COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

15,3 (1974)

О КОНСТРУКТИВНОМ АНАЛОГЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛУЗИНА

Рудольф КРЫЛ , Прага

Содержание: В настоящей заметке доказано, что в конструктивной математике имеет место аналог теоремы Лузина (см. [1], стр. 215), а именно, что для всякого элемента пространства S (аналог пространства измеримых почти всюду на сегменте $0 \Delta 1$ конечных функций) осуществима равномерно непрерывная функция, которая на $0 \Delta 1$ почти всюду равномерно дифференцируема к этому элементу.

Ключевые слова: Конструктивная функция, измеримость функций по Лебегу, пространство L_1 , сингулярная функция, почти всюду равномерная дифференцируемость.

AMS: Primary: 02E99 Ref. Ž.: 2.644.2
Secondary: 28A20, 26A24

В следующем мы пользуемся определениями, обозначениями и результатами из [2] и [3]. На этом основании нам удастся доказать теорему методом близким классическому.

Напомним сначала несколько определений и результатов.

1) Пусть $P(x)$ некоторое свойство КДЧ. Говорим, что $P(x)$ выполнено для почти всех КДЧ из сегмента $0 \Delta 1$, если существует последовательность S -множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ такая, что для всякого НЧ k имеет место

а) $\mathcal{G}^{k+1} \subset \mathcal{G}^k$ и мера S -множества $\mathcal{G}^k$ меньше чем $\frac{1}{3^k}$

б) $\forall x (\neg (x \in \mathcal{G}^k) \supset P(x))$.

2) Очевидно, что если для всякого НЧ ℓ свойство $P_\ell(x)$ выполняется для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$, то свойство $\forall_\ell P_\ell(x)$ также выполнено для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$.

3) Пусть $\{F_\ell\}_\ell$ последовательность ступенчатых остовов, x, u КДЧ, $0 \le x \le 1$. Тогда $P(u, \{F_\ell\}_\ell, x)$ значит: последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n x)\}_n$ определена и сходится к u (содержательно: u является значением $\{F_\ell\}_\ell$ в точке x).

4) Пусть f функция, $\{F_\ell\}_\ell$ последовательность ступенчатых остовов, $\mathcal{G}$ S-множество, p и s НЧ.

$Д(f, \{F_\ell\}_\ell, p, \mathcal{G}, s)$ означает:

мера $\mathcal{G}$ меньше чем $\frac{1}{3^p}$ и выполнено

$$\forall x (x \in 0\Delta 1 \;\&\; \neg (x \in \mathcal{G}) \supset \exists u (P(u, \{F_\ell\}_\ell, x) \;\&$$

$$\& \forall y (|y-x| < \frac{1}{s} \supset |f(y)-f(x)-u(y-x)| \le \frac{1}{3^p} |y-x|))) .$$

$Д(f, \{F_\ell\}_\ell)$ означает:

существуют последовательности S-множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ и НЧ $\{s_k\}_k$ такие, что $\forall_k\, Д(f, \{F_\ell\}_\ell, k, \mathcal{G}^k, s_k)$.

5) Если $Д(f, \{F_\ell\}_\ell)$ то, содержательно говоря, f является почти всюду на $0\Delta 1$ равномерно дифференцируемой к значению $\{F_\ell\}_\ell$ (см. [3] замечание 1).

6) Пусть H сегмент, тогда $(H)^\circ \leftrightharpoons Эл(H) \triangledown Эm(H)$.

7) Пусть x, u КДЧ, $u \ge 0$, тогда $\lambda(x, u) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons max(min(u, x), -u)$

Замечание 1. Возможно построить функцию π (конструктивный аналог функции Кантора) такую, что выполнено

1) π является неубывающей

2) $\forall x\,((x \le 0 \supset \pi(x) = 0)\ \&\ (x \ge 1 \supset \pi(x) = 1))$

3) π является сингулярной и, следовательно, имеет место $Д(\pi, \{0 \gamma 1 \delta 0\}_m)$.

(см. [3]).

