COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

15,4 (1974)

SUR DES PROPRIÉTÉS D'APPROXIMATION DES ESPACES DE DISTRIBUTIONS, I

Jiří JELÍNEK, Praha

Résumé: Pour un sous-espace $\mathcal{H}$ de distributions, on introduit un ensemble $\mathcal{A}$ de suites $\{\alpha_k\} \subset \mathcal{D}$, appelées suites de multiplicateurs, et un ensemble de suites $\{\rho_k\} \subset \mathcal{D}$, appelées suites de régularisations. On cherche quelles conclusions on peut déduire des rélations

$$\lim \alpha_k T = T \quad (\text{pour } T \in \mathcal{H}, \ \lim \alpha_k = 1),$$

$$\lim T * \rho_k = T, \qquad \lim \alpha_k T * \rho_k = T \qquad \text{etc.}$$

Mots clefs: L'espace normal (resp. permis) de distributions, suite de régularisations, suite de multiplicateurs, mesure de Dirac.

AMS: 46F05 Ref. Ž.: 7.972.4

Utilisons la notation introduite dans [3]. Un ensemble $\mathcal{H}$ de distributions sera noté $(\mathcal{H})_x$ pour montrer que la variable est signifiée par x. Pour la valeur d'une distribution T comme forme linéaire, au point $\phi \in \mathcal{D}$, on utilise la notation $\int T\phi$ ou $\int T(x)\phi(x)\,dx$.

Un espace de distributions $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$ est appelé normal [1], s'il est localement convexe, $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}$, la topologie de $\mathcal{D}$ est plus fine que la topologie induite par $\mathcal{H}$ et la topologie de $\mathcal{H}$ est plus fine que la topologie induite par $\mathcal{D}'$.

On dit qu'un espace de distributions $\mathcal{H}$ est permis [2] s'il est normal et si l'on a, pour chaque $T \in \mathcal{H}$,

$$(1) \qquad \lim_k \alpha_k T * \varphi_k = T, \qquad \lim_k \alpha_k (T * \varphi_k) = T$$

dans $\mathcal{H}$, où $\{\varphi_k\}$, $\{\alpha_k\}$ sont des suites fixes de $\mathcal{D}$ (appelées suites de régularisations resp. de multiplicateurs), $\operatorname{supp} \varphi_k \to \{0\}$ (sens topologique), $\varphi_k = \check{\varphi}_k \geq 0$ ($\check{\varphi}_k(x)$ désigne $\varphi_k(-x)$), $\int \varphi_k \to 1$, $\alpha_k \to 1$ dans $\mathcal{E}$ en restant borné dans $\mathcal{B}$.

Dans cet article, on se pose les questions, sous quelles conditions, la notion de l'espace permis ne dépend pas du choix plus précis des suites $\{\varphi_k\}$, $\{\alpha_k\}$, si les conditions (1) découlent l'une de l'autre, si on peut les remplacer par $\lim \alpha_k T = T$ et $\lim T * \varphi_k = T$ etc. On prend plusieurs suites de régularisations et de multiplicateurs en même temps. On modifie un peu la définition justement rappelée de ces suites pour obtenir plus de résultats. Ça permet d'envisager comme domaine des distributions un ouvert arbitraire $G \subset \mathbb{R}^n$. Dans la 2[e] partie, qui va paraitre dans ce journal, on se borne à un cas concret des suites de régularisation.

Supposition 1. Supposons donné un ensemble non vide de suites $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}$, appelées suites de régularisations, satisfaisant aux conditions suivantes: Si $\{\varphi_k\}$ est une suite de régularisation, on a $0 \leq \varphi_k \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} \varphi_k \to \{0\}$ (sens topologique), $\int \varphi_k \to 1$. Si de plus $0 \leq \lambda \in \mathcal{E}$, $\lambda(0) = 1$, la suite $\{\lambda \varphi_k\}$ est aussi une suite de régularisations.

On supprime alors la supposition $\varphi_k = \check{\varphi}_k$ de [1]. Mais on peut prendre comme suites de régularisations toutes les suites $\{\varphi_k\}$ de la forme $\varphi_k = \lambda \sigma_k$, $\sigma_k = \check{\sigma}_k \geq 0$, $\sigma_k \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} \sigma_k \to \{0\}$, $\int \sigma_k \to 1$, $0 \leq \lambda \in \mathcal{D}$, $\lambda(0) = 1$.

