Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

15,1 (1974)

О ПРЕДСТАВИМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВАМИ (S) И (T_1), В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИЙ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: В классической математике всякая равномерно непрерывная функция, обладающая свойством (S), представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций [1]. В настоящей заметке построена равномерно непрерывная конструктивная функция, которая обладает свойствами (S) и (T_1) и которую вместе с тем нельзя представить в виде суперпозиции конечного числа функций, обладающих свойством $\mathcal{a}$. (Свойство $\mathcal{a}$ является конструктивным аналогом классического $\varepsilon - \delta$ определения абсолютной непрерывности функций.)

Ключевые слова: Конструктивная функция, свойства (S) и (T_1), абсолютно непрерывная функция, суперпозиция функций.

AMS: Primary 02E99 Ref. Ž. 2.644.2

Secondary 26A72

В следующем мы пользуемся определениями, обозначениями и результатами из [6] и [7], в частности определением свойств (S), $(\mathcal{N})^*$ и $(T_1)^*$.

Определение 1. Пусть f функция, а n НЧ.

а) Для НЧ k и ℓ мы обозначим $\mathcal{a}(f, k, \ell)$, если для всякой системы неперекрывающихся рациональных сегментов $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{s}$ выполнено $(\forall i (1 \le i \le s \supset 0 \le a_i < b_i \le 1) \,\&$

$$\sum_{i=1}^{s} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{\ell} \supset \sum_{i=1}^{s} |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{1}{k}) .$$

б) Мы скажем, что f обладает свойством $\mathcal{a}$ (соотв. $\mathcal{a}_{кл}$), и обозначим $\mathcal{a}(f)$ (соотв. $\mathcal{a}_{кл}(f)$), если выполнено $\forall k \exists \ell\, \mathcal{a}(f, k, \ell)$ (соотв. $\forall k \neg\neg \exists \ell\, \mathcal{a}(f, k, \ell)$).

в) Мы скажем, что f обладает свойством $\mathcal{a}^n$ (соотв. $\mathcal{a}^n_{кл}$) и обозначим $\mathcal{a}^n(f)$ (соотв. $\mathcal{a}^n_{кл}(f)$), если существуют функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, обладающие свойством $\mathcal{a}$ (соотв. $\mathcal{a}_{кл}$), для которых верно $f = \varphi_m * \varphi_{m-1} \cdots * \varphi_1$.

Напомним, что а) функция f, $0 \leq f \leq 1$, обладает свойством $(N)^*$ тогда и только тогда, когда она обладает свойством (S) ,

б) если функция f является суперпозицией конечного числа функций, обладающих свойством $(N)^*$ (соотв. $\mathcal{a}$), то f обладает свойством $(N)^*$.

Мы будем в дальнейшем без ссылок пользоваться замечанием 4 из [6] и следующим замечанием.

<u>Замечание 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$, g и φ функции. Мы определим $\psi \rightleftharpoons max(min(\varphi, 1), 0)$. Тогда $0 \leq \psi \leq 1$, $\mathcal{F} = g * \varphi \equiv \equiv \mathcal{F} = g * \psi$ и что касается абсолютной непрерывности функций, ограниченности вариации, свойств $\mathcal{a}$, α, (S), $(N)^*$ и $(T_1)^*$, то принадлежность функции φ к одному из соответствующих классов функций влечет за собой принадлежность ψ к тому же классу.

Ввиду замечания 4, теоремы 3 и леммы 4 из [6] и следствия теоремы 5 и теоремы 7 и ее следствия из [7] верны следующие утверждения.

__Теорема 1__. Функция $\mathcal{F}$ обладает свойствами $(\mathcal{N})^*$ и $(T_1)^*$ тогда и только тогда, когда существуют абсолютно непрерывная функция g и функция φ ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$ такие, что $\mathfrak{a}(\varphi) \,\&\, g * \varphi = \mathcal{F}$.

__Следствие__. Если функция $\mathcal{F}$ является суперпозицией конечного числа функций, обладающих свойствами $\mathfrak{a}$ и $(T_1)^*$, то $\mathcal{F}$ можно представить в виде суперпозиции двух функций, обладающих этими свойствами.

__Замечание 2__. 1) Пусть $\mathcal{F}$ функция, которая является суперпозицией конечного числа абсолютно непрерывных функций. Тогда $\mathcal{F}$ представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций (теорема 3 из [4]) и обладает свойствами $(\mathcal{N})^*$ и $(T_1)^*$ (теорема 7 и ее следствие из [7] и теорема 1).

2) Существует функция f, которая обладает свойствами $(\mathcal{N})^*$ и $(T_1)^*$ и которую вместе с тем нельзя представить в виде суммы двух суперпозиций абсолютно непрерывных функций (замечание 2 из [5] и теорема 1).

