alors trouver un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times G}$ de sorte qu' à chaque $\varepsilon > 0$ il y ait un $\sigma > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{l}\eta\in\mathcal{V},\ \operatorname{supp}\eta\subset\mathbb{R}^m\times K,\ \sigma=\check{\sigma}\in\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n},\\ \int|\sigma|\leq 1,\ \operatorname{supp}\sigma\subset\{y\in\mathbb{R}^n;\ |y|<\delta\}\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\int T(t)\eta(x-t,t)\sigma(x-t)dt\in\left(\int\sigma\right)\eta(0,x)T(x)+\varepsilon(\mathcal{W})_x\ .$$

Démonstration. On peut supposer que $\operatorname{supp} T$ soit compact, car l'assertion du corollaire ne se change pas si on remplace T par αT avec $\alpha\in\mathcal{D}_G$, $\alpha=1$ sur K. Choisissons un compact K_0 pour que $K\cup\operatorname{supp} T\subset\operatorname{int}K_0\subset K_0\subset G$, désignons par $\mathcal{H}_0$ l'espace des distributions $S\in\mathcal{H}$ avec $\operatorname{supp} S\subset K_0$, considérées comme distributions définies sur $\mathbb{R}^n$, munissons $\mathcal{H}_0$ de la topologie induite par $\mathcal{H}$ et posons $\mathcal{H}^*=\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}\cup\mathcal{H}_0$ avec la topologie la plus fine pour que les immertions $\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{H}^*$, $\mathcal{H}_0\longrightarrow\mathcal{H}^*$ soient continues. La nouvelle topologie coïncide sur $\mathcal{H}_0$ avec la topologie initiale. Désignons par $\mathcal{V}^*$ un voisinage dans $\mathcal{E}(\mathcal{Q}_F)$ obtenu à l'aide du lemme 2 appliqué à l'espace $\mathcal{H}^*$. Cherchons $\delta<\Delta$ où $\Delta>0$ est si petit que l'ensemble

$$L=\{(x,t)\ ;\ t\in K_0\ ,\ |x-t|\leq\Delta\}\subset G\times G\ .$$

Choisissons $\varphi\in\mathcal{D}_{G\times G}$, $\varphi=1$ sur L. L'assertion du corollaire ne se change pas si on remplace $\eta(x-t,t)$ par $\eta(x-t,t)\varphi(x,t)$. Le résultat est alors une conséquence du lemme 2 si l'on pose

$$\mathcal{V}=\{\eta\in\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n\times G}\ ;\ \eta(y,t)\varphi(t+y,t)\in(\mathcal{V}^*)_{y,t}\}\ .$$

Théorème. Soient $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{H}$ des espaces selon les supposition 1 et 2 . Supposons que (8) soit rempli pour chaque

$T \in \mathcal{H}$, $\nu \in \mathcal{Z}$ et $\eta \in \mathcal{E}_{R^n \times G}$ remplissant (7). Si $T \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{E}_{R^n \times G}$ une fonction remplissant (7) et que $\{\nu_k(y,t)\}$ converge vers $\delta(y) \times 1_t$ dans le sens de la supposition 1, on a alors

$$(17) \quad \lim_{k \to \infty} \int T(t)\eta(x-t,t)\,\nu_k(x-t,t)dt = \\ = \eta(0,x)T(x) \ .$$

Etant donnés des nombres a_{pq} , la limite est uniforme par rapport à η si η parcourt l'ensemble des fonctions remplissant (7).

Remarque. Si l'on prenait les suites de régularisations d'après la remarque qui suit la définition 1, on ommet l'hypothèse (3) dans la définition de $\mathcal{Z}$ et le théorème reste valable.