Замечание 2. Легко построить алгорифм $\mathcal{B}$ такой, что для всяких ступенчатого остова F и рационального сегмента $a \triangle b$, содержащегося в $0 \triangle 1$, $\mathcal{B}$ применим к слову $F a \triangle b$ и выдает по нему ступенчатый остов $\mathcal{B}(F a \triangle b)$, для которого выполнено

а) $\forall x\,(x \in 0 \triangle 1 \supset (!\vartheta(\mathcal{B}(F a \triangle b)x) \equiv$

$\equiv (0 < x < a \vee b < x < 1 \vee (a < x < b\ \&\ !\vartheta(Fx)))))$

б) $\forall x\,(x \in a \triangledown b \supset \vartheta(\mathcal{B}(F a \triangle b)x) \simeq \vartheta(Fx))$

в) $\forall x\,((0 < x < a \vee b < x < 1) \supset \vartheta(\mathcal{B}(F a \triangle b)x) \simeq 0)$

(по поводу обозначений см. [2]).

Если $\{F_\ell\}_\ell \in L_1$, то, очевидно, для всякого рационального сегмента $a \triangle b$, содержащегося в $0 \triangle 1$, имеет место $\{\mathcal{B}(F_\ell\, a \triangle b)\}_\ell \in L_1$.

Лемма 1. Пусть $\{F_\ell\}_\ell \in L_1$, m НЧ и $a \triangle b$ рациональный сегмент, содержащийся в $0 \triangle 1$. Тогда можно построить равномерно непрерывную функцию g, последовательность НЧ $\{t_k\}_k$ и последовательность S-множеств $\{\mathcal{Y}^k\}_k$ таких, что для всякого НЧ k выполнено

1) мера S -множества $\mathcal{Y}^k$ меньше чем $\frac{1}{3^k}(b-a)$

2) $\forall x(x \in 0 \vartriangle 1 \mathbin{\&} \neg(x \in \mathcal{Y}^k) \supset \exists u(P(u, \{\mathcal{L}(F_\ell a \vartriangle b)\}_\ell, x) \mathbin{\&}$
$\mathbin{\&} \forall y(|y-x| < \frac{1}{t_k} \supset |g(y)-g(x)-u(y-x)| \le \frac{1}{3^k}|y-x|)))$

3) $\forall x(x \le a \vee x \ge b \supset g(x) = 0)$

4) $\forall x(|g(x)| < \frac{1}{n})$.

<u>Доказательство</u>. По замечанию 2 $\{\mathcal{L}(F_\ell a \vartriangle b)\}_\ell$ элемент пространства L_1 и по теореме 2 из [2] существует абсолютно непрерывная функция h , являющаяся неопределенным интегралом от этого елемента. Тогда по следствию теоремы 2 из [3] выполнено $Д(h, \{\mathcal{L}(F_\ell a \vartriangle b)\}_\ell)$. Функция h , в виду своей абсолютной непрерывности, является функцией ограниченной вариации и, следовательно, существует возрастающая система РЧ $\{a_i\}_{i=0}^{p}$ такая, что выполнено

$$a_0 = a \mathbin{\&} a_p = b \mathbin{\&} \forall i(1 \le i \le p \mathbin{\&} \mathrm{Var}(u, h, a_{i-1} \vartriangle a_i) \supset u < \frac{1}{2n}).$$

Пусть π функция определенная в замечании 1. Мы построим для каждого $1 \le i \le p$ функцию f_i такую, что

$$f_i(x) = h(a_{i-1}) + \pi\left(\frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}\right) \cdot (h(a_i) - h(a_{i-1})) .$$

Тогда возможно построить функцию f , для которой имеет место

$$f(x) = \begin{cases} h(a) & x \le a \\ f_i(x) & \text{если } x \in a_{i-1} \vartriangle a_i \\ h(b) & x \ge b \end{cases}$$

Из определения функции f и свойств функции π немедленно вытекает, что f равномерно непрерывна и выполнено

$$Д(f, \{0 \gamma 1 \delta 0\}_m) .$$

Определим $g \leftrightharpoons h - f$. Очевидно, что функция g равномерно непрерывна и обладает свойством 3). По замечанию 1 из [3] выполняется $Д(g, \{\mathcal{B}(F_\ell\, a \vartriangle b)\}_\ell)$. Но тогда нетрудно построить последовательности $\{y^k\}_k$, $\{t_k\}_k$ обладающие свойствами 1) и 2).