<u>Supposition 2</u>. Pour chaque multi-indice $p \geq 0$, soit M_p une fonction continue et positive, définie sur un ouvert G (dans ce qui suit, G coïncide avec la domaine des distributions de $\mathcal{H}$). Supposons

$$(2) \qquad M_p M_q \leq \varkappa_{pq} M_{p+q} \qquad (\varkappa_{pq} > 0) .$$

Désignons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $\alpha \in \mathcal{E}_G$ (multiplicateurs) satisfaisant à

$$(3) \qquad |D^p \alpha(x)| \leq a_p M_p(x)$$

pour tous les x et p, avec des nombres a_p dépendants de α. Définissons la convergence des suites dans $\mathcal{A}$ comme suit: $\lim_k \alpha_k = \alpha$ dans $\mathcal{A}$, si cela a lieu dans $\mathcal{E}_G$ et si l'on a en même temps

$$(4) \qquad |D^p \alpha_k(x)| \leq a_p M_p(x)$$

avec des a_p indépendents de k. Munissons encore $\mathcal{A}$ de la topologie localement convexe la plus fine conservant la convergence que nous venons de définir. Supposons les fonctions M_p choisies de manière qu'il y ait au moins une suite $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}_G$ convergeante vers 1 dans $\mathcal{A}$ et telle qu' à chaque compact $K \subset G$, on ait $\varphi_k = 1$ sur K sauf un nombre fini d'indices k.

Evidemment, pour $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{A}$, on a $\alpha\beta \in \mathcal{A}$; pour $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta_k \to \beta$ dans $\mathcal{A}$, on a $\alpha\beta_k \to \alpha\beta$ dans $\mathcal{A}$. Par exemple, pour $G = \mathbb{R}^n$, on peut poser $M_p = 1$ pour tous les p, ce qui mène à la notion habituelle déjà mentionnée de suite de multiplicateurs. Aussi bien, on peut poser $M_p(x) = \min(1, |x|^{-|p|})$. Pour $G \subset \mathbb{R}^n$, posons $M_p = \Sigma \binom{p}{q} P_q Q_{p-q}$ en désignant

$P_p(x) = \min(1, |x|^{-|p|})$,

$Q_p(x) = \max(1, (\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G))^{-|p|})$.

Comme suite $\{\alpha_k\}$ convergenate vers 1 de la façon exigée dans la supposition 2 on prend $\alpha_k(x) = \alpha(\frac{x}{k})\beta_k(x)$ où α est une fonction de $\mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage de zéro et β_k est une régularisation convenable de la fonction caractéristique de l'ensemble

$\{x ; \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) \geq k^{-1}\}$.

<u>Remarque</u>. Pour qu'un sous-ensemble convexe $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ soit voisinage de zéro, il faut et il suffit, d'après la définition de la topologie, que pour toute suite $\{\alpha_k\}$ convergeante vers zéro dans $\mathcal{A}$, on ait $\alpha_k \in \mathcal{U}$ sauf un nombre fini de k. Il n'y a pas d'autres suites convergeantes pour la topologie de l'espace $\mathcal{A}$ sauf celles introduites dans la supposition 2. En effet, il n'y en a pas d'autres même pour la topologie moins fine donnée par la base de voisinages de zéro $\{\alpha \in \mathcal{A} ; |D^p\alpha(x)| \leq f_p(x) M_p(x)$ pour tous les x et $|p| \leq m\}$ où m est un entier ≥ 0, f_p des fonctions continues, positives,

$\lim_{|x|\to\infty} f_p(x) = \infty$, $\lim_{x \to R^m \setminus G} f_p(x) = \infty$. Pour qu'un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{a}$ soit borné, il faut et il suffit que (3) soit rempli pour les $\alpha \in \mathcal{B}$, les nombres a_p ne dépendant pas de α. Pour qu'un sous-ensemble convexe, équilibré et fermé $\mathcal{V} \subset \mathcal{a}$ soit absorbant, il faut et il suffit que $\mathcal{V}$ contient un ensemble

$$\varepsilon \mathcal{V}_m = \{\alpha \in \mathcal{a} ; |D^p \alpha(x)| \leq \varepsilon M_p(x)$$

pour tous les x, $|p| \leq m\}$.

Cela résulte du fait que $\mathcal{a}$ muni de la topologie pour que les ensembles $\varepsilon \mathcal{V}_m$ forment une base de voisinage de zéro, est espace de Fréchet. On va désigner cet espace de Fréchet par $\mathcal{a}_F$.

Lemme 1. Soit L_j $(j = 1, 2, \ldots)$ des applications linéaires continues de $\mathcal{a}$ dans un espace localement convexe $\mathcal{H}$; supposons $\lim L_j(\alpha) = L(\alpha)$ pour chaque $\alpha \in \mathcal{a}$. Les L_j sont alors équicontinues. Par conséquent, L est continue.

Démonstration. Si les L_j n'étaient pas équicontinues, il y auraient un voisinage $\mathcal{V}$ de zéro dans $\mathcal{H}$, convexe et équilibré, une suite partielle $\{L_{j_k}\}_k$ et une suite $\{\alpha_k\}$ convergeante vers 0 dans $\mathcal{a}$ de sorte que

