COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

15,4 (1974)

К ТЕОРИИ ВРАЩЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНО КОМПАКТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

А.С. ПОТАПОВ, Воронеж

__Резюме:__ Выделяется класс K_2 -операторов, включенный в класс предельно компактных операторов и содержащий все уплотняющие относительно достаточно хороших мер некомпактности отображения, для которых определяется индекс на границе относительно открытого подмножества выпуклого замкнутого множества ЛВП.

__Ключевые слова:__ Предельно компактный оператор, мера некомпактности, уплотняющий оператор, вращение векторного поля, индекс оператора, фундаментальное множество.

АМ : 47Н10, 55С25 7.987.53

---

§ 0. __Введение__. В настоящей статье продолжается изучение класса предельно компактных и уплотняющих операторов в локально выпуклых пространствах (ЛВП), начатое в [1]. Для векторных полей вида $I - f$ с предельно компактным оператором f в [1] (см. также [2]) было введено и изучено понятие вращения, обобщающее классическое понятие вращения вполне непрерывных векторных полей (степени отображений $I - f$ с вполне непрерывным оператором f) (см. [3],[4]). При этом оператор f предполагался заданным на замыкании (относительно) открытого подмножества некоторого выпулого замкнутого множества. Известно, что понятие вращения вполне непрерывного векторного поля в банаховом пространстве определено в случае, когда оператор f задан только на границе открытого ограниченного множества. По теореме Дугунджи [5] такой оператор можно продолжить на замыкание области с сохранением полной непрерывности. Это дает возможность определить вращение в указанной ситуации через степень Лере - Шаудера. Для предельно компактных и уплотняющих операторов такое построение провести не удается, поскольку не ясно, можно ли их продолжить с сохранением соответствующих свойств.

В работах М.А. Красносельского, П.П. Забрейко, В.В. Стрыгина [6], В.В. Обуховского [7], Ю.И. Сапронова [8] предложен новый простой способ определения вращения уплотняющих векторных полей в банаховом пространстве, основанный на понятии фундаментального множества, введенном в [6], и теореме Дугунджи. Для операторов, уплотняющих относительно достаточно хорошей меры некомпактности, этот способ позволяет определить вращение на границе области. Для операторов же, определенных на замыкании области, этот прием, как показали М.А. Красносельский и П.П. Забрейко, приводит к определению вращения при условии так называемой компактной сужаемости - последнее условие менее ограничительно, чем предельных компактность.

Настоящая работа преследует две цели. Во-первых, мы хотим обобщить метод фундаментальных множеств на случай локально выпуклых пространств, для которых аналог теоремы Дугунджи не известен. Во вторых, будет выделен класс так называемых K_2-операторов, включенный в класс предельно компактных операторов и содержащий все уплотняющие относительно хороших мер некомпактности отображения, для которого указанный метод дает возможность определить вращение на границе. В § 1 мы напоминаем некоторые определения из теории предельно компактных операторов и даем новое определение предельно компактноко оператора, эквивалентное старому для квази-полных ЛВП. В несколько иной ситуации, класс операторов, вводимых этим определением, уже рассматривался ранее Й. Данешем в [13],[14]. Во втором параграфе показывается, что в некотором смысле вопрос о возможности определения вращения предельно компактных векторных полей на границе имеет отрицательный ответ. Здесь же дается определение K_2 -оператора, весьма близкое к новому определению предельно компактного оператора. Третий и четвертый параграфы посвящены определению индекса K_2-оператора, заданного на границе относительно открытого подмножества выпуклого замкнутого множества ЛВП (для упрощения обозначений и формулировок мы будем использовать слова "индекс оператора f как эквивалент выражения "вращение векторного поля $I - f$ ") и выяснению его свойств. В последнем, пятом параграфе рассматривается класс K_1 -операторов, которые занимают промежуточное положение между предельно компактными и K_2-операторами. Доказывается, что на K_1-операторы обобщается принцип Шаудера - Тихонова. Вопрос о перенецении результатов §§ 3 и 4 на K_1-операторы остается открыт м.

§ 1. Предельно компактные операторы

1.1. Напомним некоторые понятия из теории предельно компактных и уплотняющих операторов (см. [2]).

Пусть Λ -произвольное множество, $\mathcal{M}$ -подмножество ЛВП E . Для оператора $f : \Lambda \times \mathcal{M} \longrightarrow E$ построим трансфинитную последовательность множеств $\{T_\alpha\}$ по следующим формулам:

$$T_0 = \overline{co}\, f(\Lambda \times \mathcal{M}) ,$$

$$(1) \quad T_\alpha = \overline{co} f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap T_{\alpha-1})] , \quad \text{если } \alpha - 1 \text{ существует,}$$

$$T_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} T_\beta , \quad \text{если } \alpha - 1 \text{ не существует.}$$

Все множества этой последовательности выпуклы, замкнуты и инвариантны относительно f в том смысле, что $f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap T_\alpha)] \subseteq T_\alpha$, и если $\eta < \alpha$, то $T_\alpha \subseteq T_\eta$. Если мощность порядкового числа δ больше мощности множества всех подмножеств пространства E , то в трансфинитной последовательности $\{T_\alpha : 0 \le \alpha \le \delta\}$ появятся повторения, что для невозрастающей последовательности множеств равносильно стабилизации, т.е. $T_\alpha = T_\delta$, если $\alpha \ge \delta$.

