COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

17,1 (1976)

# О КОНСТРУКТИВНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ДАНЖУА-ЯНГА О ПРОИЗВОДНЫХ ЧИСЛАХ

О. ДЕМУТ ( O. DEMUTH), Прага

Содержание: Пусть $\mathcal{F}$ всюду на конструктивных действительных числах определенная конструктивная функция и пусть для всякого псевдочисла $\xi$ выражение $\mathcal{P}(\mathcal{F},\xi)$ значит: не может не быть или нижнее производное число $\mathcal{F}$ в точке $\xi$ равно $-\infty$ и верхнее производное число $\mathcal{F}$ в $\xi$ равно $+\infty$ или $\mathcal{F}$ конечно псевдодифференцируема в точке $\xi$. Тогда, как доказано в настоящей заметке, а) для почти всех псевдочисел $\xi$ верно $\mathcal{P}(\mathcal{F},\xi)$ и б) если $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна, то для всех $\Pi_2$-чисел $\xi$ выполнено $\mathcal{P}(\mathcal{F},\xi)$. (Ср. [1], стр. 271 .)

Ключевые слова: Конструктивная функция, псевдочисла, дифференцируемость, производные числа.

AMS: Primary 02E99 Ref. Ž.: 2.644.2
Secondary: 26A24

---

В следующем мы пользуемся без ссылок определениями и обозначениями из [2] и [3]. В отличие от [2] мы для всяких РЧ $a$ и $b$ обозначим

$$[\![ a, b ]\!] \rightleftharpoons \min(a,b) \,\Delta\, \max(a,b) \, .$$

Определения. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а P слово, которое является или КДЧ или ПЧ.

а) Мы обозначим

$$\overline{\mathrm{D}}_{\kappa\lambda}(+\infty,\mathcal{F},\mathrm{P}) \rightleftharpoons \forall k \neg\neg \exists a b \left( a < \mathrm{P} < b \;\&\; b - a < \frac{1}{2^k} \;\&\; \frac{\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)}{b \dot{-} a} > k \right)$$

и $\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, P) \neq \overline{D}_{кл}(+\infty, -\mathcal{F}, P)$ .

б) Если $\overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, P)$ (соотв. $\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, P)$ ), то мы скажем, что $+\infty$ (соотв. $-\infty$ ) является верхним (соотв. нижним) прозводным числом функции $\mathcal{F}$ в $P$ .

<u>Обозначение</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, а $\{x_k\}_k$ последовательность КДЧ. Тогда мы обозначим $\mathfrak{X}_1^D(\mathcal{F}, \{x_k\}_k)$ , если верно $\mathfrak{X}^D(\mathcal{F}, \{x_k\}_k)$ (см.[3], стр. 586) и для всяких РЧ $a_0$, $a_1$, $b$ и $c$, $a_0 < b < c < a_1$ , последовательность $\{x_k\}_k$ не может не содержать члены равные супремуму и инфимуму множеств

$$\wedge y(\exists d(b \leq d \leq c \,\&\, \frac{\mathcal{F}(d) - j\cdot \mathcal{F}(a_i)}{d - a_i} = y)) ,$$

где $0 \leq i \leq 1 \,\&\, 0 \leq j \leq 1$ .

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда существуют последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ такая, что $\mathfrak{X}_1^D(\mathcal{F}, \{x_k\}_k)$, и алгорифм $\mathfrak{R}$ , для которого для всяких КДЧ $x$ , ЦЧ $i$ , рационального сегмента $b \vartriangle c$ , РЧ $e$ , $0 \leq i \leq 1 \,\&\, 0 < (-1)^i \cdot x \,\&\, \neg \exists k(x = x_k) \,\&\, (e < b \vee c < e)$, и слова $P$ , $P \rightleftharpoons i \square x \square e \square b \vartriangle c$ ,верно

$$!\,\mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner,\ \mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda \text{ или } \mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner \text{ КДЧ},$$

$$(\mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda \equiv \neg \exists d(b \leq d \leq c \,\&\, \frac{\mathcal{F}(d)}{d-e} \cdot (-1)^i > x \cdot (-1)^i)) \,\&\, (\neg(\mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda) \supset$$

$$\supset \forall a(0 < (b - e)\cdot(e - a) \supset (\exists d(\frac{\mathcal{F}(d)}{d-a} \cdot (-1)^i > x \cdot (-1)^i \,\&$$

$$\& \, b \leq d \leq c) \equiv a \in \min(e, \mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner) \vartriangle \max(e, \mathfrak{R}\llcorner P \lrcorner)))) .$$

При помощи рассуждений, использованных в доказательствах теоремы 7 из [2] и леммы 4 из [3] легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $\{x_k\}_k$ последовательность КДЧ, $*$ один из знаков $<$ и $>$, а $w_0$ и $w_1$ КДЧ такие, что

$$\mathfrak{Z}_1^D(\mathcal{F},\{x_k\}_k) \,\&\, \neg\exists k(w_0 = x_k \vee w_1 = x_k) \,\&\, (\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0)) * w_0 * w_1 .$$

Тогда существует р.п. множество НЧ $C$ такое, что

$$\mathcal{K}(C) \,\&\, \forall \ell(\ell \in C \supset w_0 \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner| * \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)) \,\&\, \forall a b(0 < a < b < 1 \,\&\,$$
$$w_0 \cdot |a \vartriangle b| * \Delta(\mathcal{F}, a \vartriangle b) \supset \exists \ell(\ell \in C \,\&\, \frac{1}{2} \cdot |a \vartriangle b| \leq |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner| \,\&\,$$
$$\neg(a \vartriangle b \cap \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner = \emptyset))) \,\&\, \forall x y(0 \leq x < y \leq 1 \supset \Delta([\mathcal{F}, C], x \vartriangle y) *$$
$$w_1 (y - x)) .$$

(Определение $[\mathcal{F}, C]$ см. в [3], стр. 585 .)