(5) $$L_{j_k}(\alpha_k) \notin \mathcal{V} \qquad (k = 1, 2, \ldots) .$$

Montrons que les α_k peuvent être trouvés de manière que $\alpha_k \in \mathcal{D}_G$ et que pour tout compact $K \subset G$, $\alpha_k = 0$ sur K sauf un nombre fini de k. Prenons d'abord α_k sans ces dernières conditions et choisissons une suite $\{\beta_\ell\} \subset \mathcal{D}_G$, $\beta_\ell \longrightarrow 1$ dans $\mathcal{a}$, de manière que pour tout compact $K \subset G$, $\beta_\ell(x) = 1$ sur K sauf un nombre fini de ℓ (supposition 2). Les restrictions des L_j sur $\mathcal{D}_G$ sont continues, donc équicontinues, car $\mathcal{D}_G$ est tonnelé. On peut alors trouver, à chaque ℓ, un k_ℓ si grand que

$$L_j(\beta_\ell \alpha_{k_\ell}) \in \frac{1}{2} V \qquad (j = 1, 2, \dots) .$$

D'après (5), on a $L_{j_{k_\ell}}(\alpha_{k_\ell} - \beta_\ell \alpha_{k_\ell}) \notin \frac{1}{2} V$. On peut facilement calculer, en vertu de (2), que les $\alpha_k \beta_\ell$ forment un ensemble borné de $\mathcal{a}$, ce qui signifie que la suite $\{\alpha_{k_\ell} - \beta_\ell \alpha_{k_\ell}\}$ converge vers 0 dans $\mathcal{a}$. Pour $\alpha \in \mathcal{a}$, on a $\lim \beta_i \alpha = \alpha$ dans $\mathcal{a}$. Alors, pour un i_ℓ suffisament grand, on a

$$L_{j_{k_\ell}}(\beta_{i_\ell}[\alpha_{k_\ell} - \beta_\ell \alpha_{k_\ell}]) \notin \frac{1}{4} V .$$

c'est à dire, les fonctions $\beta_{i_\ell}(\alpha_{k_\ell} - \beta_\ell \alpha_{k_\ell})$ forment une suite désirée. Il n'y a qu' à changer de notation et (5) sera rempli, ainsi que les conditions ajoutées à (5). Par conséquent, on peut supposer les $\operatorname{supp} \alpha_k$ disjoints, car dans le cas contraire, on prend une suite partielle.

On parviendra à la contradiction en trouvant une fonction $\beta \in \mathcal{a}$ pour laquelle $\lim L_j(\beta)$ n'existe pas. β sera de la forme

$$\beta = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_{k_{2\ell}}$$

où la suite partielle $\{\alpha_{k_\ell}\}$ sera définie par récurrence.

Comme les supports sont disjoints, $\beta \in \mathcal{A}$ et la série définissant β converge pour la topologie de $\mathcal{A}$. Prenons $k_1 = 1$. Etant donné $k_1, \dots, k_{\ell-1}$, soit k_ℓ si grand que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

$$(6) \qquad L_{j_{k_\ell}}(\alpha_{k_i}) \in L(\alpha_{k_i}) + \frac{1}{2^i} \mathcal{V} \qquad (i = 1, 2, \dots, \ell - 1)$$

grâce à la convergence simple des L_j,

$$(7) \qquad L_{j_{k_i}}(\alpha_{k_\ell}) \in \frac{1}{2^\ell} \mathcal{V} \qquad (i = 1, 2, \dots, \ell - 1)$$

grâce à la continuité des L_j. D'après (6), (5), (7), on a

$$L_{j_{k_{2\ell}}}(\beta) = \sum_{i=1}^{\ell-1} L_{j_{k_{2\ell}}}(\alpha_{k_{2i}}) + L_{j_{k_{2\ell}}}(\alpha_{k_{2\ell}}) + \sum_{i=\ell+1}^{\infty} L_{j_{k_{2\ell}}}(\alpha_{k_{2i}})$$

$$\notin \sum_{i=1}^{\ell-1} L(\alpha_{k_{2i}}) + \Big(1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}}\Big) \mathcal{V},$$

tandis que $L_{j_{k_{2\ell-1}}}(\beta) \in \sum_{i=1}^{\ell-1} L(\alpha_{k_{2i}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} \mathcal{V}$

à l'aide du même raisonement. On en voit que la suite $L_j(\beta)$ ne converge pas ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>. Sous les hypothèses du lemme 1, la convergence est uniforme sur chaque sous-ensemble borné de $\mathcal{A}$ ou, ce qui revient au même, sur chaque ensemble $\mathcal{B}$ de la forme

$$\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A} ; |D^p \alpha(t)| \leq a_p M_p(t)\} .$$

En effet, dans le cas contraire, il y aurait un voisinage $\mathcal{V}$ du zéro dans $\mathcal{H}$, une suite partielle $\{L_{j_k}\}$ et une suite $\{\alpha_k\} \subset \mathcal{B}$ de sorte que

$$L_{i_{k}}(\alpha_k) - L(\alpha_k) \nrightarrow v$$

pour tous les k . Comme $\{\alpha_k\}$ est borné dans $\mathcal{E}_G$,on peut trouver une suite partielle de $\{\alpha_k\}$ convergenate dans $\mathcal{E}_G$. Etant borné dans $\mathcal{A}$, cette suite y converge, ce qui contredit le lemme.