Остает доказать свойство 4). Пусть x КДЧ. Потому, что мы хотим доказать неравенство между КДЧ (с которого возможно снять двойное отрицание), достаточно поступать разбором случаев. Если существует НЧ i такое, что $1 \le i \le p$ & & $x \in a_{i-1} \triangledown a_i$, то

$$|g(x)| = |h(x) - f(x)| \le |h(x) - h(a_{i-1})| + |f(x) - f(a_{i-1})| \le$$
$$\le |h(x) - h(a_{i-1})| + |h(a_i) - h(a_{i-1})| \le \frac{1}{m} .$$

Если такое НЧ i не существует, то $g(x) = 0$ и оценка опять имеет место.

<u>Лемма 2.</u> Пусть $\{F_\ell\}_\ell \in L_1$, m НЧ, $\mathcal{G} \leftrightharpoons \{H_\ell\}_\ell$ S-множество. Пусть для почти всех КДЧ x из сегмента $0 \vartriangle 1$ выполнено**

$$\neg(x \in \mathcal{G}) \supset P(0, \{F_\ell\}_\ell, x) .$$

Тогда существуют равномерно непрерывная функция g, последовательность S-множеств $\{\mathcal{L}^k\}_k$ и последовательность НЧ $\{s_k\}_k$ такие, что

1) $\forall k\, Д(g, \{F_\ell\}_\ell, k, \mathcal{L}^k, s_k)$

2) $\forall xy (\neg \exists_\ell (x \in (H_\ell)^0) \supset g(x) = 0 \,\&\, |g(x+y)| \le \frac{|y|}{3^m})$.

<u>Доказательство</u>. I . Определим для всяких НЧ ℓ и ЦЧ

а) рациональное число a_i^ℓ так, что

$$a_i^\ell = \text{Эл}(H_\ell) + |H_\ell| \; \frac{2^{i+1} - 1}{2^{i+1}} \,, \quad \text{если } i \ge 0$$

$$a_i^\ell = \text{Эл}(H_\ell) + |H_\ell| \; \frac{1}{2^{-i+1}} \,, \quad \text{если } i \le 0$$

б) натуральное число n_i^ℓ удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{n_i^\ell} < \frac{1}{3^{m+\ell+|i|}} \cdot \min(\text{Эm}(H_\ell) - a_i^\ell, a_{i-1}^\ell - \text{Эл}(H_\ell)) .$$

Тогда по лемме 1 существуют для всяких НЧ ℓ и ЦЧ i равномерно непрерывная функция g_i^ℓ , последовательность S -множеств $\{{}^i\mathcal{Y}_k^\ell\}_k$ и последовательность НЧ $\{{}^it_k^\ell\}_k$ такие, что имеет место

i) для всякого НЧ k мера S -множества ${}^i\mathcal{Y}_k^\ell$ меньше чем

$$\frac{1}{3^k}(a_i^\ell - a_{i-1}^\ell)$$

ii) $\forall x k (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in {}^i\mathcal{Y}_k^\ell) \supset$

$\supset \exists u (P(u, \{\mathcal{L}(F_\ell\, a_{i-1}^\ell \Delta a_i^\ell)\}_\ell, x) \,\&\, \forall y (|y - x| <$

$< \frac{1}{{}^it_k^\ell} \supset |g_i^\ell(y) - g_i^\ell(x) - u(y-x)| \le \frac{1}{3^k} |y - x|)))$

iii) $\forall x (x \le a_{i-1}^\ell \vee x \ge a_i^\ell \supset g_i^\ell(x) = 0)$

iv) $\forall x (|g_i^\ell(x)| < \frac{1}{n_i^\ell})$.

Легко видеть (по свойству iv)), что для всякого КДЧ x

ряд

$$(1)\qquad \sum_{\ell=1}^{\infty}\Big(g_0^{\ell}(x)+\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{\ell}(x)+\sum_{i=1}^{\infty} g_{-i}^{\ell}(x)\Big)$$

сходится. Обозначим его сумму $g(x)$. Таким образом, определенная функция очевидно равномерно непрерывна.