__Определение 2__. Мы скажем, что функция $\mathcal{F}$ обладает свойством (T_1), если для почти всех КДЧ y существуют ЦЧ j, $0 \le j$, и возрастающая система КДЧ $\{x_i^y\}_{i=1}^{j}$ такие, что

$$\forall i\,(1 \le i \le j \supset 0 < x_i^y < 1 \,\&\, \mathcal{F}(x_i^y) = y) \,\&$$

$$\& \forall x\,(x \in 0 \vartriangle 1 \,\&\, \mathcal{F}(x) = y \supset \exists i\,(1 \le i \le j \,\&\, x = x_i^y)).$$

Заметим, что определение свойства (T_1) является по существу повторением классического определения и отличается от него только тем, что использованным понятиям дается конструктивное толкование. Всякая функция, обладающая свойством $(T_1)^*$, обладает и свойством (T_1) (см. теорему 1 из [6]).

Ввиду теоремы 5 из [7] легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть функция f обладает свойством (T_1), а функция g свойствами (T_1) и $(N)^*$. Тогда $g * f$ обладает свойством (T_1).

Определение 3. Мы скажем, что функция f является функцией типа A_1, если выполнено $f(0)=0 \& f(1)=1 \& \forall x\,(0< f(x)<1 \equiv 0<x<1)$.

Замечание 3. 1) Пусть f_1 и f_2 функции типа A_1. Тогда $f_2 * f_1$ - функция типа A_1. Если функция $f_2 * f_1$ не является постоянной ни на каком сегменте, содержащемся в $0 \Delta 1$, то тем же свойством обладают и функции f_1 и f_2.

2) Пусть f функция типа A_1, n НЧ, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ функции такие, что $f = \varphi_m * \varphi_{m-1} \dots * \varphi_1$. Тогда легко построить функции типа A_1 - $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_m$ такие, что $f = \overline{\varphi}_m * \overline{\varphi}_{m-1} \dots * \overline{\varphi}_1$ и для всякого НЧ i, $1 \le i \le m$, если φ_i обладает некоторым из свойств a, $a_{k\lambda}$, α, (S), $(N)^*$, $(T_1)^*$ и (T_1), то $\overline{\varphi}_i$ тоже обладает этим свойством, если φ_i монотонная (соотв. строго монотонная) на $0 \Delta 1$, то $\overline{\varphi}_i$ является неубывающей (соотв. возрастающей) на $0 \Delta 1$.

Теорема 2. Для всякого НЧ m можно построить равномерно непрерывную функцию типа A_1 - $\mathcal{F}_{m+1}$ такую, что

а) $\mathcal{F}_{m+1}$ можно представить в виде суперпозиции $m+1$ функций, обладающих свойствами a и (T_1) и, следовательно, $\mathcal{F}_{m+1}$ обладает свойствами a^{m+1}, (S) и (T_1),

б) функция $\mathcal{F}_{m+1}$ не является постоянной ни на каком сегменте, содержащемся в $0 \Delta 1$,

в) $\mathcal{F}_{m+1}$ нельзя представить в виде $\mathcal{F}_{m+1} = \varphi * \psi$, где функция φ является монотонной и верно $\mathfrak{a}_{кл}(\varphi) \& \mathfrak{a}^{n}_{кл}(\psi)$ и, следовательно,

г) выполнено $\neg \mathfrak{a}^{n}_{кл}(\mathcal{F}_{n+1}) \& \neg \mathfrak{a}^{n}(\mathcal{F}_{n+1})$.

<u>Теорема 3</u>. Можно построить равномерно непрерывную функцию типа $A_1 - \mathcal{F}$, обладающую свойствами (S) и (T_1), которую нельзя представить в виде суперпозиции конечного числа функций, обладающих свойством $\mathfrak{a}_{кл}$ (соотв. $\mathfrak{a}$).

Сначала мы займемся вспомогательными утверждениями.

Легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>. Пусть Ξ покрытие, f и ψ функции, а $\{p_k\}_k$ возрастающая последовательность НЧ, $f(0)=0 \& f(1)=1 \& 0 \leq f \leq 1$. Тогда а) можно построить функцию φ такую, что для всяких НЧ ℓ и КДЧ x, $x \in \Xi_\ell$, выполнено

$$(\neg \exists k(\ell = p_k) \supset \varphi(x) = x) \& (\exists k(\ell = p_k) \supset \varphi(x) =$$

$$= \partial_л(\Xi_\ell) + |\Xi_\ell| \cdot f\left(\frac{x - \partial_л(\Xi_\ell)}{|\Xi_\ell|}\right)),$$

б) если выполнено $\mathfrak{a}(f) \& \mathfrak{a}(\psi) \& \psi = \psi/_{\Xi}$ и сходится ряд $\sum_k |\psi(\partial_n(\Xi_{p_k})) - \psi(\partial_л(\Xi_{p_k}))|$, то верно $\mathfrak{a}(\psi * \varphi)$.