<u>Определние</u>. Мы скажем, что последовательность рациональных сегментов $\{R_k\}_k$ соответствует р.п. множеству рациональных сегментов $\mathcal{N}$, если а) всякий сегмент последоватеьности $\{R_k\}_k$ содержится в объединении конечного числа сегментов из $\mathcal{N}$ и б) всякий сегмент из $\mathcal{N}$ содержится в объединении конечного числа сегментов последовательности $\{R_k\}_k$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\tau}$, $\{b_i\}_{i=1}^{\tau}$ и $\{c_i\}_{i=1}^{\tau}$ системы РЧ, а $r_1$, $r_2$, $r_3$ и $\alpha$ РЧ такие, что

$$\forall i\,(1 \leq i \leq \tau \supset |\llbracket a_i, c_i \rrbracket| \leq \alpha \cdot |\llbracket a_i, b_i \rrbracket|) \,\&\,$$
$$\&\, \mathfrak{M}(r_1, \bigcup_{i=1}^{\tau} \llbracket a_i, b_i \rrbracket) \,\&\, \mathfrak{M}(r_2, \bigcup_{i=1}^{\tau} \llbracket a_i, c_i \rrbracket) \,\&\,$$
$$\&\, \mathfrak{M}(r_3, \bigcup_{i=1}^{\tau} \llbracket a_i, c_i \rrbracket \setminus \bigcup_{j=1}^{\tau} \llbracket a_j, b_j \rrbracket) .$$

Тогда $r_2 \leq (2\alpha + 1) \cdot r_1 \,\&\, r_3 \leq 2\alpha \cdot r_1$ .

<u>Замечание 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, $C$ р.п. множество НЧ,

и $\xi$ ПЧ такие, что $\mathscr{K}(C)\ \&\ \forall x(|\mathscr{F}(x)|>0\supset\exists\ell(\ell\in C\ \&$ $x\in(\mathscr{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)^\circ))\ \&\ \neg\exists\ell(\ell\in C\ \&\ \xi\in\mathscr{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)$.

Тогда если для РЧ $a$ и $b$ и КДЧ $\varkappa$ верно $a<\xi<b\ \&\ \Delta(\mathscr{F},$ $a\vartriangle b)>\varkappa\cdot|a\vartriangle b|$, то не могут не существовать РЧ $a_1$ и $b_1$ такие, что $a\le a_1<\xi<b_1\le b\ \&\ \Delta(\mathscr{F},a_1\vartriangle b_1)>\varkappa\cdot|a_1\vartriangle b_1|\ \&$ $\neg\exists\ell k(\ell\in C\ \&\ k\in C\ \&\ a_1\in(\mathscr{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)^\circ\ \&\ b_1\in(\mathscr{L}_\llcorner k_\lrcorner)^\circ)$.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $\mathscr{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда для всех $\Pi_2$-чисел $\xi$ верно

$$\neg\neg(\underline{D}_{\text{кл}}(-\infty,\mathscr{F},\xi)\ \&\ \overline{D}_{\text{кл}}(+\infty,\mathscr{F},\xi)\vee D_{\text{кл}}(\mathscr{F},\xi))\ .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{\varkappa_k\}_k$ последовательность КДЧ такая, что $\mathscr{Z}_1^D(\mathscr{F},\{\varkappa_k\}_k)$ (см. лемму 1). Мы построим КДЧ $v$, $|\mathscr{F}(1)-\mathscr{F}(0)|<v\ \&\ \neg\exists k\ (v=\varkappa_k)$, и для всяких НЧ $t$ и ЦЧ $i$, $0\le i\le 1$, согласно лемме 2 р.п. множество НЧ $C_{i,t}$ такое, что

$$\mathscr{K}(C_{i,t})\ \&\ \forall\ell(\ell\in C_{i,t}\supset t\cdot v\cdot|\mathscr{L}_\llcorner\ell_\lrcorner|<\Delta(\mathscr{F},\mathscr{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)\cdot(-1)^i)\ \&$$
$$\forall ab(0<a<b<1\ \&\ t\cdot v\cdot|a\vartriangle b|<\Delta(\mathscr{F},a\vartriangle b)\cdot(-1)^i\supset\exists\ell(\ell\in C_{i,t}\ \&$$
$$\frac{1}{2}\cdot|a\vartriangle b|\le|\mathscr{L}_\llcorner\ell_\lrcorner|\ \&\ \neg(a\vartriangle b\cap\mathscr{L}_\llcorner\ell_\lrcorner=\emptyset)))\ \&\ \forall xy(0\le x<y\le 1\supset$$
$$\Delta([\mathscr{F},C_{i,t}],x\vartriangle y)\cdot(-1)^i<t\cdot v\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(y-x))$$

и, следовательно, ввиду следствия 2 теоремы 5 из [2]

$$\forall\xi(\xi\in\Pi_2\ \&\ \forall m\neg\neg\exists ab(a<\xi<b\ \&\ b-a<\frac{1}{2^m}\ \&\ t\cdot v\cdot|a\vartriangle b|<$$
$$\Delta(\mathscr{F},a\vartriangle b)\cdot(-1)^i)\supset\neg\neg\exists\ell\ (\ell\in C_{i,t}\ \&\ \xi\in\mathscr{L}_\llcorner\ell_\lrcorner))\ .$$

Для всяких НЧ $t$ и ЦЧ $i$, $0\le i\le 1$, мы обозначим $\mathscr{F}_{i,t}\rightleftharpoons\mathscr{F}-[\mathscr{F},C_{i,t}]$ и заметим, что $[\mathscr{F},C_{i,t}]$ функция слабо ограниченной вариации, которая равномерно непрерывна,

$$(1)\quad \forall m\left(\sum_{j=1}^{2^m}\left|\Delta\left([\mathcal{F},C_{i,t}],\ \frac{j-1}{2^m}\vartriangle\frac{j}{2^m}\right)\right|<3\cdot t\cdot v+v\right)$$

и согласно теореме 3 из [3] верно $\forall\xi(\xi\in\Pi_2\supset D_{кл}([\mathcal{F},C_{i,t}],\xi))$.