Заметим, что выполнено

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\forall x i_1 i_2 \ell_1 \ell_2 \big(g_{i_1}^{\ell_1}(x)=g_{i_2}^{\ell_2}(x)\neq 0 \supset i_1=i_2 \,\&\, \ell_1=\ell_2 \,\&\, x\in a_{i_1-1}^{\ell_1}\triangledown a_{i_1}^{\ell_1}\big) \\ \text{и}\quad &\forall x\big(g(x)\neq 0\supset \exists_{i\ell}\,(x\in a_{i-1}^{\ell}\triangledown a_i^{\ell} \,\&\, g(x)=g_i^{\ell}(x))\big)\ . \end{aligned}$$

Покажем сначала, что функция g удовлетворяет требованиям пункта 2) леммы.

Пусть x, y КДЧ, $\neg\exists_{\ell}\,(x\in (H_{\ell})^{0})$.

Тогда выполнено $\neg\exists_{\ell i}\,(x\in a_{i-1}^{\ell}\vartriangle a_i^{\ell})$ и в силу $iii)$ имеет место $g(x)=0$.

Докажем оценку

$$(3)\qquad |g(x+y)|\leq \frac{|y|}{3^m}\ .$$

Если $g(x+y)=0$, то оценка (3) выполняется.

Если $\neg(g(x+y)=0)$, то по (2) существуют НЧ ℓ_0 и ЦЧ i_0 такие, что выполнено

$$x+y\in a_{i_0-1}^{\ell_0}\triangledown a_{i_0}^{\ell_0} \,\&\, g(x+y)=g_{i_0}^{\ell_0}(x+y)\ ,$$

и тогда имеет место оценка

$$|g(x+y)|\leq \frac{1}{3^{m+\ell_0+|i_0|}}\cdot \min\big(\text{Эп}(H_{\ell_0})-a_{i_0}^{\ell_0},\ a_{i_0-1}^{\ell_0}-\text{Эл}(H_{\ell_0})\big)\leq \frac{|y|}{3^m}\ .$$

Итак, доказано двойное отрицание (3), но его возможно с майоризации снять.

II. Мы построим последовательности $\{\mathcal{L}^k\}_k$ и $\{s_k\}_k$. На основании предположений леммы осуществима последовательность S-множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ такая, что выполняется

$$(4)\quad \begin{cases} \text{для всякого НЧ } k \text{ мера } \mathcal{G}^k \text{ меньше чем } \frac{1}{3^k} \\ \text{и } \mathcal{G}^{k+1} \subseteq \mathcal{G}^k \\ \forall x k\, (x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}^k) \supset \exists u\, P(u, \{F_l\}_l, x)) \\ \forall x k\, (x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}^k) \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}) \supset P(0, \{F_l\}_l, x)) . \end{cases}$$

Мы обозначим для всякого рационального сегмента $a \triangle b$, для которого имеет место $(0 < a < 1 \vee 0 < b < 1)$

$$(a \triangle b)' \leftrightharpoons max\, (a, 0) \triangle min\, (1, b) .$$

Пусть k НЧ.

Мы построим НЧ l_k и m_k такие, что имеет место

$$(5)\qquad l_k > k \,\&\, \forall q \sum_{l=l_k+1}^{l_k+q} |H_l| < \frac{1}{3^{k+2}}$$

и

$$\frac{1}{m_k} < \frac{1}{2} \cdot \min_{\substack{l=1,\dots,l_k \\ -(2k+3)<i\leq 2k+3}} (a_i^l - a_{i-1}^l) \,\&\, \frac{2 l_k (4k+7)}{m_k} < \frac{1}{3^{k+2}} .$$

Тогда возможно построить S-множество $\mathcal{L}^k$, меры меньшей чем $\frac{1}{3^k}$, которое содержит