<u>Определение 1.1.</u> Предельное множество T_δ трансфинитной последовательности (1) называется предельной областью значений оператора f на множестве $\Lambda \times \mathcal{M}$ и обозначается через $f^\infty(\Lambda \times \mathcal{M})$. Оператор $f : \Lambda \times \mathcal{M} \longrightarrow E$ называется предельно компактным, если его сужение на множество $\Lambda \times (\mathcal{M} \cap f^\infty(\Lambda \times \mathcal{M}))$ есть компактный оператор, т.е. замыкание множества $f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap f^\infty(\Lambda \times \mathcal{M}))]$ компактно. В частности, оператор f предельно компактен на $\Lambda \times \mathcal{M}$, если $f^\infty(\Lambda \times \mathcal{M}) = \emptyset$.

<u>Определение 1.2.</u> Пусть E - ЛВП; 2^E -множество всех подмножеств E ; $\mathfrak{M}$ - подмножество 2^E , которое вместе с каждым множеством Ω содержит множество $\overline{co}\,\Omega$; $(A, \le)$ - частично упорядоченное множество. Мерой некомпактности в E

называется функция $\Psi : \mathfrak{M} \longrightarrow A$ такая, что $\Psi(\overline{co}\,\Omega) = \Psi(\Omega)$ для любого $\Omega \in \mathfrak{M}$. Мера некомпактности Ψ называется монотонной, если из $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ следует $\Psi(\Omega_1) \leq \Psi(\Omega_2)$ и полуаддитивно несингулярной, если $\Psi(\Omega \cup \{x\}) = \Psi(\Omega)$, где x – произвольный элемент E.

<u>Определение 1.3</u>. Оператор $f : \Lambda \times \mathcal{M} \longrightarrow E$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности Ψ, если из $\Omega \subseteq \mathcal{M}$ следует, что Ω, $f(\Lambda \times \Omega) \in \mathfrak{M}$, и если любое множество $\Omega \subseteq \mathcal{M}$, удовлетворяющее неравенству $\Psi[f(\Lambda \times \Omega)] \geq \Psi(\Omega)$, относительно компактно.

Если $\mathcal{M}$ - замкнутое множество в ЛВП E, Λ -компактное топологическое пространство, то непрерывный упло няющий относительно монотонной меры некомпактности оператор $f : \Lambda \times \mathcal{M} \longrightarrow E$ будет предельно компактным на $\Lambda \times \mathcal{M}$.

1.2. Для наших построений удобно дать другое определение предельно компактного оператора, которое в казиполном ЛВП оказывается эквивалентным определению 1.1.

<u>Определение 1.4</u>. Оператор $f : \Lambda \times \mathcal{M} \longrightarrow E$, где Λ - произвольное множество, $\mathcal{M}$ - некоторое подмножество ЛВП E назовем K_0-оператором, если равенство

$$\overline{co}\, f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap T)] = T$$

возможно лишь в случае, когда T компактно.

Подобные условия рассматривал И. Данеш в [13].

<u>Лемма 1.2</u>. Для предельной компактности оператора $f : \Lambda \times \mathcal{M} \longrightarrow E$ где E - квазиполное ЛВП, необходимо и

достаточно, чтобы он был X_0 -оператором.

<u>Доказательство</u>. Если f - X_0 -оператор, то в силу утверждения а) леммы 1.1.4 из [2] множество $f^{\infty}(\Lambda \times \mathcal{M})$ компактно и в силу г) f предельно компактен на $\Lambda \times \mathcal{M}$. Обратно, если f предельно компактен на $\Lambda \times \mathcal{M}$ и для некоторого множества T $\overline{co}\, f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap T)] = T$, то f предельно компактен и на $\Lambda \times (\mathcal{M} \cap T)$, а так как $f^{\infty}[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap T)] = T$, то T компактно (мы воспользовались утверждением в) и д) леммы 1.1.4)

Лемма доказана.

В произвольном ЛВП E класс предельно компактных операторов содержит в себе класс X_0 -операторов.

§ 2. <u>X_2 -операторы</u>

2.1. Пусть E - линейное топологическое пространство.

<u>Определение 2.1</u> [6]. Непустое выпуклое замкнутое множество $S \subseteq E$ называется фундаментальным для оператора f относительно множества $\mathcal{M}$ на котором задан f, если
а) S компактно; б) $f(S \cap \mathcal{M}) \subseteq S$; в) S "не отталкивает" точки множества $\mathcal{M}$ это означает, что если $x_0 \in \mathcal{M} \setminus S$, то $f(x_0)$ не может принадлежать объединению $K(x_0)$ всех выходящих из x_0 лучей, продолжения которых через точки множества S или, что то же, из включения $x_0 \in \overline{co}\,(f(x_0) \cup S)$ следует включение $x_0 \in S$.

Примером оператора, обладающего фундаментальным множеством может служить предельно компактный оператор с непустой предельной областью значений $f^{\infty}(\mathcal{M})$. Как не трудно видеть, $f^{\infty}(\mathcal{M})$ является фундаментальным для f относительно $\mathcal{M}$ множеством.