Ввиду сказанного и леммы 2 из [3] ясно, что $\forall i\,\xi(0\le i\le 1\,\&\,\xi\in\Pi_2\supset(\overline{D}_{кл}(+\infty,(-1)^i\cdot\mathcal{F},\xi)\equiv\forall t\neg\neg\exists\ell(\ell\in C_{i,t}\,\&\,\xi\in\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)))$ и для всяких НЧ $t_0$ и $t_1$ верно $\forall\xi(\xi\in\Pi_2\,\&\,\neg\exists\ell(\ell\in(C_{0,t_0}\cup C_{1,t_1})\,\&\,\xi\in\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)\supset\sigma_{[\mathcal{F},C_{0,t_0}]}(\xi)=\sigma_{[\mathcal{F},C_{1,t_1}]}(\xi)\,\&$

$D_{кл}(0,[\mathcal{F},C_{0,t_0}]-[\mathcal{F},C_{1,t_1}],\xi)\,\&\,(\neg(\xi\in 0\vartriangle 1)\supset D_{кл}(0,\mathcal{F},\xi)))$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что для всяких НЧ $t$, ЦЧ $i$, $0\le i\le 1$, и $\Pi_2$Ч $\xi$, $\xi\in 0\vartriangle 1\,\&\,\neg\exists\ell(\ell\in C_{i,t}\,\&\,\xi\in\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)$, выполнено

$$\forall k\neg\neg\exists m\,\forall a\,b\left(a<\xi<b\,\&\,b-a<\frac{1}{2^m}\supset\right.$$

$$\left.\supset\Delta(\mathcal{F}_{i,t},a\vartriangle b)\cdot(-1)^i<\frac{1}{2^k}\cdot|a\vartriangle b|\right)\&\,\neg\underline{D}_{кл}(-\infty,(-1)^i\cdot\mathcal{F}_{i,t},\xi).$$

Не теряя общности мы можем ограничиться исследованием функций $\mathcal{F}_{0,t}$, $1\le t$.

Пусть $t$ НЧ, а $\xi$ $\Pi_2$Ч, $\xi\in 0\vartriangle 1\,\&\,\neg\exists\ell(\ell\in C_{0,t}\,\&\,\xi\in\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)$.

I) Мы построим последовательность КДЧ $\{x_k^t\}_k$, КДЧ $w_0$ и для всякого НЧ $\sigma$ согласно лемме 2 р.п. множество НЧ $D_\sigma$ такие, что

$$\mathfrak{X}_1^D([\mathcal{F},C_{0,t}],\{x_k^t\}_k)\,\&\,4\cdot v\cdot t<w_0\,\&\,\neg\exists k(w_0=x_k^t)\,\&\,\mathcal{H}(D_\sigma)\,\&$$

$$(2)\quad \forall\ell(\ell\in D_\sigma\supset\Delta([\mathcal{F},C_{0,t}],\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner)<-2^\sigma\cdot w_0\cdot|\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner|)\,\&$$

$$\forall a\,b(0<a<b<1\,\&\,\Delta([\mathcal{F},C_{0,t}],a\vartriangle b)<-2^\sigma\cdot w_0\cdot|a\vartriangle b|\supset$$

$$\exists\ell(\ell\in D_\sigma\,\&\,\tfrac{1}{2}\cdot|a\vartriangle b|\le|\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner|\,\&\,\neg(a\vartriangle b\cap\mathcal{L}_\llcorner\ell_\lrcorner=\emptyset)))$$

и, следовательно, ввиду (1) верно

$$\forall p\,(\sum_{\ell\in(D_6)^{(p)}} |\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}| < \frac{1}{2^6})\,.$$

Согласно следствию 2 теоремы 5 из [2] не могут не существовать НЧ $\sigma_0$ и для всякого НЧ $q$ нат. числа $\ell_0$ и $m_0$ такие, что

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned}&\neg\exists\ell(\ell\in D_{\sigma_0}\,\&\,\xi\in\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})\,\&\,\neg\exists\ell(\ell_0<\ell\,\&\,\ell\in(C_{0,t}\cup D_{\sigma_0})\,\&\,\xi\in\\&(\mathcal{E}_{\lambda}(\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})-2^{q+4}\cdot|\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}|)\,\Delta\,(\mathcal{E}_{n}(\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})+2^{q+4}\cdot|\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}|))\,\&\\&\frac{1}{2^{m_0}}<\xi<1-\frac{1}{2^{m_0}}\,\&\,\forall\ell(\ell\le\ell_0\,\&\,\ell\in(C_{0,t}\cup D_{\sigma_0})\supset\\&\frac{1}{2^{m_0}}<\min(|\xi-\mathcal{E}_{\lambda}(\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})|,\,|\xi-\mathcal{E}_{n}(\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner})|))\,.\end{aligned}$$

Пусть $\sigma_0$, $q$, $\ell_0$ и $m_0$ НЧ такие, что (3).

Пусть $a\Delta b$ рациональный сегмент,

$$0<a<b<1\,\&\,\Delta(\mathcal{F}_{0,t},a\Delta b)>\frac{1}{2^q}\cdot(w_0\cdot 2^{\sigma_0}+v\cdot t)\cdot|a\Delta b|\,.$$

Тогда ввиду свойств множества $C_{0,t}$ и (2) выполнено

$$\exists\ell(\ell\in(C_{0,t}\cup D_{\sigma_0})\,\&\,|a\Delta b|\le 2^{q+3}\cdot|\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}|\,\&\,\neg(a\Delta b\cap\mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}=\emptyset))\,.$$

Ввиду этого и (3) видно, что

$$\begin{aligned}\forall ab\,(a<\xi<b\,\&\,b-a<\frac{1}{2^{m_0}}\supset\Delta(\mathcal{F}_{0,t},a\Delta b)\le\\ \le\frac{1}{2^q}\cdot(w_0\cdot 2^{\sigma_0}+v\cdot t)\cdot|a\Delta b|)\,.\end{aligned}$$

II ) Согласно лемме 1 мы для функции $\mathcal{F}_{0,t}$ построим последовательность КДЧ $\{x_k^0\}_k$, алгорифм $\mathfrak{R}$ и КДЧ $x$ такие, что $\mathfrak{X}_1^D(\mathcal{F}_{0,t},\{x_k^0\}_k)\,\&\,0<x\,\&\,\neg\exists k(x=x_k^0)$ и алгорифм $\mathfrak{R}$ обладает свойствами описанными в названной лемме.