а) для всякого НЧ l и ЦЧ i S-множество ${}^i\mathcal{Y}^l_{k+1}$

б) S-множество $\mathcal{G}^{k+2}$

в) сегменты $\{H_l\}_{l=l_k+1}^{\infty}$

г) сегменты $\{(\text{Эл}(H_\ell)-\frac{|H_\ell|}{2^{2k+4}} \vartriangle \text{Эл}(H_\ell)+\frac{|H_\ell|}{2^{2k+4}})'\}_{\ell=1}^{\ell_k}$

д) сегменты $\{(\text{Эп}(H_\ell)-\frac{|H_\ell|}{2^{2k+4}} \vartriangle \text{Эп}(H_\ell)+\frac{|H_\ell|}{2^{2k+4}})'\}_{\ell=1}^{\ell_k}$

е) сегменты $\{a_i^\ell-\frac{1}{m_k} \vartriangle a_i^\ell+\frac{1}{m_k}\}_{\substack{\ell=1,\dots,\ell_k \\ |i|\le 2k+3}}$

Мы определим

$$s_k = \max(m_k, \max_{\substack{\ell=1,\dots,\ell_n \\ -(2k+3)<i\le 2k+3}} {}^{i}t^{\ell}_{k+1}) .$$

III. Докажем, что построенные объекты g, $\{\mathcal{L}^k\}_k$, $\{s_k\}_k$ удовлетворяют требованиям леммы.

Пусть k НЧ, x, y КДЧ, для которых верно

$$x \in 0 \vartriangle 1 \ \& \ \neg(x \in \mathcal{L}^k) \ \& \ |x-y| < \frac{1}{s_k} .$$

Из конструкции S-множества $\mathcal{L}^k$ вытекает, что тогда имеет место

(6) $$\exists_\ell (1 \le \ell \le \ell_k \ \& \ x \in (H_\ell)^\circ) \vee \neg(x \in \mathcal{Y})$$

и что существует КДЧ u, для которого выполняется $P(u, \{F_\ell\}_\ell, x)$.

α) Пусть $\neg(x \in \mathcal{Y})$.

По (4) и уже доказанному пункту 2) настоящей леммы выполнено

$$g(x) = 0 \ \& \ P(0, \{F_\ell\}_\ell, x) .$$

Если $g(y) = 0$, тогда $|g(y)-g(x)-0\cdot(y-x)| = 0 \le \frac{1}{3^k}|y-x|$.

Если $\neg(g(y)=0)$, тогда по (2) существуют НЧ l_0 и ЦЧ i_0 такие, что $g(y)=g_{i_0}^{l_0}(y)$ & $y\in a_{i_0-1}^{l_0}\nabla a_{i_0}^{l_0}$. Из того, что $|x-y|<\frac{1}{m_k}$ вытекает, что $l_0>l_k$, и тогда по (5) и свойству $iv)$

$$|g(y)|=|g_{i_0}^{l_0}(y)|\leq\frac{1}{3^{m+l_0+|i_0|}}|y-x|\leq\frac{1}{3^k}|y-x|.$$

Итак, с учтением свойств предикатов $=$, $\leq$, мы доказали в случае $\neg(x\in\mathcal{Y})$ оценку

$$(7)\qquad |g(y)-g(x)-u(y-x)|\leq\frac{1}{3^k}|y-x|.$$

β) Пусть $x\in(H_{l_0})^0$, $1\leq l_0\leq l_k$.

Тогда по конструкции S-множества $\mathcal{L}^k$ осуществимо ЦЧ i_0 такое, что

$$-(2k+3)<i_0\leq 2k+3\ \&\ a_{i_0-1}^{l_0}+\frac{1}{m_k}\leq x\leq a_{i_0}^{l_0}-\frac{1}{m_k}\ \&\ P(u,\{\mathcal{B}(F_l\, a_{i_0-1}^{l_0}\Delta a_{i_0}^{l_0})\}_l,x).$$

По свойствам НЧ s_k и свойству $ii)$ мы имеем

$y\in a_{i_0-1}^{l_0}\nabla a_{i_0}^{l_0}$ и

$$|g(y)-g(x)-u(y-x)|=|g_{i_0}^{l_0}(y)-g_{i_0}^{l_0}(x)-u(y-x)|\leq\frac{1}{3^{k+1}}|y-x|.$$

Итак, оценка (7) остается в силе и в случае $\exists_l(1\leq l\leq l_0\ \&\ x\in(H_l)^0)$.

