COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

15,3 (1974)

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КОНЕЧНЫХ И СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.К. НУРЕКЕНОВ, Алма-Ата

Абстракт: В данной работе, продолжающей исследования А.Н. Тихонова, Ю.С. Колесова, М.А. Красносельского, К.П. Персидского и автора, рассматривается задача о существовании решений счетных систем нелинейных дифференциальных уравнений и неотрицательных периодических решений конечных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Существование доказывается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Ключевые слова: Система нелинейных дифференциальных уравнений, счетная система нелинейных дифференциальных уравнений, неотрицательное периодическое решение, теоремы существования, теорема Шаудера о неподвижной точке.

AMS: Primary 34C25 Ref. Ž. 7.925.32
Secondary 34G05 7.937

---

§ 1. Теоремы существования периодических решений конечных систем дифференциальных уравнений

1.1. Введение. В этой работе рассматривается задача о существовании неотрицательных периодических решений конечных и счетных систем дифференциальных уравнений.

Рассматривается также задача о существовании решений счетных систем дифференциальных уравнений. Первая теорема существования решений у счетных систем дифференциальных уравнений принадлежит А. Тихонову [10]. В работах К.П. Персидского и других математиков идея А. Тихонова получила дальнейшее развитие [9].

В работе Ю.С. Колесова и М.А. Красносельского доказано существование неотрицательных ω-периодических решений конечных систем дифференциальных уравнений в предположении, что матрица монодромии лежит внутри круга радиуса $\rho < 1$ [1]. В данной работе не требуется задание всего спектра, лежащего внутри круга радиуса $\rho < 1$, а требуется только существования не более двух собственных значений $0 < \lambda \leq 1$.

1.2. <u>Постановка задачи</u>. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

(1.1) $$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Эту систему будем записывать в векторной форме:

(1.2) $$\frac{dx}{dt} = f(t, x) .$$

Будем предполагать, что правая часть $f(t,x)$ периодична по t с периодом ω: $f(t,x) = f(t+\omega, x)$.

Предположим также, что правые части системы (1.1) определены при $0 \leq t \leq \omega$, $-\infty < x_1, \dots, x_m < \infty$ и непрерывны по совокупности переменных. Кроме того будем считать, что задача Коши

(1.3) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$x(t) = x(t, t_0, x_0)$$

в промежутке $0 \le t \le \omega$.

В этом случае равенством

$$U(t, t_0)x_0 = x(t, t_0, x_0) \tag{1.4}$$

определяется двупараметрическое семейство операторов $U(t, t_0)$, которое преобразует пространство E^n в себя.

Из единственности решения Коши (1.3) следует, что оператор $U(t, t_0)$ непрерывен .

Оператор $U(t, t_0)$ обычно называется оператором сдвига по траекториям системы (1.1) за время от t_0 до t или просто оператором сдвига.

Для того, чтобы решение $x(t)$ уравнения (1.2) было ω -периодическим, необходимо и достаточно, чтобы точка $x(0)$ была неподвижной точкой оператора $U(\omega, 0)x(0) = x(0)$.

Это известное свойство оператора сдвига позволяет применять для доказательства существования периодических решений различные новые принципы неподвижной точки.

Допустим, что оператор $U(\omega, 0)$ оставляет инвариантным некоторый конус K в пространстве E^n .

Тогда для доказательства существования периодических решений у системы (1.1) может быть применена теория нелинейных положительных операторов.

Напомним, что оператор Q (не обязательно линейный) называется положительным, если $QK \subset K$, монотонным, если из $x \le y$ следует $Qx \le Qy$ [2].

Лемма 1. [3] Пусть правые части системы (1.2) удовлетворяют неравенствам

(1.5) $f_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_m) \geq 0 \quad (x_j \geq 0; j \neq i; i = 1, 2, \dots, m).$

Тогда оператор $U(t, 0)$ при каждом $t \geq 0$ оставляет инвариантным конус K векторов с неотрицательными координатами, то есть

$$U(t, 0)x \in K \quad \text{при} \quad t \geq 0, \; x \in K \quad .$$

1.3. <u>О линейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений</u>

Рассмотрим систему

(1.6) $$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) x_j + q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

которая в векторной форме имеет вид

(1.7) $$\frac{dx}{dt} = A(t)x + q(t) \quad .$$

Функции $a_{ij}(t)$ и $q_i(t)$ предполагаются непрерывными.