<u>Лемма 3</u>. Можно построить функции типа $A_1 - g$, ψ_1 и ψ_2, обладающие свойством (T_1), покрытия Φ и Ξ и последовательность ЦЧ $\{\nu_t\}_t$ такие, что

а) $g = \psi_2 * \psi_1$, $\mathfrak{a}(\psi_1) \& \mathfrak{a}(\psi_2)$, g обладает свойством (S), б) для всякого НЧ t существует возрастающая система РЧ $\{\varkappa_{t,i}\}_{i=0}^{3^{\nu_t}}$, для которой выполнено $\varkappa_{t,0} = Э_л(\Phi_t) \,\&\, \varkappa_{t,3^{\nu_t}} = Э_п(\Phi_t) \,\&\, \forall j(0 \le 2j < 3^{\nu_t} \supset g(\varkappa_{t,2j}) = Э_л(\Phi_t) \,\&\, g(\varkappa_{t,2j+1}) = Э_п(\Phi_t))$,

функция g линейна на всяком сегменте $\varkappa_{t,i} \triangle \varkappa_{t,i+1}$ $(0 \le i < 3^{\nu_t})$,

в) функция g не является постоянной ни на каком сегменте, содержащемся в $0 \triangle 1$,

г) $g = g/\Xi$, $\psi_1 = \psi_1/\Xi$, сходятся ряды $\sum\limits_{k} |\Xi_{2+4k}|$ и $\sum\limits_{k} |\psi_1(Э_п(\Xi_{2+4k})) - \psi_1(Э_л(\Xi_{2+4k}))|$, выполнено $\forall t j k\, (2 < t \,\&\, 0 \le$ $\le 2j < 3^{\nu_t} \supset (k = \sum\limits_{\ell=3}^{t-1} \frac{1}{2} \cdot (3^{\nu_\ell} + 1) + j + 1 \equiv \Xi_{2+4k} \subseteq \varkappa_{t,2j} \triangle \varkappa_{t,2j+1}))$,

д) если φ монотонная функция типа A_1, $a_{кл}(\varphi)$, и ψ функция типа A_1 такие, что $g = \varphi * \psi$, то для всякого НЧ q существует возрастающая система НЧ $\{t_i\}_{i=1}^{\tau}$, для которой выполнено $\sum\limits_{i=1}^{\tau} \sum\limits_{j=1}^{3^{\nu_{t_i}}} |\psi(\varkappa_{t_i,j}) - \psi(\varkappa_{t_i,j-1})| > 3^q$ и, следовательно,

е) функцию g нельзя представить в виде $g = \varphi * \psi$, где φ монотонная функция, $a_{кл}(\varphi)$, а ψ не может не быть функцией слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$.

<u>Доказательство.</u> I 1) Пусть $\mathfrak{U}$ универсальный арифметический алгорифм, а $\mathcal{Y}$ арифметический полный арифметический алгорифм, перечисляющий без повторений рекурсивно перечислимое (т.е. алгорифмически перечислимое) множество НЧ $\wedge i\, (0 < i \,\&\, !\mathfrak{U}(i \square i) \,\&\, \mathfrak{U}(i \square i) \le 3^{3i+7} - 1)$ (см.[3], стр. 466, и свойства $\mathfrak{U}$).

Для всякого НЧ m мы обозначим

$$\mathcal{J}_m \rightleftharpoons \frac{U(\mathcal{Y}(m)\,\square\,\mathcal{Y}(m))}{3^{3\mathcal{Y}(m)+7}} \,\Delta\, \frac{U(\mathcal{Y}(m)\,\square\,\mathcal{Y}(m))+1}{3^{3\mathcal{Y}(m)+7}}$$

Тогда выполнено

(1) $\forall x k\,(x \in 0 \Delta 1 \supset \exists n m\,(k < n \,\&\, k < m \,\&\, Э_n(\mathcal{J}_m) =$
$= Э_r(\mathcal{J}_m) \,\&\, x \in Э_r(\mathcal{J}_n) \,\Delta\, Э_n(\mathcal{J}_m)))$.

Мы построим возрастающую последовательность НЧ $\{i_k\}_k$, покрытие Φ , последовательность ЦЧ $\{\nu_t\}_t$ и последовательность возрастающих систем РЧ $\{\{\varkappa_{t,j}\}_{j=0}^{3^{\nu_t}}\}_t$.

α) Мы определим $i_1 \rightleftharpoons \mu n\,(Э_r(\mathcal{J}_n)) = 0)$, $\Phi_1 \rightleftharpoons \mathcal{J}_{i_1}$, $i_2 \rightleftharpoons \mu n\,(i_1 < n \,\&\, Э_n(\mathcal{J}_n) = 1)$, $\Phi_2 \rightleftharpoons \mathcal{J}_{i_2}$, $\nu_1 \rightleftharpoons 0$, $\nu_2 \rightleftharpoons 0$;

β) Пусть k НЧ, $1 < k$, пусть уже построены НЧ $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$,система сегментов $\{\Phi_t\}_{t=1}^{\lambda_k}$ и система ЦЧ $\{\nu_t\}_{t=1}^{\lambda_k}$. Мы определим

$$i_{k+1} \rightleftharpoons \mu n\,(i_k < n \,\&\, \neg(\mathcal{J}_n \subseteq \bigcup_{l=1}^{k} \mathcal{J}_{i_l}))\,.$$

Тогда можно построить систему дизъюнктных рациональных сегментов, содержащихся в $\mathcal{J}_{i_{k+1}}$, $-\{a_l \Delta b_l\}_{l=1}^{\sigma}$, для которой выполнено $\forall a\,(a \in \mathcal{J}_{i_{k+1}} \supset (\exists l\,(1 \le l \le \sigma \,\&\, a \in a_l \Delta b_l) \vee$ $\exists t\,(1 \le t \le \lambda_k \,\&\, a \in \Phi_t))) \,\&\, \forall a\, l\,(1 \le l \le \sigma \,\&\, a_l < a < b_l \supset$ $\supset \neg\, \exists t\,(1 \le t \le \lambda_k \,\&\, a \in \Phi_t))$.