<u>Proposition 1</u>. Soit $\mathcal{H}$ un espace normal de distributions sur un ouvert $G \subset \mathbf{R}^n$ et soit $\{\beta_k\}$, $\{\varphi_k\}$ deux suites dans $\mathcal{D}$ telles que $\lim \beta_k T * \varphi_k = T$ dans $\mathcal{H}$ pour chaque $T \in \mathcal{H}$. Si $\mathcal{A}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, alors l'application $\alpha \mapsto \alpha T$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ est continue.

En effet, c'est une conséquence du lemme 1, car l'application en question est limite simple des applications $\alpha \to \alpha\beta_k T * \varphi_k$, continues même en tant qu'applications de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}$.

<u>Remarque</u>. Si l'on suppose que l'application $\varphi \to \varphi T$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}$ soit continue, on peut remplacer l'hypothèse $\lim \beta_k T * \varphi_k = T$ par $\lim \beta_k T = T$. La démonstration est analogue.

Pour la proposition suivante, la supposition 1 n'est pas encore nécessaire.

<u>Proposition 2</u>. Supposons que l'ensemble des suites de régularisations satisfasse aux conditions suivantes: si $\{\varphi_k\}$, $\{\sigma_k\}$ sont des suites de régularisations, il en est de même pour $\{\varphi_k * \sigma_k\}$, pour une suite partielle arbitraire $\{\varphi_{k_j}\}_j$ et pour une suite itérée arbitraire

$\{\rho_1, \dots, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_2, \rho_3, \dots\}$. Soit $\mathcal{H}$ un espace normal de distributions sur $\mathbb{R}^n$, $\{\beta_k\} \subset \mathcal{D}$ une suite et supposons que pour chaque $T \in \mathcal{H}$ et pour chaque suite $\{\rho_k\}$ de régularisations, on a $\lim \beta_k (T * \rho_k) = T$ dans $\mathcal{H}$. Si $T * \rho_k \in \mathcal{H}$ pour une suite $\{\rho_k\}$ de régularisations, alors $\lim T * \rho_k = T$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de zéro dans $\mathcal{H}$, convexe et équilibré. Pour chaque k trouvons un j_k de sorte que $j_k > j_{k-1}$,

$$\beta_{j_k} (T * \rho_k * \rho_{j_k}) \in T * \rho_k + \frac{1}{2} \mathcal{V} .$$

Comme $\lim \beta_{j_k} (T * \rho_k * \rho_{j_k}) = T$, on a $T * \rho_k \in$ $\in T + \mathcal{V}$ pour les k suffisamment grands.

<u>Proposition 3.</u> Soit $\mathcal{H}$ un espace normal de distributions sur $\mathbb{R}^n$, soient $\{\beta_k\}, \{\rho_k\}$ deux suites dans $\mathcal{H}$ telles que $\lim \beta_k T = T$, $\lim T * \rho_k = T$ dans $\mathcal{H}$ pour chaque $T \in \mathcal{H}$; supposons que $\mathcal{A}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. On a alors $\lim \alpha_k T * \rho_k = T$ quelle que soit la suite $\{\alpha_k\}$ convergeante vers 1 dans $\mathcal{A}$. L'application $\alpha \mapsto \alpha T$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ est continue. Si $\varphi \in \mathcal{D}$ est une fonction pour que l'application $\alpha \mapsto \alpha T * \varphi$ applique $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$, cette application est continue aussi.

<u>Démonstration</u>. Les dernières assertions résultent du lemme 1, car l'application $\alpha \mapsto \alpha T * \varphi$ est limite simple des applications $\alpha \mapsto (\alpha T * \varphi) \beta_k$, continues même en tant qu'applications de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}$, et l'application $\alpha \mapsto \alpha T$ est limite simple des applications

$\alpha \mapsto \alpha T * \rho_k$. Comme cette limite est uniforme sur $\{\alpha_k\}$ d'après le corollaire du lemme 1, on a

$\lim (\alpha_k T * \rho_k - \alpha_k T) = 0$, d'où

$\lim \alpha_k T * \rho_k = T$, ce qui achève la démonstration.

Désormais, on suppose donné un ensemble de suites de régularisations satisfaisant à la supposition 1. L' exemple suivant montre que, sans cette supposition, sous les hypothèses de la proposition 3, on n'obtient pas comme résultat $\lim \alpha_k (T * \rho_k) = T$.

__Exemple__. Prenons toutes les suites habituelles de régularisations et de multiplicateurs rappelées au commencement de cet article dans la définition de l'espace permis. Il est toujours $\rho_k = \check{\rho}_k$. Désignons par $\mathcal{H}$ l'espace des distributions T sur $\mathbb{R}^1$ de la forme

$$T(x) = \varphi(x) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(x-n)$$

où δ est la mesure de Dirac, $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\{a_n\}$ un ensemble borné de nombres. Définissons une forme linéaire ℓ sur $\mathcal{H}$ par la formule