Как известно ряд

(1.8) $$V(t, t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(t_1) dt_1 + \int_{t_0}^{t} A(t_2) \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \, dt_2 + \dots$$

сходится по норме операторов равномерно относительно t и t_0 из конечного промежутка, причем решение линейного однородного уравнения

(1.9) $$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

удовлетворяющее начальному условию

(1.10) $$x(t_0) = x_0$$

можно записать в виде

(1.11) $$x(t) = V(t, t_0)x_0$$

а решение неоднородного уравнения (1.6), удовлетворяющее начальному условию (1.10) в виде

(1.12) $$x(t) = V(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} V(t, \tau)g(\tau)\,d\tau \quad .$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(t)$ периодичны по t с периодом ω. В этом случае матрицу

(1.13) $$V = V(\omega, 0)$$

называют матрицей монодромии.

1.4. <u>Теоремы существования периодических решений</u>

<u>Теорема 1.1</u>. Пусть правые части системы (1.1) удовлетворяют неравенствам (1.5) и

(1.14) $$f_i(t, x_1, \dots, x_n) \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + g_i(t) \quad ,$$

где $a_{ij}(t) \ge 0$ при $i \neq j$. Пусть матрица монодромии $V(\omega, 0)$ линейного уравнения (1.9) имеет в конусе K собственный вектор x_0 с собственным значением λ_0 $(0 < \lambda_0 < 1)$. Пусть $\int_0^{\omega} V(\omega, \tau)g(\tau)\,d\tau \le \lambda_1 x_0$ где λ_1 - некоторое положительное число.

Тогда система (1.1) имеет по крайней мере одно неотрицательное ω-периодическое решение.

<u>Доказательство</u>. Из неравенства (1.5) вытекает, что для оператора сдвига $U(t, 0)x \ge 0$, при $x \in K$, а из нера-

венства (1.14) следует

$$(1.15) \qquad U(t,0)x \leq U_1(t,0)x\,,\quad x\in K\ ,$$

где $U_1(t,0)x = V(t,0)x + \int_0^t V(t,\tau)g(\tau)d\tau$ - оператор сдвига системы (1.6), в частности имеет место неравенство

$$(1.16) \qquad U(\omega,0)x \leq V(\omega,0)x + \int_0^{\omega} V(\omega,\tau)\,g(\tau)\,d\tau\ .$$

Пусть $x_1 = \lambda_1 x_0$. Тогда для элемента

$$x^* = \frac{x_1}{1-\lambda_0}$$

имеем

$$(1.17) \qquad U_1(\omega,0)\,x^* \leq x^*$$

В самом деле

$$(1.18) \qquad U_1(\omega,0)\Big(\frac{x_1}{1-\lambda_0}\Big) = V(\omega,0)\,\frac{x_1}{1-\lambda_0} + \int_0^{\omega} V(\omega,\tau)g(\tau)d\tau \leq$$
$$\leq \frac{\lambda_0 x_1}{1-\lambda_0} + x_1 = \frac{x_1}{1-\lambda_0}\ .$$

Из неравенств (1.15) и (1.16) вытекает, что оператор сдвига оставляет инвариантным конусный отрезок $0 \leq x \leq x^*$. Поэтому [2] оператор сдвига $U(\omega,0)$ имеет неподвижную точку y_0 в конусном отрезке $0 \leq x \leq x^*$

$$(1.19) \qquad U(\omega,0)\,y_0 = y_0\ .$$

Эта неподвижная точка является начальным условием неотрицательного ω -периодического решения. Теорема доказана.

Теорема 1.2. Пусть правые части системы (1.1) удовлетворяют неравенствам (1.5), (1.14) и неравенству

$$(1.14') \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)x_j \geq f_i(t, x_1, \dots, x_m)$$

$$\text{при } x_j \geq 0 \ (j=1,\dots,m), \ \sqrt{\sum_{j=1} x_j^2} \leq r_0 > 0 \ .$$

Пусть матрица монодромии $V(\omega)$ линейного уравнения (1.9) имеет в конусе K собственный вектор x_0 и x_1 с соответствующими собственными значениями $\lambda_0 = 1$, λ_1 $(0 < \lambda_1 < 1)$. Пусть

$$\int_0^{\omega} V(\omega)V^{-1}(s)q(s)ds \leq \lambda_2 x_1 \ (0 < \lambda_2) \ .$$

Тогда система (1.1) имеет по крайней мере одно неотрицательное ненулевое ω -периодическое решение.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\bar{x} = \lambda_2 x_1 = \lambda_1 x^*$, $y_0 = x_0 + \dfrac{\lambda_1 x^*}{1-\lambda_1}$.