Мы определим $\lambda_{k+1} \rightleftharpoons \lambda_k + \sigma$ и для всякого НЧ t , $\lambda_k < t \le \lambda_{k+1}$, $\Phi_t \rightleftharpoons a_{t-\lambda_k} \Delta b_{t-\lambda_k}$ и $\nu_t \rightleftharpoons 4\mathcal{Y}(i_{k+1}) + 7$.

γ). Для всяких НЧ t и ЦЧ j, $0 \le j \le 3^{\nu_t}$, пусть

$$\varkappa_{t,j} \rightleftharpoons \mathcal{E}_\ell(\Phi_t) + \frac{j}{3^{\nu_t}} \cdot |\Phi_t| \quad .$$

Заметим, что ввиду (1) Φ является покрытием.

2) Мы построим функции типа A_1 – g, ψ_1 и ψ_2 такие, что $\forall t a ((a = \mathcal{E}_\ell(\Phi_t) \vee a = \mathcal{E}_m(\Phi_t)) \supset g(a) = \psi_1(a) = \psi_2(a) = a)$, g, ψ_1 и ψ_2 линейны на сегментах Φ_1 и Φ_2 и для всяких НЧ t и j, $2 < t$,

$$(2j < 3^{\nu_t} \supset g(\varkappa_{t,2j}) = \mathcal{E}_\ell(\Phi_t) \,\&\, g(\varkappa_{t,2j-1}) = \mathcal{E}_m(\Phi_t)) \,\&\, (2j < 3^{\nu_t} - 2 \supset$$

$$\supset \psi_1(\varkappa_{t,2j}) = \mathcal{E}_\ell(\Phi_t)) \,\&\, (2j < 3^{\nu_t} \supset \psi_1(\varkappa_{t,2j-1}) = \varkappa_{t,1}) \,\&\, \psi_2(\varkappa_{t,1}) =$$

$$= \mathcal{E}_m(\Phi_t) \,\&\, \psi_2(\varkappa_{t,\frac{1}{2}\cdot(3^{\nu_t}+1)}) = \mathcal{E}_\ell(\Phi_t) \quad ,$$

g линейна на сегменте $\varkappa_{t,j-1} \Delta \varkappa_{t,j}$ $(1 \le j \le 3^{\nu_t})$, ψ_1 линейна на сегменте $\varkappa_{t,j-1} \Delta \varkappa_{t,j}$ $(1 \le j \le 3^{\nu_t} - 2)$ и на $\varkappa_{t,3^{\nu_t}-2} \Delta \varkappa_{t,3^{\nu_t}}$, ψ_2 линейна на сегментах $\varkappa_{t,0} \Delta \varkappa_{t,1}$, $\varkappa_{t,1} \Delta \varkappa_{t,\frac{1}{2}\cdot(3^{\nu_t}+1)}$ и $\varkappa_{t,\frac{1}{2}\cdot(3^{\nu_t}+1)} \Delta \varkappa_{t,3^{\nu_t}}$.

Тогда $g = \psi_2 * \psi_1$ и для всякого НЧ t, $2 < t$,

$$Var(3^{\nu_t}\cdot|\Phi_t|, g, \Phi_t) \,\&\, Var((2 - \frac{3}{3^{\nu_t}})\cdot|\Phi_t|, \psi_1, \Phi_t) \,\&$$

(2) $$Var(3\cdot|\Phi_t|, \psi_2, \Phi_t) \,\&\, \forall j x y\, (1 \le j \le 2 \,\&\, x \in \Phi_t \,\&\, y \in \Phi_t \supset$$

$$|\psi_j(y) - \psi_j(x)| \le 3^{\nu_t}\cdot|y - x|) \; .$$

Ясно, что выполнено б) и в) и что функции g, ψ_1, и ψ_2 удовлетворяют условию (T_1).

3) Пусть $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{n}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$. Без ограничения общности можно предполагать, что

$\forall i\,(1 \le i \le s \supset (\exists t\, B(i,t) \vee C(i)))$, где

$\forall i t\,((B(i,t) \rightleftharpoons (1 \le i \le s \,\&\, a_i \triangle b_i \subseteq \Phi_t))\,\&\,(C(i) \rightleftharpoons (1 \le i \le s \,\&$

$\exists k \ell\,(\neg(k = \ell)\,\&\, a_i = \mathfrak{Э}_r(\Phi_k)\,\&\, b_i = \mathfrak{Э}_n(\Phi_\ell)))))$.