Пусть непрерывный оператор f, обладающий фундаментальными множествами S, задан на границе ограниченной области Ω банахова пространства E. Продолжая по теореме Дугунджи сужения оператора f на $\dot{\Omega} \cap S$, мы получим вполне непрерывные операторы $\tilde{f}(S): E \longrightarrow S$. Если оператор f не имел неподвижных точек на $\dot{\Omega}$, то операторы $\tilde{f}(S)$ также не будут иметь неподвижных точек на границе, следовательно будет определен индекс $ind(\tilde{f}(S), \dot{\Omega})$ который будем называть индексом оператора f на фундаментальном множестве S. Ставится задача: при каких условиях на оператор f индекс оператора на любом фундаментальном множестве будет одним и тем же ? Очевидно, для вполне непрерывных отображений индекс оператора на любом фундаментальном множестве одинаков и совпадает с индексом оператора f на $\dot{\Omega}$.

Если некоторый оператор f обладает свойством иметь одинаковый индекс на любом фундаментальном множестве, то его индекс $ind(f, \Omega)$ можно определить, положив равным этому общему числу $ind(\tilde{f}(S), \Omega)$. Однако не для любого оператора, обладающего фундаментальными множествами это возможно. Мы сейчас приведем пример, показывающий, что для произвольного предельно компактного (K_0) оператора, заданного на границе открытого множества, индекс оператора таким образом определен быть не может.

Предварительно заметим, что если оператор f задан на границе, то независимость $ind(\tilde{f}(S), \dot{\Omega})$ от фундаментального множества заведомо не может быть доказана, если f обладает фундаментальными множествами, лежащими по разные стороны от границы (внутри и вне области), так как в этом случае оператор $\tilde{f}(S)$ гомотопен оператору $g(x) \equiv x_0$, где $x_0 \in S$ и $ind(\tilde{f}(S), \dot{\Omega})$ равен 1 или 0 в зависимости от того, где лежит S; $S \subset \Omega$ или $S \subset E \setminus \bar{\Omega}$.

На единичной сфере T_1 банахова пространства c_0 сходящихся к нулю последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_n \to 0$ при $n \to \infty$ определим оператор F формулой

$$(1) \qquad F(x) = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots) = (1, \xi_1, \xi_2, \dots).$$

Оператор F не имеет неподвижных точек. Действительно, если $Fx = x$, то из (1) получается, что $\xi_n = 1$ при любом n, то такая последовательность не сходится к нулю. Так как $F(T_1) \subset T_1$, то, очевидно, точка $x_0 = \theta = (0, 0, \dots, 0, \dots)$. является фундаментальным для F относительно T_1 множеством и принадлежит единичному шару, рассматриваемому в нашем случае в качестве области, на границе которй задан оператор. Но точка $x_1 = (2, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ также является фундаментальным для F множеством и лежит вне единичного шара. Необходимо проверить лишь выполнение условия в) из определения фундаментального множества. Если допустить, что для некоторой точки $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in T_1$, $F(x) \in K(x)$, то это означало бы, что x является внутренней точкой отрезка, соединяющего $F(x)$ и x_1, $x = \lambda F(x) + (1-\lambda)x$, $0 < \lambda < 1$, или

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (\lambda, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \dots) +$$
$$+ (2(1-\lambda), 0, 0, \dots) = (2-\lambda, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \dots) ,$$

в частности $\xi_1 = 2-\lambda > 1$, чего быть не может, так как $\|x\| = max\{|\xi_i| : i = 1, 2, \dots\} = 1$. Предельная же компактность оператора F очевидна: $F^{\infty}(T_1) = \emptyset$.

2.2. Определение K_2 -оператора. Сейчас мы введем класс операторов, для которых будет определен индекс на границе (относительно) открытого множества ЛВП.

Определение 2.2. Оператор $f : \Lambda \times \mathcal{M} \longrightarrow E$, где Λ - произвольное множество, $\mathcal{M}$ - подмножество ЛВП E , будем называть K_2 -оператором, если для любой пары точек x_1 , $x_2 \in E$ и любого множества $T \subseteq E$ из равенства

$$\overline{co}(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap T)]) = T$$

вытекает, что T - компакт.

K_2 -оператором является, например, любой уплотняющий относительно полуаддитивно несингулярной меры некомпактности оператор.

Очевидно, любой K_2 -оператор является K_0 -оператором. Обратное, как мы увидим ниже, не верно.

K_2 -оператор обладает фундаментальными множествами. Более того, справедлива следующая теорема

Теорема 2.1. Для каждого K_2 -оператора f можно указать фундаментальное множество T , содержащее наперед заданную пару точек $x_1, x_2 \in E$.

Доказательство. Фундаментальность множества T для оператора $f: \Lambda \times \mathcal{M} \longrightarrow E$ означает, что T фундаментально для каждого оператора $f(\lambda, \cdot)$, $\lambda \in \Lambda$.