Démonstration. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}$. Choisissons une suite $\{\beta_j\} \subset \mathcal{D}_G$ convergeante vers 1 dans $\mathcal{a}$ de manière qu' à chaque compact $K \subset G$ on ait $\beta_j = 1$ sur K sauf un nombre fini de j ([1], supposition 2). Pour la suite $\{\nu_k\}$ on peut trouver des nombres c_{pqj} indépendents de k de sorte que (9) soit satisfait, car d'après la définition de la convergence dans $\mathcal{Z}$ (supposition 1), on a $\nu_k(y,t) = 0$ pour $(t+y,t) \notin U_j$ sauf un nombre fini de fonctions ν_k . Alors, il résulte du lemme 1 que pour un j_0 , pour tous les k et pour tous les η remplissant (7), on a

$$\int T(t)\eta(x-t,t)\,[1-\beta_{j_0}(t)]\,\nu_k(x-t,t)dt \in (\mathcal{W})_x \ .$$

D'après [1], corollaire du lemme 1, on peut trouver l'indice

j_0 en même temps si grand que

$$\eta(0,x)T(x)\,[1 - \beta_{j_0}(x)] \in (\mathcal{W})_x$$

pour tous les η remplissant (7). On voit de ces deux relations qu'il suffit de démontrer le théorème pour les fonctions $\eta(y,t)\,\beta_{j_0}(t)$ (j_0 fixe) à la place de $\eta(y,t)$. Il suffit donc de se borner pour le reste de la démonstration aux fonctions $\eta(y,t)$ avec

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{supp} \eta \subset \mathbb{R}^n \times K$$

pour un compact $K \subset G$.

Soit $\mathcal{W}$ un voisinage convexe et équilibré de 0 dans $\mathcal{H}$. Considérons chaque fonction $\nu_k(y,t)$ comme élément de $\mathcal{E}_G(\mathcal{L}_1)$ qui à chaque $t \in G$ fait correspondre la fonction $y \longmapsto \nu_k(y,t)$, élément de $\mathcal{L}_1$. D'après [3], II, § 3, no 3, exemple 1, p.80, $\mathcal{E}(\mathcal{L}_1)$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel inductif complet $\mathcal{L}_1 \hat{\otimes} \mathcal{E}_G$. Trouvons un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times G}$ selon le corollaire du lemme 2 et un voisinage convexe et équilibré $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{E}_G$ de sorte que

$$\text{(19)} \qquad \eta(y,t)\,\alpha(t) \in \mathcal{V}$$

pour chaque $\alpha \in \mathcal{U}$ et $\eta(y,t) \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times G}$ satisfaisant à (7) et (18). Désignons par $\mathcal{B}$ la boule unité de $\mathcal{L}_1$. Choisissons une fonction $\beta \in \mathcal{D}_G$, $\beta = 1$ sur K . Comme $\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{U}$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{E}(\mathcal{L}_1)$ et que les fonctions $\nu_k(y,t)\beta(t)$ forment un ensemble borné dans $\mathcal{E}(\mathcal{L}_1)$ (cf. (6)), il y a alors un $c > 0$ pour que

$$(20) \qquad \nu_k(y,t)\,\beta(t) \in c(\mathcal{B})_y \,\hat{\otimes}\, (\mathcal{U})_t \,.$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2c}$ et trouvons $\delta > 0$ d'après le corollaire du lemme 2. Supposons que δ est choisi si petit que $\delta < 1$ et que

$$\{(x,t)\ ;\ t \in \operatorname{supp}\beta\ ,\ |x - t| \leq \delta\} \subset G \times G \,.$$

Montrons qu'on peut trouver un k_0 de sorte que

$$k \geq k_0\ ,\quad t \in \operatorname{supp}\beta\ ,\ |x - t| \geq \delta$$
$$\Longrightarrow \nu_k(x - t,t) = 0 \,.$$

En effet, les ensembles

$$\{(x,t)\ ;\ t \in \operatorname{supp}\beta\ ,\ |x - t| \geq \delta,\ (x,t) \in U_j\}$$

$(j = 0,1,2,\ldots)$ forment une suite décroissante de compacts dont l'intersection est vide (supposition 1: convergence dans $\mathcal{Z}$), d'où le résultat. On se borne aux $k \geq k_0$. On a alors

$$\nu_k(y,t)\,\beta(t) \in \mathcal{D}_{\{|y| \leq \delta\} \times \operatorname{supp}\beta} = \mathcal{D}_{\{|y| \leq \delta\}} \,\hat{\otimes}\, \mathcal{D}_{\operatorname{supp}\beta} \,.$$