Мы построим НЧ ℓ такое, что $2 < \ell \,\&\, \forall i t\,(B(i,t) \supset t \le \lambda_\ell)$ (см. 1)).

Тогда ввиду того, что для всякого НЧ t , $2 < t$, верно (2), мы для любых НЧ p и j, $1 \le j \le 2$, получаем

$$\sum_{i=1}^{s} |\psi_j(b_i) - \psi_j(a_i)| = \sum_{t=1}^{\lambda_\ell} \sum_{B(i,t)} |\psi_j(b_i) - \psi_j(a_i)| + \sum_{C(i)} |a_i \triangle b_i| \le$$

$$\sum_{\substack{1 \le t \le \lambda_\ell \\ \nu_t \le 4p+7}} \sum_{B(i,t)} 3^{\nu_t} \cdot |a_i \triangle b_i| + \sum_{\substack{1 \le t \le \lambda_\ell \\ 4p+7 < \nu_t}} 3 \cdot |\Phi_t| + \sum_{C(i)} |a_i \triangle b_i| \le$$

$$3^{4p+7} \cdot \sum_{i=1}^{s} |a_i \triangle b_i| + 3 \cdot \sum_{\substack{1 \le k \le \ell \\ p < \mathcal{Y}(i_k)}} |y_{i_k}| < 3^{4p+7} \cdot \sum_{i=1}^{s} |a_i \triangle b_i| + \frac{1}{3^{3p+6}} .$$

Итак, верно $\mathfrak{a}(\psi_1)\,\&\,\mathfrak{a}(\psi_2)$ и мы завершили доказательство части а).

4) Мы построим покрытие Ξ . Мы определим $\Xi_1 \rightleftharpoons \Phi_1$ и $\Xi_2 \rightleftharpoons \Phi_2$. Для всякого НЧ t, $2 < t$, пусть $r_{t-1} \rightleftharpoons 2 + 2 \cdot \sum_{\tau=3}^{t-1} (3^{\nu_\tau} + 1)$, а $\{\beta_i^t\}_{i=0}^{2\cdot(3^{\nu_t}+1)}$ возрастающая система РЧ, образованная числами: $\varkappa_{t,j}$ $(0 \le j \le 3^{\nu_t})$, $(\varkappa_{t,j} - \frac{1}{3^{\nu_t+t}} \cdot |\Phi_t|)$ $(1 \le j \le 3^{\nu_t})$, $\varkappa_{t,0} + \frac{m}{4 \cdot 3^{\nu_t}} \cdot |\Phi_t|$ $(1 \le m \le 2)$.

Мы определим для любого НЧ i , $1 \le i \le 2\cdot(3^{\nu_t}+1)$, $\Xi_{r_{t-1}+i} \rightleftharpoons \beta_{i-1}^t \triangle \beta_i^t$.

Тогда, очевидно, Ξ покрытие и верно г).

II Пусть φ монотонная функция типа A_1, $\mathfrak{a}_{\text{кл}}(\varphi)$, а ψ функция типа A_1 такие, что $\varphi = \varphi * \psi$. Тогда ввиду в)

φ является возрастающей на $0 \Delta 1$ и мы можем построить функцию φ^{-1} такую, что $\forall x (x \in 0\Delta 1 \supset \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x)$.

1) Мы докажем, что для всякого НЧ q существуют НЧ ℓ и k такие, что

(3) $$2 < k \,\&\, q + \ell < \mathcal{Y}(i_k) \,\&\, \frac{1}{3^\ell} \cdot |\mathcal{J}_{i_k}| <$$
$$< |\varphi^{-1}(\partial_\lambda(\mathcal{J}_{i_k})) \Delta \varphi^{-1}(\partial_n(\mathcal{J}_{i_k}))| .$$

Пусть q НЧ. Множество $\mathcal{H}$ всех пар НЧ ℓ и k таких, что (3), является, очевидно, алгорифмически перечислимым ([2], стр. 307). Следовательно, ввиду {8} из [2] и принципа А.А. Маркова нам достаточно показать, что множество $\mathcal{H}$ не может быть пустым.

Пусть ℓ и k_0 НЧ такие, что

(4) $$\max(\mathcal{Y}(i_1), \mathcal{Y}(i_2)) \le q + \ell \,\&\, a(\varphi, 4, \ell) \,\&$$
$$\& \forall k (\mathcal{Y}(i_k) \le q + \ell \supset k \le k_0) .$$

(Ввиду $a_{k\lambda}(\varphi)$ и свойств алгорифма $\mathcal{Y}$ такие НЧ не могут не существовать.)

Можно построить возрастающую систему НЧ $\{\tau_j\}_{j=1}^{\sigma}$ которая содержит все НЧ τ такие, что $1 \le \tau \le 3^{3(q+\ell+1)+7} - 2$ и сегмент $\dfrac{\tau}{3^{3(q+\ell+1)+7}} \Delta \dfrac{\tau+1}{3^{3(q+\ell+1)+7}}$ не перекрывается с сегментами $\mathcal{J}_{i_k}$ $(1 \le k \le k_0 \,\&\, \mathcal{Y}(i_k) \le q + \ell)$.