Рассмотрим в пространстве E семейство Σ всех множеств, удовлетворяющих всем условиям определения фундаментального для f множества, за исключением, быть может, условия а) (компактности) и содержащих точки x_1 и x_2. Это семейство не пусто: ему принадлежит, например, множество

$$S_0 = \overline{co}\,(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup f[\Lambda \times \mathcal{M}]) .$$

Кроме того, если $S \in \Sigma$, то множество

$$S^* = \overline{co}\,(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap S)]$$

также содержится в Σ. Действительно, так как $S^* \subseteq \subseteq S$, то

$$f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap S^*)] \subseteq f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap S)] \subseteq$$
$$\subseteq \overline{co}\,(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap S)] = S^* .$$

Условие в) определения фундаментального множества также выполняется: если $x \in \mathcal{M} \setminus S$, то S^* "не отталкивает" $f(\Lambda \times x)$ ибо в противном случае "отталкивало" бы и более широкое множество S если же $x \in S \setminus S^*$, то $f(\Lambda \times x) \in S^*$. Множество $T = \bigcap\limits_{S \in \Sigma} S$ очевидно, также принадлежит семейству и, в силу минимальности, удовлетворяет равенству:

$$\overline{co}\,(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap T)]) = T .$$

Следовательно, множество T компактно и является фундаментальным для оператора f

Теорема доказана.

§ 3. Определение индекса K_2-оператора

Теорема Дугунджи утверждает, что любое непрерывное отображение f замкнутого подмножества $\mathcal{M}_0$ метрического пространства $\mathcal{M}$ в локально выпуклое линейное топологическое пространство E можно продолжить до непрерывного отображения $g : \mathcal{M} \longrightarrow E$ с сохранением выпуклой оболочки области значений. Для отображений, действующих в ЛВП ($\mathcal{M}$ - ЛВП) аналог этой теоремы не известен. Однако могут быть доказаны утверждения о "квазипродолжении" с сохранением нужных свойств, когда новый оператор g не в точности совпадает с f на $\mathcal{M}_0$, а лишь достаточно близок к нему. В основе доказываемой ниже леммы лежит известная конструкция "квазипроектора", предложенная Ю. Шаудером и впервые использованная для ЛВП, по-видимому, М. Нагумо [12].

Замечание. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что в ЛВП топология задана достаточным семейством непрерывных полунорм $\{p\}$.

Лемма 3.1 (о квазипродолжении). Пусть f - непрерывное отображение компактного подмножества $\mathcal{M}_0$ равномерного пространства $\mathcal{M}$ в ЛВП E . Тогда для любой непрерывной на E полунормы p существует непрерывное конечномерное отображение $g : \mathcal{M} \longrightarrow E$ такое, что $g(\mathcal{M}) \subset \overline{co}\, f(\mathcal{M}_0)$

и $p(fx - gx) \leq 1$ для любого $x \in \mathcal{M}_0$.

<u>Доказательство</u>. Отображение f , непрерывное на компакте $\mathcal{M}_0$, равномерно непрерывно на нем. Поэтому существует непрерывная на $\mathcal{M}$ полуметрика ρ такая, что из $\rho(x, y) \leq 1$ вытекает неравенство $p(fx - fy) \leq \frac{1}{2}$ $(x, y \in \mathcal{M}_0)$. Выделим в $\mathcal{M}_0$ конечную $\frac{1}{2}$ -сеть S для $\mathcal{M}_0$ относительно полуметрики ρ : $: \forall(x \in \mathcal{M}_0)\ [\rho(x, S) \leq \frac{1}{2}]$ и для каждого $y \in S$ определим непрерывную положительную функцию $\mu_y : \mathcal{M} \longrightarrow R^1$ формулой

$$\mu_y(x) = \begin{cases} 1 + \varepsilon - \rho(x, y), & \text{если } \rho(x, y) \leq 1 \\ \varepsilon, & \text{если } \rho(x, y) \geq 1 . \end{cases}$$

Положительное число ε будет выбрано ниже. Искомое отображение g зададим теперь следующим образом:

$$g(x) = [\sum_{y \in S} \mu_y(x)]^{-1} \sum_{y \in S} \mu_y(x) f(y) .$$

Очевидно, что g непрерывно, конечномерно и отображает $\mathcal{M}$ в $co\, f(\mathcal{M}_0)$ (точнее, в $co\, f(S)$). Пусть $x \in \mathcal{M}_0$. Тогда

$$p(fx - gx) \leq [\sum_{y \in S} \mu_y(x)]^{-1} \sum_{y \in S} \mu_y(x) p(fx - fy) =$$

(1)

$$= \mu \sum_{y \in S_1} \mu_y(x) p(fx - fy) + \mu \sum_{y \in S_2} \mu_y(x) p(fx - fy) ,$$

где

$S_1 = \{y \in S : \rho(x,y) \le 1\}$, $S_2 = S \setminus S_1$, $\mu = [\sum_{y\in S} \mu_y(x)]^{-1}$.