$$\ell(T) = \mathrm{Pf.} \int \varphi(x) \cot g \pi x \, dx$$

(Pf. désigne la partie finie de l'intégrale [3]) et munissons $\mathcal{H}$ d'une topologie pour que le dual $\mathcal{H}'$ soit engendré par $\mathcal{D} \cup \{\ell\}$. Pour chaque suite $\{\rho_k\}$ de régularisations et pour chaque suite $\{\alpha_k\}$ de multiplicateurs, on a

$$\lim \ell(T * \rho_k) = \ell(T)$$

$$\lim \ell(\alpha_k T) = \ell(T) .$$

Pourtant, l'énoncé $\lim \ell(\alpha_k (T * \rho_k)) = \ell(T)$ n'est pas valable, si on pose $T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)$, $\lim \alpha_k = 1$ dans $\mathcal{A}$ $(M_p \equiv 1)$ de manière que la dérivée $\alpha_k'(k) = -1$, $\alpha_k'(j) = 0$ pour chaque entier $j \neq k$ et que α' soit constante aux voisinages des entiers du radius $\frac{1}{4}$.

Lemme 2. Soit $\mathcal{H}$ un espace normal de distributions sur $\mathbb{R}^n$. Supposons donné un ensemble de suites de régularisations satisfaisant à la supposition 1 et une suite $\{\beta_k\} \subset \mathcal{D}$ de sorte que $\lim T * \rho_k = T$ et $\lim \beta_k T = T$ dans $\mathcal{H}$, pour chaque $T \in \mathcal{H}$ et pour chaque suite de régularisations $\{\rho_k\}$. Supposons encore $\mathcal{A}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. Si $\{\rho_k\}$ est une suite de régularisations, alors à chaque voisinage $\mathcal{W}$ de 0 dans $\mathcal{H}$, il y a un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{E}$ et un tonneau (convexe, équilibré, fermé et absorbant) $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$, de sorte que

$$\mathcal{V} T * \mathcal{U} \rho_k \subset \mathcal{W} \qquad \text{pour tous les } k .$$

Démonstration. On peut supposer $\mathcal{W}$ convexe, équilibré et fermé dans $\mathcal{H}$. Soit $\{\mathcal{U}_\ell\}$ $(\ell = 1, 2, \dots)$ un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans $\mathcal{E}$ et soit, pour chaque ℓ, $\mathcal{V}_\ell$ l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{A}$ satisfaisant à $\alpha T * \mathcal{U}_\ell \rho_k \subset \mathcal{W}$ pour tous les k. $\mathcal{V}_\ell$ est évidemment convexe et équilibré; il est aussi fermé, car l'application $\alpha \to \alpha T * \lambda \rho_k$ $(\lambda \in \mathcal{E})$ est continue d'après la proposition 3 ($\{\frac{\lambda}{\lambda(0)}\rho_k\}$ est une suite de régularisations d'après la supposition 1; dans le cas $\lambda(0) = 0$ écrivons $\lambda = 1-(1-\lambda))$. Appliquons le théorème de Bair pour l'espace de Fréchet $\mathcal{A}_F$ (cf. la remarque suivant la supposition 2): pour montrer que $\mathcal{V}_\ell$ est absorbant pour un ℓ , il suffit de prouver que $\bigcup \mathcal{V}_\ell = \mathcal{A}$. Soit donc $\alpha \in \mathcal{A}$. L'application $\lambda \mapsto \alpha T * \lambda\varphi_k$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{H}$ est continue, étant limite simple (pour $j \to \infty$) des applications continues $\lambda \mapsto (\alpha T * \lambda\varphi_k)\beta_j$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{U}$ des $\lambda \in \mathcal{E}$ satisfaisant à $\alpha T * \lambda\varphi_k \in \mathcal{W}$ pour tous les k , est convexe, équilibré et fermé dans $\mathcal{E}$. Pour un $\lambda \in \mathcal{E}$, d'après les hypothèses et la supposition 1, la suite $\{\alpha T * \lambda\varphi_k\}$ est convergeante, donc absorbée par $\mathcal{W}$ ce qui signifie que $\mathcal{U}$ est absorbant, donc voisinage de 0 dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_\ell$ pour un ℓ , $\alpha \in \mathcal{V}_\ell$ c.q.f.d.

Notation. Soient $G = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}_F$ l'espace de Fréchet d'après la remarque suivant la supposition 2. Désignons par $\mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ l'espace des fonctions $\eta \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$ telles qu' à chaque compact $K \subset \mathbb{R}^n$ il y ait des nombres a_{pq} pour que

$$(8) \qquad |D_y^q D_t^p \eta(y,t)| \leq a_{pq} M(t)$$

pour tous les p, q, t et pour $y \in K$. En considérant chaque $\eta(y,t)$ comme fonction de la variable y à valeurs dans $\mathcal{A}_F$ munissons $\mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ de la topologie localement convexe de la convergence uniforme de toutes les dérivées

D_y^{q} sur tout compact $K \subset \mathbf{R}^n$.

Remarque. Un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ est constitué par les ensembles

$$\{\eta \in \mathcal{E}(\mathcal{A}) ; |D_t^p D_y^q \eta(y,t)| \leq \varepsilon M_p(t)$$

pour tous les $t \in \mathbf{R}$, $y \in K$, $|p| \leq m$, $|q| \leq m\}$; $\varepsilon > 0$, m entier, K compact dans $\mathbf{R}^n$.