Мы получаем $$\frac{\sigma}{3^{3(q+\ell+1)+7}} \ge 1 - \sum_{j=0}^{q+\ell} \frac{1}{3^{3j+7}} > \frac{8}{9} .$$

Следовательно, ввиду (4) можно найти НЧ j_0, $1 \le j_0 \le \sigma \,\&$

$$\frac{1}{3^\ell} \cdot \frac{1}{3^{3(q+\ell+1)+7}} < \left|\varphi^{-1}\left(\frac{\tau_{j_0}}{3^{3(q+\ell+1)+7}}\right) \Delta \varphi^{-1}\left(\frac{\tau_{j_0}+1}{3^{3(q+\ell+1)+7}}\right)\right| .$$

Тогда легко построить последовательность ЦЧ $\{v_t\}_t$

и ЦЧ i , для которых выполнено

$$\forall t \left(\frac{v_{t+1}}{3^{3(t+1)+7}} \,\Delta\, \frac{v_{t+1}+1}{3^{3(t+1)+7}} \subseteq \frac{v_t}{3^{3t+7}} \,\Delta\, \frac{v_t+1}{3^{3t+7}}\right) \;\&$$

$$\left(q+\ell+1 \le t \supset \frac{1}{3^{\ell}} \cdot \frac{1}{3^{3t+7}} < \left|\varphi^{-1}\left(\frac{v_t}{3^{3t+7}}\right) \Delta\, \varphi^{-1}\left(\frac{v_t+1}{3^{3t+7}}\right)\right|\right) \;\&$$

$$v_{q+\ell+1} = r_{j_0} \;\&\; i_2 < i \;\&\; q+\ell < \mathcal{G}(i) \;\&\; \forall t\,(\mathcal{U}(\mathcal{G}(i)\,\square\, t) \simeq v_t)\,.$$

Несомненно существует НЧ k , для которого верно $i_k \le i$ & $\mathcal{J}_i \subseteq \mathcal{J}_{i_k}$. Ясно, что выполнено (3).

2) Пусть q НЧ, а ℓ и k НЧ такие, что (3). Тогда существует возрастающая система НЧ $\{t_i\}_{i=1}^{r}$ такая, что сегмент $\mathcal{J}_{i_k}$ является объединением сегментов системы $\{\Phi_{t_i}\}_{i=1}^{r}$. Заметим, что ввиду $i_k = \mu n(i_{k-1} < n \;\&\; \neg (\mathcal{J}_n \subseteq \bigcup_{s=1}^{k-1} \mathcal{J}_{i_s}))$ сегмент $\mathcal{J}_{i_k}$ не может перекрываться с сегментами $\mathcal{J}_{i_s}$, где $1 \le s \le k-1 \;\&\; \mathcal{G}(i_s) < \mathcal{G}(i_k)$.

Итак, $\forall i\,(1 \le i \le r \supset 4.\,\mathcal{G}(i_k)+7 \le v_{t_i})$ и мы ввиду (3) получаем

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{3^{v_{t_i}}} |\psi(\varkappa_{t_i,j}) - \psi(\varkappa_{t_i,j-1})| = \sum_{i=1}^{r} 3^{v_{t_i}} \cdot |\varphi^{-1}(\text{Э}_n(\Phi_{t_i})) - \varphi^{-1}(\text{Э}_\ell(\Phi_{t_i}))| \ge 3^{4\mathcal{G}(i_k)+7} |\varphi^{-1}(\text{Э}_\ell(\mathcal{J}_{i_k})) \,\Delta\, \varphi^{-1}(\text{Э}_n(\mathcal{J}_{i_k}))| > \frac{1}{3^{\ell}} \cdot 3^{\mathcal{G}(i_k)} > 3^{q}\,.$$

<u>Обозначение</u>. Пусть φ функция типа A_1 , а Ξ покрытие из леммы 3. Тогда мы посредством $\hat{\varphi}$ обозначим функцию такую, что для всяких НЧ ℓ и КДЧ x , $x \in \Xi_\ell$, выполнено

$\hat{\varphi}(x) = x$, если $\neg \exists k\,(\ell = 2+4k)$, а $\hat{\varphi}(x) = \partial_\lambda(\Xi_\ell) + |\Xi_\ell| \cdot \varphi\left(\frac{x - \partial_\lambda(\Xi_\ell)}{|\Xi_\ell|}\right)$, если $\exists k\,(\ell = 2+4k)$.

<u>Замечание 4</u>. Пусть φ , φ_1 и φ_2 функции типа A_1 , а g и ψ_1 функции и Ξ покрытие из леммы 3. Тогда

1) $\hat{\varphi}$ функция типа A_1 , $(g * \hat{\varphi})/\Xi = g$,

2) согласно лемме 2 выполнено $\mathfrak{a}(\varphi) \equiv \mathfrak{a}(\hat{\varphi}) \equiv \mathfrak{a}(\psi_1 * \hat{\varphi})$

3) φ обладает свойством (T_1) тогда и только тогда, когда $\hat{\varphi}$ (соотв. $(\psi_1 * \hat{\varphi})$) обладает свойством (T_1) и

4) $\varphi = \varphi_2 * \varphi_1 \equiv \hat{\varphi} = \hat{\varphi}_2 * \hat{\varphi}_1$.