Ввиду I и следствия 2 теоремы 5 из [2] не могут не существовать НЧ $m_0$ и $\ell_0$ такие, что

$$\forall a b (a < \xi < b \,\&\, (b - a) < \frac{1}{2^{m_0}} \supset 0 < a < b < 1 \,\&\, \Delta(\mathcal{F}_{0,t}, a \Delta b) <$$

(4) $$z \cdot |a \Delta b|) \,\&\, \forall \ell (\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in C_{0,t} \supset \neg(\xi \in (\Im_n(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) - 2 \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner|) \Delta$$

$$\Delta (\Im_n(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) + 2 \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner|)) \,\&\, \frac{1}{z} \cdot \langle \omega, \mathcal{F}_{0,t} \rangle_\llcorner \mathcal{L}_\llcorner \ell_{\lrcorner\lrcorner} +$$

$$+ 5 \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner| < \frac{1}{2^{m_0+1}}) .$$

Пусть $m_0$ и $\ell_0$ НЧ такие, что (4).

1) Пусть $k$ НЧ .

а) Мы построим алгорифм $\mathfrak{A}$, $\forall \ell ((!\mathfrak{A}_\llcorner \ell_\lrcorner \equiv (\ell_0 < \ell \,\&$ $\& \, \ell \in C_{0,t})) \,\&\, \forall i (!\mathfrak{A}_\llcorner \ell i_\lrcorner \equiv (!\mathfrak{A}_\llcorner \ell_\lrcorner \,\&\, 0 \le i \le 4)))$ ,

обладающий свойствами описанными ниже.

Пусть $\ell$ НЧ, $\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in C_{0,t}$ . Мы обозначим для ЦЧ $i$ и $j$, $0 \le i \le 1 \,\&\, 0 \le j \le 1$ ,

$$a_j^\ell \rightleftharpoons \Im_n(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) - (2 + j) \cdot (-1)^j \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner|$$

и

$$P_{i,j}^\ell \rightleftharpoons \mathcal{R}_\llcorner i \,\square\, (-1)^i \cdot 2^{i \cdot (k+3)} \cdot z \,\square\, a_j^\ell \,\square\, \mathcal{L}_\llcorner \ell_{\lrcorner\lrcorner} .$$

$\alpha$) Пусть $j$ ЦЧ, $0 \le j \le 1$ .

Если $P_{1,j}^\ell \cong \Lambda$ , то мы определим $c_j^\ell \rightleftharpoons a_j^\ell$ и $d_{1-j}^\ell \rightleftharpoons a_{1-j}^\ell$ .

Пусть $\neg(P_{1,j}^\ell \cong \Lambda)$ . Тогда $\neg(P_{0,1-j}^\ell \cong \Lambda)$ и $|P_{1,j}^\ell - a_j^\ell| <$ $\frac{1}{2^{k+3}} \cdot |P_{0,1-j}^\ell - a_{1-j}^\ell|$ . Мы построим РЧ $c_j^\ell$ и $d_{1-j}^\ell$ , для которых верно $0 < (c_j^\ell - P_{1,j}^\ell) \cdot (P_{1,j}^\ell - a_j^\ell) \,\&\, 0 < (P_{0,1-j}^\ell - d_{1-j}^\ell) \cdot$ $\cdot (d_{1-j}^\ell - a_{1-j}^\ell) \,\&\, |c_j^\ell - a_j^\ell| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot |d_{1-j}^\ell - a_{1-j}^\ell|$

и, следовательно, $|c_j^\ell - a_j^\ell| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot |d_{1-j}^\ell - a_j^\ell|$ .

$\beta$) Если $c_0^\ell \vartriangle c_1^\ell \subseteq d_0^\ell \vartriangle d_1^\ell$ , то мы определим $\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda$ и $\forall i\,(0 \leq i \leq 4 \supset \mathfrak{A}\llcorner \ell i \lrcorner \rightleftharpoons \Lambda)$ .

Пусть $j$ ЦЧ, $0 \leq j \leq 1 \,\&\, \neg (c_j^\ell \in d_0^\ell \vartriangle d_1^\ell)$ . Тогда $c_{1-j}^\ell \in d_0^\ell \vartriangle d_1^\ell$ и мы определим $\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \rightleftharpoons \square$, $\mathfrak{A}\llcorner \ell 0 \lrcorner \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons [\![ c_j^\ell, d_{1-j}^\ell ]\!]$ , $\mathfrak{A}\llcorner \ell 1 \lrcorner \rightleftharpoons d_0^\ell \vartriangle d_1^\ell$ , $\mathfrak{A}\llcorner \ell 2 \lrcorner \rightleftharpoons [\![ c_j^\ell , d_j^\ell ]\!]$ ,

$\mathfrak{A}\llcorner \ell 3 \lrcorner \rightleftharpoons [\![ c_j^\ell, c_j^\ell - (-1)^j \cdot \frac{1}{2^{k+3}} \cdot \frac{1}{2^\ell} ]\!]$ и

$\mathfrak{A}\llcorner \ell 4 \lrcorner \rightleftharpoons [\![ d_j^\ell, d_j^\ell + (-1)^j \cdot \frac{1}{2^{k+3}} \cdot \frac{1}{2^\ell} ]\!]$ ; верно $|\mathfrak{A}\llcorner \ell 2 \lrcorner| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot |\mathfrak{A}\llcorner \ell 1 \lrcorner|$ .

б) Мы на основании равномерной непрерывности функции $\mathcal{F}_{0,t}$ построим возрастающую последовательность НЧ $\{q_p\}_p$ такую, что для всяких НЧ $p$ , $s$ и $\ell$ верно

$$\ell_0 < s \,\&\, s \in (C_{0,t})^{(p)} \,\&\, \neg(\mathfrak{A}\llcorner s \lrcorner \mathrel{\mathbb{I}} \Lambda) \,\&\, \ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in (C_{0,t} \setminus (C_{0,t})^{(q_p)}) \,\&$$
$$\& \neg(\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \mathrel{\mathbb{I}} \Lambda) \supset |\mathfrak{A}\llcorner \ell 0 \lrcorner| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot \frac{1}{2^{s+1}} .$$

Пусть $\ell$ и $p$ НЧ, $\ell_0 < \ell \,\&\, 1 < p \,\&\, \ell \in ((C_{0,t})^{(p)} \setminus (C_{0,t})^{(p-1)})$.

Если $\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \mathrel{\mathbb{I}} \Lambda$ , то пусть $E_\ell$ пустая система.