Поскольку S есть $\frac{1}{2}$ -сеть для M_0 относительно ρ , найдется $y \in S$ такое, что $\rho(x,y) \le \frac{1}{2}$, т.е. $\mu_y(x) \ge \frac{1}{2} + \varepsilon$. Следовательно, $\mu = [\sum_{y\in S} \mu_y(x)]^{-1} \le 2$. Далее, при $y \in S_2$ $\mu_y(x) = \varepsilon$. Обозначив через m число элементов множества S и через d p -диаметр (компактного) множества $f(M_0)$, получим:

$$\mu \sum_{y\in S_2} \mu_y(x)\, p(fx - fy) \le 2dm\varepsilon .$$

Поэтому если $\varepsilon \le \frac{1}{4dm}$ (при $d = 0$ это неравенство не накладывает ограничений на ε , то второе слагаемое в правой части (1) не больше $\frac{1}{2}$. Первое же слагаемое тоже не превосходит $\frac{1}{2}$:

$$\mu \sum_{y\in S_1} \mu_y(x)\, p(fx - fy) \le \frac{1}{2}\, \mu \sum_{y\in S_1} \mu_y(x) \le$$
$$\le \frac{1}{2}\, \mu \sum_{y\in S} \mu_y(x) = \frac{1}{2} .$$

Лемма доказана.

Определение 3.1. Оператор g , удовлетворяющий условиям леммы 3.0, будем называть квазипродолжением относительно полунормы p оператора f с множества M_0 на все пространство.

3.2. Пусть R - выпуклое замкнутое множество в ЛВП E. Мы будем рассматривать R как самостоятельное топологическое пространство с индуцированной топологией. Пусть на границе $\dot{\Omega}$ открытого в R множества Ω определен непрерывный K_2-оператор $f: \dot{\Omega} \longrightarrow R$, не имеющий неподвижных точек. Рассмотрим некоторое его фундаментальное относительно $\dot{\Omega}$ множество S, имеющее непустое с $\dot{\Omega}$ пересечение, существующее в силу теоремы 2.1. Очевидно, можно считать, что $S \subset R$. Так как множество $\dot{\Omega} \cap S$ компактно, то существует такая непрерывная полунорма p, что $p(x - fx) > 1$ при $x \in \dot{\Omega} \cap S$. Пусть g - квазипродолжение оператора f относительно этой полунормы p с множества $\dot{\Omega} \cap S$ на все пространство: $g: E \longrightarrow S$, $p(fx - gx) \leq 1$ $(x \in \dot{\Omega} \cap S)$. У оператора g также нет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$. Действительно, если $x \in \dot{\Omega} \setminus S$, то $gx \neq x$, так как $gx \in S$. Если же $x \in \dot{\Omega} \cap S$, то

$$p(x - gx) = p(x - fx + fx - gx) \geq p(x - fx) - p(fx - gx) > 1 - p(fx - gx) \geq 0 .$$

Следовательно, для оператора g определен относительный индекс на $\dot{\Omega}$ $ind(g, \dot{\Omega})$ (вращение векторного поля $I - g$ на $\dot{\Omega}$ относительно R).

<u>Определение 3.2</u>. Относительный индекс оператора g на $\dot{\Omega}$ мы назовем индексом K_2-оператора f на $\dot{\Omega}$ относительно R и обозначим $ind(f, \Omega)$: $ind(f, \Omega) = ind(g, \dot{\Omega})$.

Для обоснования корректности введенного понятия нужно показать, что $ind(g, \dot\Omega)$ не зависит ни от выбора полунормы p ни от выбора квазипродолжения g, ни от выбора фундаментального множества S.

Лемма 3.1. Пусть S - некоторое фундаментальное для оператора f относительно $\dot\Omega$ множество, p - непрерывная полунорма такая, что $p(x - fx) > 1$ при $x \in \dot\Omega \cap S$. Тогда для любых двух квазипродолжений g_1 и g_2 относительно p оператора $f|_{\dot\Omega \cap S}$

$$ind(g_1, \dot\Omega) = ind(g_2, \dot\Omega).$$

Доказательство. В нашей ситуации операторы g_1 и g_2 будут гомотопны на $\dot\Omega$. Достаточно установить, что $G(\lambda, x) = (1-\lambda) g_1 x + \lambda g_2 x \neq x$ при $x \in \dot\Omega$, $\lambda \in [0,1]$. Если $x \in \dot\Omega \setminus S$, то это очевидно, а если $x \in \dot\Omega \cap S$, то

$$p[x - (1-\lambda) g_1 x - \lambda g_2 x] \geq p(x - fx) - p[fx - (1-\lambda) g_1 x - \lambda g_2 x] > 1 - [(1-\lambda) p(fx - g_1 x) + \lambda p(fx - g_2 x)] \geq 0,$$

что и требовалось.

Лемма 3.2. Пусть S - некоторое фундаментальное для оператора f относительно $\dot\Omega$ множество p_1 и p_2 непрерывные полунормы такие, что $p_1(x - fx) > 1$, $p_2(x - fx) > 1$ при $x \in \dot\Omega \cap S$. Тогда для любых двух квазипродолжений g_1 и g_2 относительно полунорм p_1 и p_2 соответственно оператора $f|_{\dot\Omega \cap S}$

$$ind(g_1, \dot\Omega) = ind(g_2, \dot\Omega).$$

Доказательство. Функция $p(x)=\max\{p_1(x), p_2(x)\}$ также является непрерывной полунормой и $p(x-fx)>1$ при $x\in\dot{\Omega}\cap S$. Так как, очевидно, $p(fx-g_1x)\le 1$ и $p(fx-g_2x)\le 1$ при $x\in\dot{\Omega}\cap S$, т.е. g_1 и g_2 являются квазипродолжениями оператора $f\big|_{\dot{\Omega}\cap S}$ и относительно полунормы p, то мы оказываемся в условиях леммы 3.1.