Comme les espaces $\mathcal{D}_{\{|y| \leq \delta\}}$ et $\mathcal{D}_{\operatorname{supp}\beta}$ sont à base dénombrable de voisinages de 0 , il s'ensuit de (20) qu'il y a des fonctions $\sigma_{ki} \in \mathcal{D}_{\{|y| \leq \delta\}}$, $\alpha_{ki} \in \mathcal{D}_{\operatorname{supp}\beta}$ $(k \geq k_0\ ,\ i = 1,2,\ldots\ )$ de sorte que

$$(21) \qquad \nu_k(y,t)\,\beta(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ki}(y)\,\alpha_{ki}(t)\ ,$$

$\sum_i \int |\sigma_{ki}| \leq 1$, $\alpha_{ki} \in 2c\,\mathcal{U}$ et que la série dans (21) converge dans l'espace $(\mathcal{D})_{yt}$. Il s'ensuit de ces relations et de (18) que

$$(22)\quad \eta(y,t)\,\nu_k(y,t) = \eta(y,t)\,\nu_k(y,t)\,\beta(t)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \eta(y,t)\,\alpha_{ki}(t)\,\sigma_{ki}(y)$$

où $\eta(y,t)\,\alpha_{ki}(t) \in 2c\,\mathcal{V}$ grâce à (19). Alors, si on applique le corollaire du lemme 2 aux fonctions

$\frac{1}{2c}\,\eta(y,t)\,\alpha_{ki}(t)$ à la place de $\eta(y,t)$, $\frac{\sigma_{ki}}{\int|\sigma_{ki}|}$ à la place de σ , $\varepsilon = \frac{1}{2c}$, on obtient d'abord

$$\int T(t)\,\eta(x-t,t)\,\alpha_{ki}(t)\,\sigma_{ki}(x-t)dt$$
$$\in \left(\int \sigma_{ki}\right)\eta(0,x)\,\alpha_{ki}(x)T(x) + \int|\sigma_{ki}|\,.\,(\mathcal{W})_x$$

et après la sommation grâce à (21), (22),

$$\int T(t)\,\eta(x-t,t)\,\nu_k(x-t,t)dt$$
$$\in \eta(0,x)\int \nu_k(z,x)\,\beta(x)dz\cdot T(x) + (\mathcal{W})_x\ .$$

Enfin, $\int \nu_k(z,x)dz = 1$, d'où résulte le théorème.

__Proposition 2.__ Supposons que $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'_{\mathbb{R}^n}$ soit un espace quasi-complet satisfaisant à la supposition 2 avec $M_p = 1$. Supposons de plus que pour chaque $T \in \mathcal{H}$ et pour chaque suite $\{\varphi_k\}$ de régularisations, on ait $\lim T*\varphi_k = T$ dans $\mathcal{H}$. Choisissons $a > 0$. Alors, l'hypothèse (8) du théorème est remplie si on pose dans la supposition 1

$$U_j = \{(x,t) ; |x - t| \leq \frac{1}{j + a^{-1}}\} \qquad (j = 0,1,2,\ldots).$$

<u>Démonstration</u>. Notons d'abord que l'hypothèse (14) du lemme 2 est remplie comme le montre la remarque qui précède le théorème dans [1]. Il en résulte qu'on a aussi

$$(23) \qquad \int T(t)\,\eta(x - t,t)dt \in (\mathcal{H})_x$$

pour $T \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$, supp $\eta \subset \{(y,t) ; |y| \leq a\}$, $a > 0$. Soit $T \in \mathcal{H}$, $\nu \in \mathcal{X}$, η satisfaisant à (7); choisissons $\varphi \in \mathcal{D}_{R^n}$ de sorte que $\varphi(y) = 1$ pour $|y| \leq 1$, $\varphi = \check{\varphi}$, $\varphi \geq 0$ et désignons $\nu(y,t)[1 - \varphi(jy)]$ par $\nu_j(y,t)$ $(j = 1,2,\ldots)$. D'après (5) et (23), on a