Пусть $\neg(\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \mathrel{\mathbb{I}} \Lambda)$ . Тогда $E_\ell$ система дизъюнктных рациональных сегментов, содержащихся в $\mathfrak{A}\llcorner \ell 2 \lrcorner$ , и такая, что сегменты из $E_\ell$ не перекрываются с сегментами

(5) $\mathfrak{A}\llcorner s m \lrcorner$ , $\ell_0 < s \,\&\, s \in (C_{0,t})^{(p-1)} \,\&\, \neg(\mathfrak{A}\llcorner s \lrcorner \mathrel{\mathbb{I}} \Lambda) \,\&\, 2 \leq m \leq 4$ ,

и

(6) $\mathfrak{A}\llcorner s 1 \lrcorner$ , $\ell_0 < s \,\&\, s \in (C_{0,t})^{(q_p)} \,\&\, \neg(\mathfrak{A}\llcorner s \lrcorner \mathrel{\mathbb{I}} \Lambda)$ ,

и сегмент $\mathfrak{A}\llcorner \ell 2 \lrcorner$ содержится в объединении сегментов системы $E_\ell$ и сегментов (5) и (6).

Пусть $\{R^k_m\}_m$ последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов, соответствующая множеству сегментов, образованному сегментами $K^{k+3}_m$, $1 \le m$ (см. теорему 2 из [2]), $\mathfrak{A}\llcorner \ell 3 \lrcorner$ и $\mathfrak{A}\llcorner \ell 4 \lrcorner$, $\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in C_{0,t} \,\&\, \neg(\mathfrak{A}\llcorner \ell \lrcorner \equiv \Lambda)$, и сегментами систем $E_\ell$, $\ell_0 < \ell \,\&\, \ell \in C_{0,t}$. Тогда мы на основании леммы 3 получаем

$$(7) \qquad \forall p \left( \sum_{m=1}^{p} |R^k_m| < \frac{1}{2^k} \right).$$

2) Ввиду того, что $\xi \in \Pi_2$ и для всякого НЧ $k$ имеет место (7), мы на основании следствия 2 теоремы 5 из [2] получаем $\neg \forall k \neg\neg \exists m (\xi \in R^k_m)$.

С другой стороны ввиду (4) и замечания 1 выполнено

$$(\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}_{0,t}, \xi) \supset \forall k \neg\neg \exists m (\xi \in R^k_m))$$

Итак, мы доказали $\neg \underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}_{0,t}, \xi)$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть $s$ НЧ, $\mathcal{V}(\xi)$ свойство псевдочисел, $\{\{T^m_k\}_k\}_m$ последовательность последовательностей рациональных сегментов, а $\{D_m\}_m$ последовательность неинфинитных р.п. множеств НЧ такие, что $\forall \xi m (\xi \in \Pi \,\&\, \neg \exists k (\neg (k \in D_m) \,\&\, \xi \in T^m_k) \supset \mathcal{V}(\xi)) \,\&\, \neg\neg \exists m \forall p \left( \sum_{1 \le k \le p \,\&\, \neg(k \in D_m)} |T^m_k| < \frac{1}{2^s} \right)$.

Тогда существуют последовательность рациональных сегментов $\{T_k\}_k$ и неинфинитное р.п. множество НЧ $D$ такие, что

$$\forall \xi (\xi \in \Pi \,\&\, \neg \exists k (\neg (k \in D) \,\&\, \xi \in T_k) \supset \mathcal{V}(\xi)) \,\&$$
$$\& \, \forall p \left( \sum_{1 \le k \le p \,\&\, \neg(k \in D)} |T_k| < \frac{1}{2^s} \right).$$

<u>Замечание 2</u>. Если для всякого НЧ $m$ $\mathcal{V}_m(\xi)$ свойство псевдочисел, которым обладают почти все псевдочисла, то для почти всех псевдочисел $\xi$ верно $\forall m\, \mathcal{V}_m(\xi)$ .

<u>Лемма 5</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда существует алгорифм $\mathcal{J}$ такой, что для всяких НЧ $\ell$, $k$ и $t$ , РЧ $c$ и $d$ и ЦЧ $i_1, i_2, i_3$ и $i_4$ таких, что $0<c \,\&\, 0<d \,\&\, \forall j\,(1 \le j \le 4 \supset 0 \le i_j \le 1)$ , и слова $P$, $P \rightleftharpoons i_1 \square i_2 \square i_3 \square i_4 \square \ell \square c \square d \square t \square k$ , выполнено

$$!\mathcal{J}\llcorner P \lrcorner \equiv (k = i_4 \vee i_4 < k \le t \,\&\, \exists a\,(a \in (\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner)^{\circ} \,\&\, \mathcal{F}(a)\cdot(-1)^{i_2} >$$
$$c\cdot((k - i_3 - i_4)\cdot d + (a - \text{Э}_{\text{л}}(\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) - i_1\cdot|\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner|)\cdot(-1)^{i_1})))$$

и $$!\mathcal{J}\llcorner P \lrcorner \supset \exists m\,(\mathcal{J}\llcorner P \lrcorner \rightleftharpoons m \,\&\, (i_4 = k \supset m = \ell) \,\&\, (i_4 < k \supset$$
$$\supset \forall a\,(a \in \mathcal{L}\llcorner m \lrcorner \equiv a \in \llbracket \text{Э}_{\text{л}}(\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) + i_1\cdot|\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner| + (k-1-i_4)\cdot$$
$$\cdot d\cdot(-1)^{i_1+1},\ \text{Э}_{\text{л}}(\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) + i_1\cdot|\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner| +$$
$$+ (k - i_4)\cdot d\cdot(-1)^{i_1+1} \rrbracket))) \ .$$

<u>Замечание 3</u>. Если $\mathcal{F}$ функция, $\mathcal{J}$ алгорифм из леммы 5, $\ell, t, q$ и $m$ НЧ, $c$ и $d$ РЧ, $0<c \,\&\, d = \frac{1}{2q}\cdot|\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner|$ , $i_1$ и $i_2$ ЦЧ, $0 \le i_1 \le 1 \,\&\, 0 \le i_2 \le 1$ , а $P_1$ , $P_2$ и $P_3$ слова такие, что $P_1 \rightleftharpoons i_1 \square i_2 \square 0 \square 1 \square \ell \square c \square d \square t \square$ ,

$P_2 \rightleftharpoons i_1 \square i_2 \square 1 \square 1 \square \ell \square c \cdot \frac{1}{2^m} \square d \square (t+2q)\cdot 2^m \square$ и

$P_3 \rightleftharpoons (1-i_1) \square i_2 \square 1 \square 0 \square \ell \square c \square d \square t+2q \square$ ,