Лемма 3.3. Индекс K_2-оператора f не зависит от выбора фундаментального множества.

Доказательство. Пусть S_1 и S_2 – два фундаментальных оператора f относительно $\dot{\Omega}$ множества таких, что $S_1\cap\cap\dot{\Omega}\ne\emptyset$, $S_2\cap\dot{\Omega}\ne\emptyset$. Предположим, что $S_1\subseteq S_2$. В силу фундаментальности множества S_1, компактности множества $S_2\cap\dot{\Omega}$ и замкнутости $K_1(x)$ (см. определение фундаментального множества) существует такая непрерывная полунорма, что

$$p(x-fx)>1 \quad (x\in S_2\cap\dot{\Omega}),$$

$$\inf_{y\in K_1(x)} p(fx-y)>1 \quad (x\in S_2\setminus S_1).$$

По этой полунорме построим квазипродолжения g_1 и g_2 оператора f с множеств $S_1\cap\dot{\Omega}$ и $S_2\cap\dot{\Omega}$ соответственно. Докажем, что операторы g_1 и g_2 линейно гомотопны на Для этого достаточно установить, что при $x\in\Omega$ и $\lambda\in[0,1]$, $(1-\lambda)g_1x+\lambda g_2x\ne x$.

Если $x\in\dot{\Omega}\setminus S_2$, то неравенство справедливо, так как $(1-\lambda)g_1x+\lambda g_2x\in S_2$. При $x\in S_1\cap\dot{\Omega}$ как и в лемме 3.1 убеждаемся, что

$$p\,[x-(1-\lambda)g_1x-\lambda g_2x] > 0 \ .$$

Осталось рассмотреть случай, когда $x \in S_2 \setminus S_1$. Если для некоторого x из этого множества допустить равенство $x = (1-\lambda)g_1x + \lambda g_2 x$, то это означало бы, что точка g_2x принадлежит множеству $K_1(x)$, т.е. $\inf_{y\in K_1(x)} p(g_2x-y) = 0$.

С другой стороны

$$\inf_{y\in K_1(x)} p(g_2x-y) \geq \inf_{y\in K_1(x)} p(fx-y) - $$
$$- p(fx-g_2x) > 1 - p(fx-g_2x) \geq 0 \ .$$

Противоречие. Следовательно, $ind(g_1, \dot{\Omega}) = ind(g_2, \dot{\Omega})$.

Если фундаментальные множества S_1 и S_2 не пересекаются, то этот случай сводится к рассмотренному следующим образом. По теореме 2.1 построим фундаментальное множество S_3, содержащее точки $x_1 \in S_1 \cap \dot{\Omega}$ и $x_2 \in S_2 \cap \dot{\Omega}$. Пересечение двух фундаментальных множеств, очевидно, также фундаментально. А теперь переход от множества S_1 к S_2 можно совершить, рассматривая последовательно пары: S_1 и $S_1 \cap S_3$; $S_1 \cap S_3$ и S_3; S_3 и $S_3 \cap S_2$; $S_3 \cap S_2$ и S_2.

Лемма доказана.

3.4. Замечание. Мы рассматривали в лемме лишь фундаментальные множества, имеющие непустое пересечение с границей, ибо если существует фундаментальное для оператора f относительно $\dot{\Omega}$ множество S_0 не пересекающееся с границей, то можно построить фундаментальное множество S_1, такое, что $S_1 \cap \dot{\Omega} \neq 0$ и $S_1 \ni x_0$, где x_0 - произвольная точка множества S_0 и затем доказать гомотопность операторов g_1 и $g_2 x \equiv x_0$ (g_1 - квазипродолжение f с $S_1 \cap \dot{\Omega}$). Таким образом (это уже отмечалось в § 2) если у K_2-оператора f существует не пересекающиеся с $\dot{\Omega}$ фундаментальное множество S_0 , то $ind(f, \Omega)$ будет равен 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит S_0 Ω или $E \setminus \bar{\Omega}$. Отсюда мы также можем сделать вывод, что у K_2 -оператора не может быть двух фундаментальных множеств S_1 и S_2 таких, что $S_1 \subset \Omega$ и $S_2 \subset E \setminus \bar{\Omega}$.

§ 4. Свойства индекса

Из свойств индекса вполне непрерывных (конечномерных) опраторов непосредственно вытекают основные свойства индекса K_2-операторов определенных на границе относительно открытого множества.

Определение 4.1. Пусть на границе $\dot{\Omega}$ открытого в R множества Ω заданы непрерывные K_2 -операторы f_1 и f_2 , действующие в R . Будем говорить, что оператор f_1 гомотопен оператору f_2 на $\dot{\Omega}$ относительно R , если существует непрерывный K_2-оператор $F : [0,1] \times \dot{\Omega} \longrightarrow R$,удовлетворяющий следующим требованиям:

а) $F(0,\cdot) = f$; б) $F(1,\cdot) = f_2$; в) $F(\lambda, x) \neq x$ при любых $\lambda \in [0,1]$, $x \in \dot{\Omega}$.

Теорема 4.1. Если K_2 -операторы f_1 и f_2 гомотопны на $\dot{\Omega}$ относите ьно R , то их индексы совпадают.