Таким образом, в силу (6) выполнено

$$\forall x(x\in 0\Delta 1\ \&\ \neg(x\in\mathcal{L}^k)\supset\exists u(P(u,\{F_l\}_l,x)\ \&\ \forall y(|y-x|<\frac{1}{s_k}\supset|g(y)-g(x)-u(y-x)|\leq\frac{1}{3^k}|y-x|)))$$

и лемма полностью доказана.

Теорема. Пусть $\{F_\ell\}_\ell \in S$. Тогда осуществима равномерно непрерывная функция f такая, что выполнено $Д(f, \{F_\ell\}_\ell)$.

Доказательство. По теореме 3 из [2] и свойствам равномерно непрерывных функций возможно построить возрастающую последовательность НЧ $\{R_k\}_k$ и последовательность S-множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ такие, что выполнено

$$
(8)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\text{для всякого НЧ } k \text{ мера } S\text{-множества } \mathcal{G}^k \text{ мень-} \\
\text{ше чем } \dfrac{1}{3^k} \text{ и имеет место } \mathcal{G}^{k+1} \subseteq \mathcal{G}^k \\
\forall x m (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^m) \supset \exists z (P(z, \{F_\ell\}_\ell, x) \,\&\, |z| < R_m)).
\end{array}
\right.
$$

Пусть для всякого k имеет место $\mathcal{G}^k \leftrightharpoons \{H_\ell^k\}_\ell$.

1) Построим индуктивно последовательности $\{g_k\}_k$ – равномерно непрерывных функций, $\{\{G_m^k\}_m\}_k$ – последовательностей ступенчатых остовов, $\{\{\mathcal{G}_m^k\}_m\}_k$ – последовательностей S-множеств и $\{\{t_m^k\}_m\}_k$ – последовательностей НЧ такие, что для всякого НЧ k выполнено

$i)$ $\{G_m^k\}_m \in L_1$

$ii)$ для всякого НЧ m мера $\mathcal{G}_m^k$ меньше чем $\dfrac{1}{3^m}$

$iii)$ $\forall x m (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}_m^k) \supset \forall j (1 \le j \le k \supset \exists z_j (P(z_j,$
$\{G_\ell^j\}_\ell, x) \,\&\, \forall y (|y - x| < \dfrac{1}{t_m^k} \supset |g_j(y) - g_j(x) - z_j(y - x)| \le$
$\le \dfrac{1}{3^{k+j}} |y - x|))))$

$v)\ \forall x y (x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{Y}^{k}) \supset g_{k+1}(x) = 0 \,\&\, |g_{k+1}(x+y)| \le \frac{|y|}{3^{k+1}})$

$vi)$ для почти всех КДЧ $x \in 0 \triangle 1$ имеет место

$$\neg (x \in \mathcal{Y}^{k}) \supset P(0, \{F_\ell \mp (G_\ell^1 \dotplus G_\ell^2 \dotplus \ldots \dotplus G_\ell^{k})\}_\ell, x) .$$

Пусть $k = 1$.

По свойствам пространств L_1 и S (см. лемму 1 из [2]) осуществима последовательность ступенчатых остовов $\{G_\ell^1\}_\ell \in L_1$ такая, что выполнено

(9) $$\{G_\ell^1\}_\ell = \{\lambda_0(F_\ell, R_1)\}_\ell \ .$$

По лемме 1 возможно к $\{G_\ell^1\}_\ell \in L_1$, рациональному сегменту $0 \triangle 1$ и НЧ 3 построить равномерно непрерывную функцию g_1 , последовательность S -множеств $\{\mathcal{L}_\ell^1\}_\ell$ и последовательность НЧ $\{s_\ell^1\}_\ell$ такие, что имеет место

а) $\forall n\ Д(g_1, \{G_\ell^1\}_\ell, n, \mathcal{L}_n^1, s_n^1)$

б) $\forall x (x \le 0 \vee x \ge 1 \supset g_1(x) = 0)$

в) $\forall x (|g_1(x)| < \frac{1}{3})$.