а $k_1, k_2$ и $k_3$ НЧ, для которых верно $\forall j\,(1 \le j \le 3 \supset\, !\mathcal{J}\llcorner P_j k_j \lrcorner \,\&\, \neg\, !\mathcal{J}\llcorner P_j (k_j+1) \lrcorner)$ , тогда выполнено

а) для НЧ $j$, $1 \le j \le 3$ , $\{\mathcal{L}\llcorner \mathcal{J}\llcorner P_j k \lrcorner \lrcorner\}_{k=1}^{k_j}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов и б) $\sum_{k=1}^{k_2} |\mathcal{L}\llcorner \mathcal{J}\llcorner P_2 k \lrcorner\lrcorner| \leq 2^{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{k_1} |\mathcal{L}\llcorner \mathcal{J}\llcorner P_1 k \lrcorner\lrcorner|$

и $\sum_{k=1}^{k_3} |\mathcal{L}\llcorner \mathcal{J}\llcorner P_3 k \lrcorner\lrcorner| \leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{k_1} |\mathcal{L}\llcorner \mathcal{J}\llcorner P_1 k \lrcorner\lrcorner|$ .

<u>Лемма 6</u>. Пусть $C$ р.п. множество НЧ, $\mathcal{K}(C)$, $\alpha$ РЧ, $1 \leq \alpha$, а $\mathcal{A}$ алгорифм такой, что для всяких НЧ $\ell$, $\ell \in C$, и ЦЧ $x_1$ и $x_2$, $0 \leq x_1 \leq 1 \,\&\, 0 \leq x_2 \leq 1$, верно

$$\mathcal{A}\llcorner x_1 \square \ell \lrcorner \simeq \text{Э}_{\lambda}(\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) + x_1 \cdot |\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner| ,$$

$$\mathcal{A}\llcorner x_1 \square 0 \square \ell \square 1 \lrcorner \simeq \ell \,\&\, !\mathcal{A}\llcorner x_1 \square 1 \square \ell \square 1 \lrcorner ,$$

$\tilde{\mathcal{A}}_{x_1 \square x_2 \square \ell \square}$ стройный арифметический алгорифм, который не является арифметически полным, и такой, что если $k^{\ell}_{x_1, x_2}$ НЧ, для которого верно $!\mathcal{A}\llcorner x_1 \square x_2 \square \ell \square k^{\ell}_{x_1, x_2} \lrcorner$, то $\{\mathcal{L}\llcorner \mathcal{A}\llcorner x_1 \square x_2 \square \ell \square k \lrcorner\lrcorner\}_{k=1}^{k^{\ell}_{x_1,x_2}}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов и существует РЧ $d^{\ell}_{x_1, x_2}$ такое, что $[\![ \mathcal{A}\llcorner x_1 \square \ell \lrcorner , d^{\ell}_{x_1, x_2} ]\!]$ является объединением сегментов этой системы, причем в случае, что $\forall j (0 \leq j \leq 1 \supset \neg !\mathcal{A}\llcorner x_1 \square j \square \ell \square (k^{\ell}_{x_1, j} + 1) \lrcorner)$, выполнено $|[\![ \mathcal{A}\llcorner x_1 \square \ell \lrcorner , d^{\ell}_{x_1, 1} ]\!]| \leq \alpha \cdot |[\![ \mathcal{A}\llcorner x_1 \square \ell \lrcorner , d^{\ell}_{x_1, 0} ]\!]|$ .

Тогда для почти всех ЦЧ $\xi$ верно $(\neg \exists \ell (\ell \in C \,\&\, \xi \in \mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) \supset (\xi \in \mathcal{R}_1 \supset \xi \in \mathcal{R}_0))$ , где для ЦЧ $j$, $0 \leq j \leq 1$,

$$\mathcal{R}_j \rightleftharpoons \wedge \eta (\eta \in \Pi \,\&\, \forall m \neg\neg \exists i \ell k (0 \leq i \leq 1 \,\&\, \ell \in C \,\&\, !\mathcal{A}\llcorner i \square j \square \ell \square k \lrcorner \,\&\, \eta \in \mathcal{L}\llcorner \mathcal{A}\llcorner i \square j \square \ell \square k \lrcorner\lrcorner \,\&\, |\eta - \mathcal{A}\llcorner i \square \ell \lrcorner| < \frac{1}{2^m})) .$$

<u>Доказательство</u>. Мы построим алгорифмы $\vartheta$ и $\mathcal{E}$ такие, что для всяких ЦЧ $x_1$, $0 \leq x_1 \leq 1$, НЧ $k$, $\ell$ и $t$ и РЧ $c$,

$0 < c$ , верно

$$!\vartheta_\llcorner \lambda_1 \square l \square k \square t_\lrcorner \,\&\, (\vartheta_\llcorner \lambda_1 \square l \square k \square t_\lrcorner \neq \Lambda \supset \vartheta_\llcorner \lambda_1 \square l \square k \square (t+1)_\lrcorner \neq \Lambda \,\&\, \forall m\, (m < k \supset \vartheta_\llcorner \lambda_1 \square l \square m \square t_\lrcorner \neq \Lambda)) \,\&\, ((l \in C \,\&\, !\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square 0 \square l \square k_\lrcorner) \equiv \exists s (\vartheta_\llcorner \lambda_1 \square l \square k \square s_\lrcorner \neq \Lambda)) \,\&\, \mathcal{E}_\llcorner \lambda_1 \square l \square c_\lrcorner \simeq (\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square l_\lrcorner - c) \vartriangle (\mathfrak{A}_\llcorner \lambda_1 \square l_\lrcorner + c) .$$

1) Пусть $q$ , $t$ и $s$ НЧ.