Доказательство. Пусть $F: [0,1]\times\dot{\Omega}\to R$ - оператор, осуществляющий гомотопный переход от f_1 и f_2, S - фундаментальное для F относительно $\dot{\Omega}$ множество, существующее в силу теоремы 2.1. Так как оператор $F(\lambda,x)$ непрерывен и множество $S\cap\dot{\Omega}$ компактно, то существует непрерывная полунорма p такая, что $p(x-F(\lambda,x))>1$ при всех $\lambda\in[0,1]$ и $x\in S\cap\dot{\Omega}$. Пусть $G(\lambda,x): [0,1]\times R\to S$ - квазипродолжение оператора F относительно p с множества $S\cap\dot{\Omega}$. Очевидно, для любого $\lambda\in[0,1]$ оператор $G(\lambda,\cdot)$ является квазипродолжением относительно p соответствующего оператора $F(\lambda,\cdot)$. Так как $G(\lambda,x)\neq x$ при $\lambda\in[0,1]$ и $x\in\dot{\Omega}$, то операторы $G(0,\cdot)$ и $G(1,\cdot)$ гомотопны на $\dot{\Omega}$. Из определения индекса оператора получ ем

$$ind(f_1,\Omega)\overset{def}{=\!=}ind(G(0,\cdot),\dot{\Omega})=$$

$$=ind(G(1,\cdot),\dot{\Omega})\overset{def}{=\!=}ind(f_2,\Omega)\quad.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.2. Пусть K_2-оператор $f:\dot{\Omega}\to R$ непрерывен на $\dot{\Omega}$ и $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, где Ω_1, Ω_2 - открытые в R попарно непересекающиеся множества. Допустим, что $x\neq fx$ при $x\in\dot{\Omega}=\dot{\Omega}_1\cup\dot{\Omega}_2$. Тогда
$ind(f,\Omega)=ind(f,\Omega_1)+ind(f,\Omega_2)$.

Теорема 4.3. Пусть непрерывный K_2-оператор f, заданный на границе $\dot{\Omega}$ относительно открытого множества Ω и не имеющий неподвижных точек на $\dot{\Omega}$ допускает непрерывное продолжение $\tilde{f}$ на все Ω, причем $\tilde{f}$ также является K_2-

оператором. Если $ind(f,\Omega)\neq 0$, то оператор $\tilde{f}$ имеет в Ω хотя бы одну неподвижную точку.

<u>Доказательство</u>. Пусть S - некоторое фундаментальное для оператора $\tilde{f}$ относительно $\bar{\Omega}$ множество такое, что $\bar{\Omega}\cap S\neq\emptyset$. Очевидно, оно является также фундаментальным и для оператора f относительно $\dot{\Omega}$. Допустим, что оператор $\tilde{f}$ не имеет неподвижных точек. Тогда, в силу компактности множества $\bar{\Omega}\cap S$, найдется непрерывная полунорма p такая, что $p(x-\tilde{f}x)>1$ при $x\in\bar{\Omega}\cap S$. По этой полунорме p построим квазипродолжение $\tilde{g}$ оператора $\tilde{f}$ с множества $\bar{\Omega}\cap S$: $\tilde{g}(R)\subset S$, $p(\tilde{g}x-\tilde{f}x)\leq 1$ $(x\in\bar{\Omega}\cap S)$. Ясно, что $\tilde{g}$ является также квазипродолжением оператора f с множества $\dot{\Omega}\cap S$ относительно p. Следовательно

$$0\neq ind(f,\Omega)\overset{def}{=\!=}ind(\tilde{g},\dot{\Omega}) .$$

По свойству относительного индекса вполне непрерывного оператора $\tilde{g}$ должен иметь в Ω неподвижную точку: $\exists(x_0\in\Omega)[\tilde{g}x_0=x_0]$. Так как $\tilde{g}(\bar{\Omega})\subset S$, то $x_0\in\bar{\Omega}\cap S$. В силу выбора полунормы p, с одной стороны для точки x_0 $p(x_0-fx_0)>1$, а с другой $p(x_0-fx_0)=p(\tilde{g}x_0-fx_0)\leq 1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

<u>Теорема 4.4</u>. Пусть непрерывный K_2-оператор f задан на границе $\dot{\Omega}$ относительно открытого ограниченного множества Ω и пусть для некоторой точки $x_0\in\Omega$ из равенства $fx-x_0=\lambda(x-x_0)$ $(x\in\dot{\Omega})$ вытекает $\lambda<1$. Тогда $ind(f,\Omega)=1$.

Доказательство. В условиях теоремы точка x_0 является фундаментальной для оператора f относительно $\dot{\Omega}$ множеством. В силу замечания 3.4 $ind(f, \Omega) = 1$.

Теорема 4.5. Пусть заданный на границе $\dot{\Omega}$ ограниченного выпуклого относительно открытого множества Ω непрерывный K_2-оператор f не имеет неподвижных точек и $f(\dot{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$. Тогда $ind(f, \Omega) = 1$.

Доказательство. Справедливость теоремы немедленно следует из того, что в рассматриваемой ситуации любая точка x_0, лежащая внутри множества Ω будет фундаментальным для f относительно $\dot{\Omega}$ множеством.