<u>Доказательство теоремы 2</u>. Теорему мы докажем индукцией по m . Заметим, что всякая функция, обладающая свойством $\mathfrak{a}_{K\lambda}$, не может не быть функцией слабо ограниченной вариации на $0 \triangle 1$. Пусть g, ψ_1 и ψ_2 функции, Φ и Ξ покрытия, $\{\nu_t\}_t$ последовательность ЦЧ, а $\{\{\varkappa_{t,j}\}_{j=0}^{3^{\nu_t}}\}_t$ последовательность возрастающих систем РЧ, построенные согласно лемме 3. В следующем мы пользуемся без ссылок леммой 3 и замечанием 3.

I) $m = 1$. Мы определим $\mathcal{F}_{m+1} \rightleftharpoons g$. Тогда функция $\mathcal{F}_{m+1}$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

II) Пусть m НЧ и пусть мы уже сконструировали функцию $\mathcal{F}_{m+1}$, обладающую свойствами перечисленными в теореме. Тогда, в частности, существуют функции типа A_1 – φ, $f_1, f_2, \dots, f_m$, обладающие свойствами $\mathfrak{a}$ и (T_1) , такие, что $\mathcal{F}_{m+1} = \varphi * f_m * f_{m-1} \dots * f_1$.

1) Мы определим $\mathcal{F}_{n+2} \rightleftharpoons g * \hat{\mathcal{F}}_{n+1}$. Тогда $\mathcal{F}_{n+2}$ является равномерно непрерывной функцией типа A_1 и согласно замечанию 4 $\mathcal{F}_{n+2}/\Xi = g$, $\mathcal{F}_{n+2} = \psi_2 * (\psi_1 * \hat{\varphi}) * \hat{f}_n * \hat{f}_{n-1} \cdots * \hat{f}_1$ и функции $\psi_2, (\psi_1 * \hat{\varphi}), \hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_n$ обладают свойствами $\mathfrak{a}$ и (T_1). Следовательно, функция $\mathcal{F}_{n+2}$ обладает свойствами $\mathfrak{a}^{n+2}$, (S) и (T_1) (лемма 1).

2) Ввиду свойств функций g и $\mathcal{F}_{n+1}$ и $\mathcal{F}_{n+2} = g * \hat{\mathcal{F}}_{n+1}$ функция $\mathcal{F}_{n+2}$ не является постоянной ни на каком сегменте, содержащемся в $0 \vartriangle 1$.

3) Допустим, что существуют функции типа A_1 – φ_1, φ_2 и φ_3 такие, что $\mathcal{F}_{n+2} = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3$, $\mathfrak{a}_{\kappa\lambda}(\varphi_1) \,\&\, \mathfrak{a}_{\kappa\lambda}(\varphi_2) * \mathfrak{a}^{n}_{\kappa\lambda}(\varphi_3)$, φ_1 монотонная функция, и НЧ q, являющееся верхней гранью всякой вариационной суммы функции φ_2.

α) Ввиду 2) φ_1 возрастает на $0 \vartriangle 1$, и, следовательно, существует функция φ_1^{-1} такая, что $\forall x (x \in 0 \vartriangle 1 \supset$ $\supset \varphi_1(\varphi_1^{-1}(x)) = x)$. Мы определим $\psi \rightleftharpoons \varphi_1^{-1} * g$. Тогда $g = \varphi_1 * \psi$ и согласно свойствам функции g существует возрастающая система НЧ $\{t_i\}_{i=1}^{r}$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{3^{\nu_{t_i}}} |\psi(\varkappa_{t_i,j}) - \psi(\varkappa_{t_i,j-1})| > 3^{q} . \tag{5}$$

Ясно, что $\forall t x ((x \in \Phi_t \,\&\, \neg \exists j (0 \le j \le 3^{\nu_t} \,\&\, x = \varkappa_{t,j})) \equiv$ $\equiv \Theta_\lambda(\Phi_t) < \mathcal{F}_{n+2}(x) < \Theta_n(\Phi))$ и, следовательно,

$$\forall t (\varphi_3(\Theta_\lambda(\Phi_t)) < \varphi_3(\Theta_n(\Phi_t)) \,\&\, \forall x (x \in \Phi_t \supset \varphi_3(x) \in \varphi_3(\Theta_\lambda(\Phi_t)) \vartriangle \varphi_3(\Theta_n(\Phi_t)))) \tag{6}$$

и $\{\varphi_3(\Theta_\lambda(\Phi_t)) \vartriangle \varphi_3(\Theta_n(\Phi_t))\}_t$ – последовательность неперекрывающихся сегментов. Ввиду $\mathcal{F}_{n+2}/\Xi = g$ и (5) верно