Evidemment, $\mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ est à base dénombrable de voisinages de 0 . Car $\mathcal{E}$ est nucléaire (cf. [4],II, § 3, no 3, exemple 1, p. 80), $\mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel inductif complet $\mathcal{E} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}_F$.

Supposition 3. Supposons donné un sous-espace $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}(\mathcal{A}_F)$ de sorte que

$$\alpha \in \mathcal{A} , \eta \in \mathcal{N} \Longrightarrow \alpha(t)\eta(y,t) \in (\mathcal{N})_{y,t} .$$

Lemme 3. Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 2, si

$$(9) \quad \int T(t)\eta(x-t,t)\varphi_k(x-t)\,dt \in (\mathcal{H})_x$$

pour chaque $T \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{N}$ et pour chaque suite de régularisations $\{\varphi_k\}$, alors pour une suite de régularisations $\{\varphi_k\}$, les applications

$$\eta \mapsto \int T(t)\eta(x-t,t)\varphi_k(x-t)\,dt$$

de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{H}$ sont équicontinues $(k = 1, 2, \dots)$.

Démonstration. Démontrons d'abord le lemme pour le cas où $\mathcal{N} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}$, i.e. que chaque $\eta \in \mathcal{N}$ est de la forme

$$\eta(y,t) = \sum_i \alpha_i(t)\lambda_i(y) ,$$

où la somme est finie, $\alpha_i \in \mathcal{A}$, $\lambda_i \in \mathcal{E}$. Dans ce cas-là l'hypothèse (9) est toujours remplie, car on a

$$\int T(t)\eta(x-t,t)\varphi_k(x-t)\,dt = \sum \alpha_i T * \lambda_i \varphi_k .$$

La topologie de $\mathcal{N}$ coïncide avec la topologie du produit tensoriel inductif, alors l'assertion résulte immédiatement du lemme 2.

Maintenant, démontrons le lemme pour le cas général. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de 0 convexe et équilibré dans $\mathcal{H}$ et soit $\{\varphi_k\}$ une suite de régularisations. D'après ce qu'on vient de démontrer, il y a un entier $m \geq 0$, un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et un $\varepsilon' > 0$ de sorte que si $\eta' \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}$ avec

$$|D_t^p D_y^q \eta'(y,t)| \leq \varepsilon' M_p(t)$$

pour tous les $t \in \mathbb{R}^n$, $y \in K$, $|p| \leq m$, $|q| \leq m$, on a alors

$$(10) \qquad \int T(t)\eta'(x-t,t)\varphi_k(x-t)\,dt \in \frac{1}{4}(\mathcal{W})_x$$

pour tous les k . La suite $\{\beta_l\}$ du lemme 2 peut être choisie convergeante vers 1 dans $\mathcal{A}$, car d'après la proposition 3, l'application $\alpha \to \alpha T$ est continue. On peut calculer, tenant compte de (2), qu'il y a un $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon'$ de sorte que si

$$(11) \qquad |D_t^p D_y^q \eta(y,t)| \le \varepsilon M_p(t)$$

pour tous les $t \in \mathbb{R}^n$, $y \in K$, $|p| \le m$, $|q| \le m$, on a alors

$$|D_t^p D_y^q \eta(y,t)\beta_\ell(t)| \le \varepsilon' M_p(t)$$

pour les mêmes t, y, p, q, et pour tous les ℓ. Pour η vérifiant (11), on va démontrer

$$(12) \qquad \int T(t)\eta(x-t,t)\rho_k(x-t)\,dt \in \mathcal{W},$$

ce qui prouvera le lemme. Les applications

$$\alpha \mapsto \int T(t)\eta(x-t,t)\alpha(t)\beta_\ell(x)\rho_k(x-t)\,dt$$

de $\mathcal{A}$ dans $(\mathcal{H})_x$ sont continues, étant continues même en tant qu'applications de $\mathcal{E}$ dans $(\mathcal{D})_x$, car le support de $\beta_\ell(x)\rho_k(x-t)$ est compact. Leur limite, pour $\ell \to \infty$, est alors continue d'après le lemme 1, d'où il résulte que (en substituant β_ℓ à la place de α et $\ell = \lim \beta_\ell$ à la place de β_ℓ) pour un ℓ_k suffisamment grand, on a