§ 5. K_1-операторы.

По аналогии с K_0 и K_2-операторами дадим следующее определение:

Определение 5.1. Оператор $f: \Lambda \times \mathcal{M} \longrightarrow E$, где Λ -произвольное множество, $\mathcal{M}$ -подмножество ЛВП E будем называть K_1-оператором, если для любой точки $x_1 \in E$ и любого множества $T \subseteq E$ из равенства

$$\overline{co}(\{x_1\} \cup f[\Lambda \times (\mathcal{M} \cap T)]) = T$$

вытекает компактность множества T.

Очевидно, любой K_1-оператор является K_0-оператором. Обратное не верно. Например, оператор F из пункта 2.1 не будет K_1-оператором, так как имеет место равенство

$$\overline{co}\,[\{(-1,0,0,\dots,0,\dots)\}\cup f(\overline{B}_1)] = \overline{B}_1 ,$$

где $\overline{B}_1$ - замкнутый единичный шар пространства C_0 .

Если K_0-оператор переводит выпуклое замкнутое ограниченное множество в себя, то он не обязательно имеет неподвижную точку (примером может служить все тот же оператор F из п. 2.1, рассмотренный на единичном шаре $\overline{B}_1$) , но для K_1 -операторов уже имеет место аналог принципа Шаудера-Тихонова, который весьма просто доказывается.

<u>Теорема 5.1</u>. Пусть непрерывный K_1 -оператор f переводит выпуклое замкнутое ограниченное множество $\overline{\Omega}$ локально выпуклого пространства E в себя: $f(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{\Omega}$. Тогда f имеет в $\overline{\Omega}$ хотя бы одну неподвижную точку.

<u>Доказательство</u>. Пусть x_0 - произвольная точка множества $\overline{\Omega}$. Образуем трансфинитную последовательност множеств $\{T_\alpha\}$ по формулам:

$$T_0 = \overline{co}\,[\{x_0\}\cup f(\overline{\Omega})] ,$$

$$T_\alpha = \overline{co}\,[\{x_0\}\cup f(T_{\alpha-1})] , \text{ если } \alpha - 1 \text{ суще твует,}$$

$$T_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} T_\beta \qquad , \text{ если } \alpha - 1 \text{ не существует.}$$

$\{T_\alpha\}$ - убывающая последовательность непустых выпуклых замкнутых подмножеств $\overline{\Omega}$, инвариантных относительно f . Очевидно, что с некоторого момента последовательность $\{T_\alpha\}$ становится стационарной: существует такое δ, что $T_\delta = T_{\delta+1} = T$. Это означает, что

$$\overline{co}\,[\{x_0\}\cup f(T)] = T$$

и, так как f - K_1 -оператор, то T - компакт. Непрерывный оператор f переводит выпуклые компактное непустое множество T в себя, следовательно [11], он имеет в T неподвижную точку. Теорема доказана.

Автор искренне благодаре Б.Н. Садовскому, под руководством которого была выполнена эта работа.

Литература

[1] Б.Н. САДОВСКИЙ: О мерах некомпактности и уплотняющих операторах, Пробл.мат.анализа сложн.сист. Воронеж, вып.2(1968),89-119.

[2] Б.Н. САДОВСКИЙ: Предельно компактные и уплотняющие операторы, УМН XXУП(1972),81-146.

[3] М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ: Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М.,1956.

[4] Ж. ЛЕРЕ, Ю. ШАУДЕР: Топология и функциональные уравнения, Успехи Мат.наук 1(1946),71-85.

[5] J. DUGUNDJI: An extension of Tietze's theorem, Pacific Journ.Math.1(1951),353-367.

[6] П.П. ЗАБРЕЙКО, М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, В.В. СТРЫГИН: О принципах инвариантности вращения, Изв.ВУЗ Математика 5(120)(1972),51-57-

[7] В.В. ОБУХОВСКИЙ: О некоторых принципах неподвижной точки для многозначных уплотняющих операторов, Тр.мат.фак.Воронеж.ун-т 4(1971),70-79.

[8] Ю.И. САПРОНОВ: К гомотопической классификации уплотняющих отображений, Тр.мат.фак.Воронеж.ун-та вып.6(1972),78-80.

[9] Ю.Г. БОРИСОВИЧ: Об относительном вращении компактных

векторных полей в линейных пространствах, Тр.сем.по функ.анализу,Воронеж,12 (1969),3-27.

[10] Ю.Г. БОРИСОВИЧ, Ю.И. САПРОНОВ: К топологической теории компактно сужаемых отображений, Тр. сем.по функ.анализу,Воронеж,12(1969), 43-68-

[11] А.Н. ТИХОНОВ: Ein Fixpunktsatz, Math.Ann.111(1935), 767-776.

[12] M. NAGUMO: Degree of mapping in convex linear topological spaces, Amer.J.Math.73(1951), 497-511.

[13] J. DANEŠ: Some fixed point theorems, Comment.Math. Univ.Carolinae 9(1968),223-235.

[14] J. DANEŠ: Generalized concentrative mappings and their fixed points, Comment.Math.Univ.Carolinae 11(1970),115-136.

Воронежский ордена Ленина государственный
университет им. Ленинского комсомола
СССР, Воронеж

(Oblatum 1.10.1974)