$\forall i j\ (1 \le i \le \tau \ \&\ 0 \le j \le 3^{\nu_{t_i}} \supset \psi(\varkappa_{t_i,j}) = \varphi_2 * \varphi_3(\varkappa_{t_i,j}))$

и

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{3^{\nu_{t_i}}} |\varphi_2(\varphi_3(\varkappa_{t_i,j})) - \varphi_2(\varphi_3(\varkappa_{t_i,j-1}))| > 3^{q} \ .$$

β) Пусть i НЧ, $1 \le i \le \tau$. Мы докажем, что $\{\varphi_3(\varkappa_{t_i,j})\}_{j=0}^{3^{\nu_{t_i}}}$ возрастающая система КДЧ. Мы обозначим $\eta_j \rightleftharpoons \varphi_3(\varkappa_{t_i,j})$ $(0 \le j \le 3^{\nu_{t_i}})$.

$\beta1$) Согласно определению $\mathcal{F}_{n+2}$ и индукционному предположению (часть в)) функция φ_2 является строго монотонной на сегменте $min(\eta_{2j-1}, \eta_{2j}) \Delta\, max(\eta_{2j-1}, \eta_{2j})$ $(0 < 2j < 3^{\nu_{t_i}})$ и φ_2 не может быть монотонной на сегменте $min(\eta_{2j}, \eta_{2j+1}) \Delta\, max(\eta_{2j}, \eta_{2j+1})$ $(0 \le 2j < 3^{\nu_{t_i}})$.

$\beta2$) Ввиду (6) ясно, что $\eta_0 < \eta_1$.

Пусть s НЧ, $1 \le s < 3^{\nu_{t_i}}$, и пусть мы уже знаем, что $\eta_{s-1} < \eta_s$. Допустим, что верно $\eta_{s+1} \le \eta_s$. Тогда ввиду того, что выполнено $\varphi_2(\eta_{s+1}) = \varphi_2(\eta_{s-1}) \,\&\, \forall y (y \in \eta_{s-1} \Delta \eta_s \,\&\, \varphi_2(y) = \varphi_2(\eta_{s-1}) \supset y = \eta_{s-1})$, мы получаем $\eta_{s+1} = \eta_{s-1}$, что противоречит $\beta1$). Итак, верно $\neg(\eta_{s+1} \le \eta_s)$, т.е. $\eta_s < \eta_{s+1}$.

γ) Как отмечено выше, $\{\varphi_3(\mathfrak{Э}_l(\Phi_{t_i})) \Delta\, \varphi_3(\mathfrak{Э}_n(\Phi_{t_i}))\}_{i=1}^{\tau}$ система неперекрывающихся сегментов. Ввиду этого и β) видно, что (7) противоречит свойствам НЧ q.

<u>Доказательство теоремы 3</u>. Согласно теореме 2 существует последовательность функций типа $A_1 - \{\mathcal{F}_{n+1}\}_n$ такая,

что для всякого НЧ n функция $\mathcal{F}_{n+1}$ обладает свойствами, перечисленными в теореме 2, в частности верно $\neg\, a^{n}_{\kappa\lambda}(\mathcal{F}_{n+1})$.

Мы построим функцию $\mathcal{F}$ такую, что $\mathcal{F}(0) = 0$ и

$$\forall m\, x\left(x \in \frac{1}{2^{m}} \vartriangle \frac{1}{2^{m-1}} \supset \mathcal{F}(x) = \frac{1}{2^{m}} + \frac{1}{2^{m}} \cdot \mathcal{F}_{m+1}(2^{m} \cdot x - 1)\right) .$$

Тогда, как легко доказать, $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция типа A_1, которая обладает свойствами (S) и (T_1).

Пусть n НЧ. Мы допустим, что верно $a^{n}_{\kappa\lambda}(\mathcal{F})$. Тогда обладает свойством $a^{n}_{\kappa\lambda}$ и функция φ такая, что

$$\forall y\,(y \in 0 \vartriangle 1 \supset \varphi(y) = 2^{n} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{y+1}{2^{n}}\right) - 1) .$$

Однако, $\varphi = \mathcal{F}_{n+1}$ и мы получаем $a^{n}_{\kappa\lambda}(\mathcal{F}_{n+1})$, что невозможно.

Литература

[1] BARY N.: Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues I, Math.Annalen 103(1930),185-248.

[2] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды Мат.инст.им.В.А. Стеклова, LXVII (1962),295-361.

[3] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д. и ЦЕЙТИН Г.С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова, LXVII (1962),458-502.

[4] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 13(1972),227-251.

[5] ДЕМУТ О.: Достаточное условие представимости конструктивной функции в виде суммы двух суперпозиций абсо-

лютно непрерывных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 13(1972),265-282.

[6] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивном аналоге свойства (T_1), Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973),421-439.

[7] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивных аналогах свойств (N) и (S), Comment.Math.Univ. Carolinae 14(1973),565-582.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83 - 18600 Praha 8
Československo

(Oblatum 26.11.1973)