а) Если $\neg \exists i l k (0 \leq i \leq 1 \,\&\, l \leq q \,\&\, k \leq t \,\&\, \vartheta_\llcorner i \square l \square k \square t_\lrcorner \neq \Lambda)$, то мы построим последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов $\{R_k^{q,t,s}\}_k$ , которая соответствует множеству, образованному сегментами $K_n^{s+3}$ , $1 \leq n$ , и $\mathfrak{L}_\llcorner p_\lrcorner$ ,

$$\exists i l k (0 \leq i \leq 1 \,\&\, l \in C \,\&\, !\mathfrak{A}_\llcorner i \square 1 \square l \square k_\lrcorner \,\&\, \forall a (a \in \mathfrak{L}_\llcorner p_\lrcorner \equiv a \in (\bigcup_{j=1}^{k} \mathfrak{L}_\llcorner \mathfrak{A}_\llcorner i \square 1 \square l \square j_\lrcorner{}_\lrcorner \cap \mathcal{E}_\llcorner i \square l \square \frac{\alpha}{2^s}{}_\lrcorner))) .$$

Тогда, очевидно, $\forall \xi (\xi \in \Pi \,\&\, \xi \in \mathcal{R}_1 \supset \neg\neg \exists k (\xi \in R_k^{q,s,t}))$ .

б) Пусть $\{\lambda_j \square l_j \square k_j\}_{j=1}^{\tau}$ непустая система всех троек ЦЧ $\lambda \square l \square k$ , для которых верно $0 \leq \lambda \leq 1 \,\&\, 1 \leq l \leq q \,\&\, 1 \leq k \leq$ $\leq t \,\&\, \vartheta_\llcorner \lambda \square l \square k \square t_\lrcorner \neq \Lambda \,\&\, (k < t \supset \neg (\vartheta_\llcorner \lambda \square l \square (k+1) \square t_\lrcorner \neq \Lambda))$ . Мы построим систему дизъюнктных рациональных сегментов $\{Q_i\}_{i=1}^{\sigma}$ и НЧ $\sigma$ такие, что

$$\forall a (a \in \bigcup_{i=1}^{\sigma} Q_i \equiv a \in \bigcup_{j=1}^{\tau} ((\bigcup_{k=1}^{k_j} \mathfrak{L}_\llcorner \mathfrak{A}_\llcorner \lambda_j \square 0 \square l_j \square k_\lrcorner{}_\lrcorner) \cap \mathcal{E}_\llcorner \lambda_j \square l_j \square \frac{1}{2^s}{}_\lrcorner))$$

и расстояние любых двух сегментов системы $\{Q_i\}_{i=1}^{\sigma}$ больше чем $\frac{1}{2^\sigma}$ .

Пусть $\sigma_1$ и $\sigma_2$ НЧ такие, что $2 + \sigma < \sigma_1 \,\&\, 2^{s+4} \cdot \sigma < 2^{\sigma_1} \,\&$

$\& \alpha\cdot 2^{\sigma_1+1} < 2^{\sigma_2}$ и пусть $\{R_k^{q,t,s}\}_k$ последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов, которая соответствует множеству, образованному сегментами $K_m^{s+3}$, $1\le m$,

$(Э_л(Q_i)-\frac{1}{2^{\sigma_1}})\Delta Э_л(Q_i)$ и $Э_п(Q_i)\Delta(Э_п(Q_i)+\frac{1}{2^{\sigma_1}})$, $1\le i\le \sigma$,

и $\mathcal{L}\llcorner p\lrcorner$, $\exists i l k(0\le i\le 1 \& q< l \& l\in C \& !\mathcal{U}\llcorner i\square 1\square l\square k\lrcorner \&$
$(\frac{1}{2^{\sigma_1+1}} < \min_{1\le j\le \sigma}\min_{a\in Q_j}|\mathcal{U}\llcorner i\square l\lrcorner - a|) \& \forall a(a\in \mathcal{L}\llcorner p\lrcorner \equiv a\in$
$\in(\bigcup_{1\le j\le k}\mathcal{L}\llcorner \mathcal{U}\llcorner i\square 1\square l\square j\lrcorner\lrcorner \cap \mathcal{E}\llcorner i\square l\square \frac{\alpha}{2^{\sigma_2}}\lrcorner)))$.

Тогда, очевидно, $\forall \xi(\xi\in\Pi \& \neg\exists l(l\in C \& \xi\in\mathcal{L}\llcorner l\lrcorner) \& \xi\in$
$\in \mathcal{P}_1 \& \neg\exists i(1\le i\le\sigma \& \xi\in Q_i)\supset\neg\neg\exists k(\xi\in R_k^{q,t,s}))$.

2) Для всякого НЧ $s$ не могут не существовать НЧ $q_0$ и $t_0$ такие, что

(8) $$\forall p(\sum_{k=1}^{p}|R_k^{q_0,t_0,s}| < \frac{1}{2^s}).$$

Действительно, пусть $q_0$ и $t_0$ НЧ и $\{\{r_{q,t}\}_{q_0\le q}\}_{t_0\le t}$ последовательность последовательностей РЧ такие, что

$\forall i l k(0\le i\le 1 \& l\in C \& l\le q_0 \& !\mathcal{U}\llcorner i\square 0\square l\square k\lrcorner\supset k\le t_0 \&$
$(\mathcal{V}\llcorner i\square l\square k\square t_0\lrcorner \neq \Lambda))$ и для всяких НЧ $q$ и $t$,

$q_0\le q \& t_0\le t$,

$$\mathfrak{m}(r_{q,t},\bigcup_{\substack{0\le i\le 1 \& l\le q \& k\le t \& \\ \mathcal{V}\llcorner i\square l\square k\square t\lrcorner\neq\Lambda}}(\mathcal{L}\llcorner\mathcal{U}\llcorner i\square 0\square l\square k\lrcorner\lrcorner\cap\mathcal{E}\llcorner i\square l\square\frac{1}{2^s}\lrcorner))$$

и $r_{q,t} < r_{q_0,t_0}+\frac{1}{2^{s+3}}\cdot\frac{1}{\alpha}$.

Тогда при помощи леммы 3 легко доказать (8).

3) Ввиду 1), 2) и леммы 4 доказательство закончено.

На основании лемм 5 и 6 и замечаний 1, 2 и 3 легко усмотреть, что верно следующее утверждение.