Определим для всякого НЧ n $\mathcal{Y}_n^1 \leftrightharpoons \mathcal{L}_{n+1}^1$ и $t_n^1 = s_{n+1}^1$.

Очевидно, что построенные объекты удовлетворяют условиям $i) - v)$. Но в силу (8) и (9) условие $vi)$ тоже выполняется.

Пусть для НЧ k уже построены системы равномерно не-

прерывных функций $\{g_j\}_{j=1}^{k}$, последовательностей ступенчатых остовов $\{\{G_m^j\}_m\}_{j=1}^{k}$, последовательностей S-множеств $\{\{\mathcal{Y}_m^j\}_m\}_{j=1}^{k}$ и последовательностей НЧ $\{\{t_m^j\}_m\}_{j=1}^{k}$ удовлетворяющие условиям $i) - vi)$.
Тогда по свойствам пространств L_1 и S осуществима последовательность ступенчатых остовов $\{G_\ell^{k+1}\}_\ell \in L_1$ такая, что выполнено

$$\{G_\ell^{k+1}\}_\ell = \{\lambda_0(F_\ell \mp (G_\ell^1 \dotplus \ldots \dotplus G_\ell^k), R_{k+1})\}_\ell$$

По индукционному предположению (свойство $vi)$) имеет для почти всех КДЧ $x \in 0 \Delta 1$ место

$$\neg(x \in \mathcal{Y}^k) \supset P(0, \{G_\ell^{k+1}\}_\ell, x).$$

Тогда по лемме 2 возможно (к $\{G_\ell^{k+1}\}_\ell \in L_1$, НЧ $k+1$ и S-множеству $\mathcal{Y}^k$) построить равномерно непрерывную функцию g_{k+1}, последовательность S-множеств $\{\mathcal{L}_m^{k+1}\}_m$ и последовательность НЧ $\{s_m^{k+1}\}_m$ такие, что выполняется

а) $\forall m\, Д(g_{k+1}, \{G_\ell^{k+1}\}_\ell, n, \mathcal{L}_m^{k+1}, s_m^{k+1})$

б) $\forall xy(\neg \exists_\ell (x \in (H_\ell^k)^0) \supset g_{k+1}(x) = 0 \,\&\, |g(x+y)| \le \frac{|y|}{3^{k+1}})$.

Для всякого НЧ m построим S-множество $\mathcal{Y}_m^{k+1}$, меры меньшей чем $\frac{1}{3^n}$, содержащее S-множества $\mathcal{L}_{m+k+1}^{k+1}$, $\mathcal{Y}_{m+1}^{k}$ и определим НЧ

$$t_m^{k+1} = max(s_{m+k+1}^{k+1}, \max_{1 \le j \le k} t_{m+1}^j).$$

Тогда очевидно, что построенные объекты удовлетворяют условиям $i) - v)$.

Покажем, что условие $vi)$ тоже выполняется.

По свойствам пространств L_1 и S и по определению равенства последовательностей ступенчатых остовов для почти всех КДЧ $x \in 0 \Delta 1$ существуют КДЧ $z, z_1, \ldots\ldots, z_{k+1}$ такие, что

$$P(z, \{F_\ell\}_\ell, x) \,\&\, \forall j\,(1 \leq j \leq k+1 \supset P(z_j, \{G_\ell^j\}_\ell, x))$$

и выполнено

$$z_1 = \lambda(z, R_1) \,\&\, z_2 = \lambda(z - z_1, R_2) \,\&\, \ldots\ldots \,\&\, z_{k+1} = \lambda(z - \sum_{j=1}^{k} z_j, R_{k+1}) \ .$$

Если имеет место $\neg(x \in \mathcal{Y}^{k+1})$, то по (8) $|z| < R_{k+1}$ и следовательно

$$z = \sum_{j=1}^{k+1} z_j \ .$$

Итак, для почти всех КДЧ $x \in 0 \Delta 1$ выполнено

$$\neg(x \in \mathcal{Y}^{k+1}) \supset P(0, \{F_\ell \mathbin{\bar{-}} (G_\ell^1 \dotplus \ldots \dotplus G_\ell^{k+1})\}_\ell, x) \ .$$