$$T_j(x) = \int T(t)\,\eta(x - t,t)\,\nu_j(x - t,t)dt \in (\mathcal{H})_x .$$

Evidemment

$$\lim_{j \to \infty} T_j(x) = \int T(t)\,\eta(x - t,t)\,\nu(x - t,t)dt$$

dans $\mathcal{D}'_G$. Alors, il suffit de démontrer que $\{T_j\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}$. Considérons chaque $\nu(y,t) \in (\mathcal{X})_{yt}$ comme élément de $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}_F)$ qui à chaque y fait correspondre la fonction $t \mapsto \nu(y,t)$, élément de $\mathcal{A}_F$. $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}_F)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}_1 \hat{\otimes} \mathcal{A}_F$ ([3],I, § 2,no 2, p. 59, Th.2). Soit $\mathcal{W}$ un voisinage convexe et équilibré de 0 dans $\mathcal{H}$. Trouvons un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ selon le lemme 2 et un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{A}_F$ de sorte que

$$(24) \qquad \eta(y,t)\cdot\alpha(t) \in \mathcal{V}$$

pour chaque $\alpha \in \mathcal{U}$. Désignons par $\mathcal{B}$ la boule unité de $\mathcal{L}_1$. Comme $\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{U}$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}_F)$ et que les fonctions

$$\nu_j(y,t) - \nu_k(y,t) = \nu(y,t)\cdot[\varphi(ky) - \varphi(jy)]$$

$(j, k = 1,2,\ldots)$ forment un ensemble borné dans $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}_F)$ (cf. (4)), il y a alors un $c>0$ pour que

$$\nu_j - \nu_k \in c\cdot\mathcal{B}\hat{\otimes}\mathcal{U}$$

pour tous les j , k . Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2c}$ et trouvons $\delta > 0$ d'après le lemme 2. Pour les j , k suffisamment grands, on a

$$\operatorname{supp}(\nu_j - \nu_k) \subset \{(y,t)\ ;\ |y| \leq \delta\}\ .$$

Alors $\nu_j - \nu_k \in \mathcal{D}_{\{|y|\leq\delta\}}(\mathcal{A}_F) = \mathcal{D}_{\{|y|\leq\delta\}} \hat{\otimes} \mathcal{A}_F$ et on a la décomposition analogue à (21)

$$\nu_j(y,t) - \nu_k(y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{jki}(y)\,\alpha_{jki}(t)$$

où la série converge dans $\mathcal{D}_{\{|y|\leq\delta\}} \hat{\otimes} \mathcal{A}_F$. On va finir la démonstration comme celle du théorème ((24) remplace (19)). En appliquant le lemme 2, on obtient ainsi

$$T_j(x) - T_k(x) = \int T(t)\eta(x-t,t)\,[\nu_j(x-t) - \nu_k(x-t,t)]\,dt$$

$$\in \eta(0,x)\int[\nu_j(z,x) - \nu_k(z,x)]\,dz\cdot T(x) + (\mathcal{W})_x\ .$$

D'après (4), les fonctions $\int[\nu_j(z,x) - \nu_k(z,x)]\,dz$ forment un ensemble borné dans $\mathcal{A}$. Ils convergent évidemment vers 0 dans $\mathcal{A}$, d'où résulte la proposition.

Bibliographie

[1] J. JELÍNEK: Sur des propriétés d'approximation des espaces de distributions, I, Comment. Math. Univ. Carolinae 15(1974), 745-764.

[2] L. SCHWARTZ: Théorie des distributions, Hermann, Paris 1957.

[3] A. GROTHENDIECK: Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires, Mémoirs A.M.S. 16(1955).

Matematicko-fyzikální fakulta

Universita Karlova

Sokolovská 83, 18600 Praha 8

Československo

(Oblatum 24.10.1975)