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\int T(t)\eta(x-t,t)\beta_{\ell_k}(t)\rho_k(x-t)\,dt \ - \\ &\int T(t)\eta(x-t,t)\rho_k(x-t)\,dt \qquad \in \frac{1}{4}(\mathcal{W})_x . \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E} \otimes \mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathcal{A})$, on peut trouver un $\eta'_k \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}$ de sorte que

$$|D_t^p D_y^q [\eta(y,t) - \eta'_k(y,t)]| \le \varepsilon M_p(t)$$

pour tous les $t \in \mathbb{R}^n$, $y \in X$, $|p| \leq m$, $|q| \leq m$. En même temps, $\eta'_k(y,t)$ peut être choisi si proche de $\eta(y,t)$ sur le support de $\beta_{\ell_k}(t)\varphi_k(y)$, qu'on ait

$$(14) \quad \begin{aligned} &\int T(t)\eta(x-t,t)\beta_{\ell_k}(t)\varphi_k(x-t)dt - \\ &\int T(t)\eta'_k(x-t,t)\beta_{\ell_k}(t)\varphi_k(x-t)dt \in \frac{1}{4}(\mathcal{W})_x , \end{aligned}$$

car $(\frac{1}{4}\mathcal{W}) \cap \mathcal{D}$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{D}$. Il s'ensuit de la définition de ε et du choix de η'_k , resp. η (11) que

$$|D_t^p D_y^q(\eta(y,t) - \eta'_k(y,t))\beta_{\ell_k}(t)| \leq \varepsilon' M_p(t) ,$$

$$|D_t^p D_y^q \eta(y,t)\beta_{\ell_k}(t)| \leq \varepsilon' M_p(t)$$

pour tous les $t \in \mathbb{R}^n$, $y \in X$, $|p| \leq m$, $|q| \leq m$, ce qui implique, pour les mêmes p, q, y, t ,

$$|D_t^p D_y^q \eta_k(y,t)\beta_{\ell_k}(t)| \leq 2\varepsilon' M_p(t) .$$

Comme $\eta'(y,t)\beta_{\ell_k}(t) \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{a}$, on obtient du choix de ε' (10) que

$$\int T(t)\eta'_k(x-t,t)\beta_{\ell_k}(t)\varphi_k(x-t)dt \in \frac{1}{2}(\mathcal{W})_x$$

Cette relation avec (13) et (14) donnent le résultat (12).

__Remarque__. L'hypothèse (9) du lemme 3 est remplie (même pour $\mathcal{N} = \mathcal{E}(\mathcal{a})$) , si l'on suppose, sous les hypothèses du lemme 2, que $\mathcal{H}$ soit quasi-complet.

En effet, soit $\eta \in \mathcal{E}(\mathcal{a})$. Comme $\mathcal{E} \otimes \mathcal{a}$ est dense dans $\mathcal{E}(\mathcal{a})$ et que $\mathcal{E}(\mathcal{a})$ est à base dénombrable de voisinages de 0 , il y a une suite $\{\eta_\ell\} \subset \mathcal{C} \otimes \mathcal{A}$ convergeante vers η dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Pour $\mathcal{N} = \mathcal{C} \otimes \mathcal{A}$, l'hypothèse (9) est toujours remplie, comme on l'a montré dans la première partie de la démonstration du lemme 3. Donc, d'après ce lemme, les distributions

$$\int T(t)\,\eta_\ell(x-t,t)\,\rho_k(x-t)\,dt \qquad (\ell = 1, 2, \dots)$$

forment une suite de Cauchy dans $(\mathcal{H})_x$. Elles convergent donc dans $(\mathcal{H})_x$ vers une distribution, et dans $\mathcal{D}'$, elles convergent vers la même distribution, c.à-d. vers

$$\int T(t)\,\eta(x-t,t)\,\rho_k(x-t)\,dt\ ,$$

c.q.f.d.

Théorème. Soit $\mathcal{H}$ un espace normal de distributions sur $\mathbb{R}^n$. Supposons donnés un ensemble de suites de régularisations d'après la supposition 1, un ensemble de multiplicateurs $\mathcal{A}$ d'après la supposition 2 et un ensemble $\mathcal{N}$ d'après la supposition 3 de sorte que $\mathcal{A}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ et que pour chaque $T \in \mathcal{H}$, pour chaque suite $\{\rho_k\}$ de régularisations, pour chaque $\eta \in \mathcal{N}$ et pour une suite $\{\beta_k\} \subset \mathcal{A}$, on ait $\lim\limits_{k\to\infty} T * \rho_k = T$, $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k T = T$ et que (9) soit remplie. Alors

$$\lim_{k\to\infty} \int T(t)\,\eta(x-t,t)\,\rho_k(x-t)\,dt = \eta(0,x)\,T(x)$$

dans $\mathcal{H}$ et la limite est uniforme par rapport à η si η parcourt un ensemble borné arbitraire de $\mathcal{N}$.