<u>Лемма 7</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция, а $C$ р.п. множество НЧ такие, что $\mathcal{K}(C) \& \forall x(|\mathcal{F}(x)| > 0 \supset \exists \ell(\ell \in C \& x \in \mathcal{B}\llcorner \ell \lrcorner))$. Тогда для почти всех ПЧ $\xi$ верно $(\neg \exists \ell(\ell \in C \& \xi \in \mathcal{B}\llcorner \ell \lrcorner) \supset$ $\neg\neg(\underline{D}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \& \overline{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee D_{\text{кл}}(0, \mathcal{F}, \xi)))$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда для почти всех псевдочисел $\xi$ выполнено

$$\neg\neg(\underline{D}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \& \overline{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee \exists \eta(\eta \in \Pi \& D_{\text{кл}}(\eta, \mathcal{F}, \xi))) .$$

<u>Доказательство</u>. Мы построим КДЧ $v$, для которого выполнено $|\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0)| < v \& \forall i\, k\, a\, b(0 \le i \le 1 \& a < b \supset$ $\supset \neg(\Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) = (-1)^{i} \cdot k \cdot v \cdot |a \Delta b|))$.

Согласно лемме 4 из [3] мы для всяких ЦЧ $i$, $0 \le i \le 1$, и НЧ $t$ построим р.п. множество НЧ $C_{i,t}$ и функцию $\mathcal{F}_{i,t}$ такие, что $\mathcal{K}(C_{i,t}) \& \forall \ell(\ell \in C_{i,t} \supset t \cdot v \cdot |\mathcal{B}\llcorner \ell \lrcorner| < \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{B}\llcorner \ell \lrcorner) \cdot (-1)^{i}) \&$ $\mathcal{F}_{i,t} = \mathcal{F} - [\mathcal{F}, C_{i,t}]$ и $[\mathcal{F}, C_{i,t}]$ функция слабо ограниченной вариации. Тогда ввиду леммы 7, замечания 2, теоремы 3 из [3] и того, что - очевидно - $\forall i\, \xi(0 \le i \le 1 \& \xi \in \Pi \& \forall t \neg\neg \exists \ell(\ell \in C_{i,t} \& \xi \in \mathcal{B}\llcorner \ell \lrcorner) \supset$ $\overline{D}_{\text{кл}}(+\infty, (-1)^{i} \cdot \mathcal{F}, \xi))$, доказательство закончено.

<u>Пример 1</u>. Существуют псевдоравномерно непрерывная функция $\mathcal{F}$ и $\Pi_2$-числа $\xi_1$ и $\xi_2$ такие, что $\overline{D}_{\text{кл}}(+\infty, \mathcal{F}, \xi_1) \&$ $\neg \underline{D}_{\text{кл}}(-\infty, \mathcal{F}, \xi_1) \& Bd(\mathcal{F}, \xi_2) \& \neg D_{\text{кл}}(\mathcal{F}, \xi_2)$.

Пример 2. Существует функция $\mathcal{F}$, $a(\mathcal{F})$ (см. [5]), такая, что для всяких $\{\mathfrak{M}_m\}_m \in S$ (см. [4]), последовательности рациональных сегментов $\{Q_k\}_k$ и $\Pi_1$Ч $\eta$, для которых верно $\mu(\{\mathfrak{M}_m\}_m) < 1 \& \forall m (\underline{\eta}(m) = \sum_{k=1}^{m} |Q_k|) \& \eta < 1$, существуют КДЧ $x$ и $\Pi_1$Ч $\xi$ такие, что

$$x \in 0 \triangledown 1 \& \neg (x \in \{\mathfrak{M}_m\}_m) \& \mathrm{B}d(\mathcal{F}, x) \& \neg \mathrm{D}_{кл}(\mathcal{F}, x) \&$$

$$\xi \in 0 \vee 1 \& \neg \exists k (\xi \in Q_k) \& \mathrm{B}d(\mathcal{F}, \xi) \& \neg \mathrm{D}_{кл}(\mathcal{F}, \xi) .$$

На основании [2] и [3] легко доказать следующее.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция и $\xi$ ПЧ. Тогда $(\xi \in \Pi_1 \& \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_2 \supset \neg\neg(\underline{\mathrm{D}}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \& \overline{\mathrm{D}}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee \mathrm{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \vee \mathrm{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \xi)))$ и

$$((\xi \in \Pi_2 \vee \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \in \Pi_2) \& \neg\neg \exists m \forall \eta (\eta \in \Pi \& |\eta - \xi| < \frac{1}{2^m} \&$$
$$\& \sigma_{\mathcal{F}}(\eta) = \sigma_{\mathcal{F}}(\xi) \supset \eta = \xi) \supset \neg (\underline{\mathrm{D}}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, \xi) \&$$
$$\& \overline{\mathrm{D}}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, \xi))) .$$

В связи с примером 2 интересно заметить, что теорему 2 из [3] можно усилить.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{F}$ функция и пусть существует последовательность функций $\{\mathcal{G}_m\}_m$ такая, что для всякого НЧ $m$ функция $\mathcal{G}_m$ не может не быть полигональной и выполнено $\forall m (\sum_{i=1}^{2^m} |\Delta(\mathcal{F} - \mathcal{G}_m, \frac{i-1}{2^m} \triangle \frac{i}{2^m})| < \frac{1}{2^m})$. Тогда существуют последовательность последовательностей рационалных сегментов $\{\{R_k^m\}_k\}_m$, последовательность $\Pi_1$Ч $\{\xi_m\}_m$ и последовательность неубывающих последовательностей НЧ $\{\{p_k^m\}_k\}_m$ такие, что

$$\forall m\, n\, ((\underline{\xi_m}(n) = \sum_{k=1}^{n} |R_k^m|)\ \&\ \xi_m < \frac{1}{2^{m+1}})\ \&\ \forall q\, \xi\, (\xi \in \Pi\ \&$$

$$\&\ \neg \exists k\, (\xi \in R_k^q) \supset \exists \eta\, (\eta \in \Pi\ \&\ D_{кл}(\eta, \mathcal{F}, \xi)\ \&$$

$$\&\ \forall m\, (q \le m \supset \mathcal{D}(\eta, \mathcal{F}, \xi, m, \{ n_k^m \}_k)))) .$$

Пример 3. Существует функция $\mathcal{F}$, $\mathfrak{a}(\mathcal{F})$, которая удовлетворяет предположению теоремы 4 и вместе с тем $\forall x\, (x \in 0 \vartriangle 1 \supset \neg D_{кл}(\mathcal{F}, x))$ .

Литература:


[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[3] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment. Math. Univ. Carolinae 16(1975), 583-599.

[4] ДЕМУТ О.: Пространства $L_n$ и $S$ в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10 (1969), 261-284.

[5] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 705-726.



Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83, 18600 Praha 8

Československo



(Oblatum 5.11.1975)