2) Существует последовательность S-множеств $\{\mathcal{H}^\ell\}_\ell$ такая, что для всякого НЧ ℓ $\mathcal{H}^{\ell+1} \subseteq \mathcal{H}^\ell$, мера S-множества $\mathcal{H}^\ell$ меньше чем $\frac{1}{3^\ell}$ и для всякого КДЧ $x \in 0 \Delta 1$ такого, что $\neg(x \in \mathcal{H}^\ell)$, имеет место

а) последовательность КДЧ $\{\vartheta(G_m^1 x) - \vartheta(\lambda_0(F_m, R_1) x)\}_m$ определена и сходится к 0

б) для всякого НЧ k последовательность КДЧ

$$\{\vartheta(G_m^{k+1} x) - \vartheta(\lambda_0(F_m \mathbin{\bar{-}} (G_m^1 \dotplus \ldots \dotplus G_m^k), R_{k+1}) x)\}_m$$

определена и сходится к 0.

Определим для всякого НЧ k $f_k(x) = \sum_{j=1}^{k} g_j(x)$.

По условию iv) очевидно, что последовательность равномерно непрерывных функций $\{f_k\}_k$ является сходящейся к равномерно непрерывной функции. Обозначим ее предел через f .

Мы построим последовательности S -множеств $\{\mathcal{G}^n\}_n$ и НЧ $\{r_n\}_n$ такие, что выполнено

$$\forall n\ Д(f, \{F_\ell\}_\ell, n, \mathcal{G}^n, r_n) .$$

Пусть n любое НЧ.

Построим S -множество $\mathcal{G}^n$, меры меньшей чем $\frac{1}{3^n}$, содержащее S -множества $\mathcal{G}^{n+1}$, $\mathcal{H}^{n+1}$, $\mathcal{G}^{n+1}_{n+1}$ и определим НЧ

$$r_n \leftrightharpoons t^{n+1}_{n+1} .$$

Пусть x КДЧ такое, что $x \in 0 \Delta 1 \ \&\ \neg (x \in \mathcal{G}^n)$.

Тогда по прежнему существуют КДЧ $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_{n+1}$ такие, что $P(\sum_{j=1}^{n+1} z_j, \{F_\ell\}_\ell, x)$ и для $j = 1, \ldots\ldots, n+1$ имеет место

$$\forall y\,(|x-y| < \frac{1}{r_n} \supset |g_j(y) - g_j(x) - z_j(y-x)| \leq \frac{1}{3^{n+1+j}}|y-x|) .$$

Пусть y КДЧ, $|x-y| < \frac{1}{r_n}$, тогда по условию v) получаем

$$|f(y)-f(x)-\sum_{j=1}^{n+1} z_j(y-x)| \leq |f_{n+1}(y) - f_{n+1}(x) - \sum_{j=1}^{n+1} z_j(y-x)| +$$

$$+ |f(y) - f_{n+1}(y)| + |f(x) - f_{n+1}(x)| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |g_j(y) - g_j(x) -$$

$$- z_j(y-x)| + |f(y) - f_{n+1}(y)| \leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{3^{n+1+j}}|y-x| +$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 3^{n+1}}|y-x| \leq \frac{1}{3^{n+1}}|y-x| .$$

Итак, доказано

$$\forall x m \left(x \in 0 \Delta 1 \;\&\; \neg (x \in \mathcal{G}^{n}) \supset \exists z \left(P(z, \{F_l\}_l, x) \;\&\right.\right.$$
$$\left.\left. \&\; \forall y \left(|y-x| < \frac{1}{r_m} \supset |f(y) - f(x) - z(y-x)| \le \frac{1}{3^m} |y-x| \right)\right)\right) .$$

Теорема полностью доказана.

Автор выражает благодарность О. Демуту за внимание к работе.

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ДЕМУТ О.: Пространства $L_{\mathcal{R}}$ и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10 (1969),261-284.

[3] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math.Univ.Carolinae 12(1971),687-711.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83, 18600 Praha 8

Československo

(Oblatum 12.6.1974)