Remarque. Rappelons la proposition 3, montrant que $\lim \beta_\ell T = T$ est valable pour toutes les suites $\{\beta_\ell\}$ convergeantes vers 1 dans $\mathcal{A}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}$, convexe et équilibré. En vertu du lemme 3 et de la remarque le précédant, trouvons un $\varepsilon > 0$, un entier m et un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ de sorte que si $\eta \in \mathcal{N}$ satisfait à

$$(15) \qquad |D_t^p D_y^q \eta(y, t)| \leq M_p(t)$$

pour tous les $t \in \mathbb{R}^n$, $y \in K$, $|p| \leq m$, $|q| \leq m$, on ait

$$\int T(t)\, \eta(x-t, t)\, \rho_\varepsilon(x-t)\, dt \in \mathcal{W} .$$

Désignons $D_t^p D_y^q$ par $D^{(q,p)}$. Considérons le développement de Taylor par rapport à y

$$\eta(y, t) = \sum_{|q| \leq m} \frac{1}{q!} D^{(q,0)} \eta(0, t) y^q + \varphi(y, t)$$

et démontrons le théorème pour chaque terme de ce développement. Comme η parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{N}$, il y a des nombres a_{pq} tels que

$$(16) \qquad |D^{(q,p)} \eta(y, t)| \leq a_{pq} M_p(t)$$

pour tous les p, q, t et pour $|y| \quad 1$. On peut calculer (d'abord pour $|q| = m+1$ et puis par récurrence), qu'il y a des nombres b_{pq}, indépendents du choix de la fonction η satisfaisant à (16), tels que

$$|D^{(q,p)} \varphi(y, t)| \leq b_{pq} M_p(t) |y|^{m+1-|q|}$$

pour tous les t, p, $|y| < 1$, $|q| \leq m+1$. Choisissons une fonction $\gamma \in D_{R^n}$, $\gamma(y) = 1$ pour $|y| \leq \frac{1}{2}$,

$\operatorname{supp} \gamma \subset \{|y| \le 1\}$. Pour $0 < \varkappa < 1$, on a

$$|D^q \gamma(\frac{y}{\varkappa})| \le \varkappa^{-|q|} \cdot \max_y |D^q \gamma(y)| ,$$

$\gamma(\frac{y}{\varkappa}) = 0$ pour $|y| > \varkappa$, et on obtient des dernières inégalités

$$|D^{(q,p)}[\varphi(y,t)\gamma(\frac{y}{\varkappa})] \le \sum_{q' \le q} \binom{q}{q'} b_{pq'} M_p(t) |y|^{m+1-|q'|} \varkappa^{-|q-q'|} \cdot \max |D^{q-q'}\gamma|$$

$$\le c_{pq} \varkappa^{m+1-|q|} \cdot M_p(t) ,$$

ce qui est valable pour tous les y . Si on choisit $\varkappa$ suffisamment petit, on voit que la fonction

$\eta(y,t) = \varphi(y,t)\gamma(\frac{y}{\varkappa})$ satisfait à (15) même pour tous les y , ce qui signifie que

$$\int T(t)\varphi(x-t,t)\gamma(\frac{x-t}{\varkappa}) \varphi_k(x-t)dt \in \mathcal{W} .$$

Si nous nous bornons aux k si grands que les supports des φ_k soient contenues dans $\{|y| \le \frac{\varkappa}{2}\}$, où on a $\gamma(\frac{y}{\varkappa}) = 1$, nous pouvons supprimer le facteur $\gamma(\frac{x-t}{\varkappa})$ dans la relation dernière et l'assertion est démontré pour φ .

Pour les autres termes du développement de Taylor, calculons:

$$\lim_{k \to \infty} \int T(t) \frac{1}{q!} D^{(q,0)}\eta(0,t) \cdot (x-t)^q \varphi_k(x-t)dt =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{q!} [D^{(q,0)} \eta(0,x) T(x)] * x^q \rho_k(x) \quad .$$

Pour $q = 0$, on obtient le résultat $\eta(0,x)T(x)$. Pour les autres q , on écrit $x^q \rho_k(x) = \rho_k(x) - (1-x^q)\rho_k(x)$. $\{(1-x^q)\rho_k(x)\}$ est aussi une suite de régularisations (supposition 1), alors le résultat est 0 . Il reste à montrer que la limite dernière est uniforme, sous les conditions (16). L´ aplication

$$\alpha \to \alpha T(x) * x^q \rho_k(x)$$

de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{H}$ est continue d´après la proposition 3 et le reste est une conséquence du corollaire du lemme 1.

Remarque. On obtient, comme cas spécial, les assertions: si $\lim \alpha_k = \alpha$ dans $\mathcal{Q}$, on a $\lim \alpha_k (T * \rho_k) = \alpha T$ (en posant $\eta(t,y) = \alpha_m(t+y)$ pour $|y| \leq 1$) et $\lim \alpha_k T * \rho_k = \alpha T$, à condition que $M_p(x+y) \leq$ $\leq k_p M_p(x)$ pour $|y| \leq 1$. Cette condition est toujours remplie, si $M_p \geq M_q$ pour $p \leq q$. De meilleurs résultats seront obtenus pour un cas spécial de l´ensemble des suites de régularisations, dans la 2e partie de cet article.

Bibliographie

[1] L. SCHWARTZ: Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann.Inst.Fourier VII(1957).

[2] Y. HIRATA: On convolutions in the theory of distributions, Journ.Sci.Hiroshima 22(1958),88-98.

[3] L. SCHWARTZ: Théorie des Distributions, Hermann,Paris 1957.

[4] A. GROTHENDIECK: Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires, Mémoirs A.M.S.16(1955).

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, 18600 Praha 8
Československo

(Oblatum 17. .1974)