Тогда $U_1(\omega,0)y_0 \leq y_0$. В самом деле

$$U_1(\omega,0)y_0 = V(\omega)\,(x_0 + \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}x^*) + \int_0^{\omega} V(\omega)V^{-1}(s)q(s)ds \leq x_0 + $$
$$+ \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1}x^* + \lambda x^* = x_0 + \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}x^* = y_0 \ .$$

Поэтому из неравенства (1.14) и (1.14') вытекает, что оператор сдвига $U(\omega,0)$ оставляет инвариантным конусный отрезок $x_0 \leq x \leq y_0$. Следовательно имеет неподвижную точку z_0 $(x_0 \leq z_0 \leq y_0)$; $U(\omega,0)z_0 = z_0$. Теорема доказана.

<u>Теорема 1.3</u>. Пусть система (1.1) имеет нулевое решение и удовлетворяет условиям теоремы 1.1 (условиям теоремы 1.2). Пусть правые части системы (1.1) удовлетворяют неравенствам

$$(1.20) \qquad f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \geq \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)x_j \ (i=1,\dots,m) \ \|x\| \leq r \ ,$$

где функции $b_{ij}(t)$ непрерывны и $b_{ij}(t) \geq 0$ при $j \neq i$. Пусть $V_1(\omega,0)$ - матрица монодромии линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, \dots, m) \tag{1.21}$$

имеет в конусе K собственный вектор x_0 с собственным значением $\lambda \geq 1$, причем $x_0 \leq \lambda x_0$, $(x_0 \leq \lambda (x_0 + \frac{\lambda_1 x^*}{1-\lambda_1}))$.

Тогда система (1.1) имеет по крайней мере одно ненулевое ω-периодическое решение.

<u>Доказательство</u>. В силу неравенства (1.20) имеем

$$x_0 \leq \lambda x_0 \leq U(\omega, 0)x_0 \leq U_1(\omega, 0)x_0 \leq y_0 .$$

Это значит, что оператор сдвига $U(\omega, 0)$ оставляет инвариантным конусный отрезок $x_0 \leq x \leq y_0$. Поэтому оператор сдвига имеет неподвижную точку x^* $(x_0 \leq x^* \leq y_0)$. Эта неподвижная точка является начальным условием ненулевого неотрицательного ω-периодического решения.

Теорема доказана.

§ 2. Периодические решения счетных систем дифференциальных уравнений

2.1. Теоремы существования и единственности решения

Пусть l_∞ - банахово пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_i \{|x_i|\} \quad (i = 1, 2, \dots) . \tag{2.1}$$

Точно также можно рассмотреть банахово пространство l_p всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, для которых норма

$$\|x\|_{l_p} = \{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\}^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty) \tag{2.2}$$

конечна.

Рассмотрим в этих пространствах счетную систему дифференциальных уравнений

(2.3) $$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots), \quad (i = 1, 2, \dots),$$

где t – вещественное независимое переменное, $x_1, x_2, \dots$ – счетное множество вещественных искомых функций от t, а $f_1, f_2, \dots$ – заданные вещественные функции переменных $t, x_1, x_2, \dots$ области $\mathcal{D}$, которая определяется неравенствами

(2.4) $$0 \le t \le T, \quad \|x\| \le R,$$

где

$$0 < T, R \le \infty .$$

Приведем общеизвестные две теоремы.

Теорема 2.1. Пусть оператор

(2.5) $$f(t,x) = \{f_1(t, x_1, x_2, \dots), \; f_2(t, x_1, x_2, \dots), \dots\}$$

отображает топологическое произведение $[0,T] \times \ell_p$ $(1 \le p \le \infty)$ в ℓ_p. Если оператор $f(t,x)$

1) при фиксированном

(2.6) $$\|f(t+\Delta t, x) - f(t,x)\|_{\ell_p} \longrightarrow 0 \text{ при } \Delta t \longrightarrow 0,$$

то есть оператор $f(t,x)$ непрерывен по t (в сильном смысле);

2) удовлетворяет условию Липшица

(2.7) $$\|f(t,x) - f(t,y)\|_{\ell_p} \le L \|x - y\|_{\ell_p},$$

то задача Коши

(2.8)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

имеет для $x_0 \in \ell_p$ единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию

(2.9)
$$x(0) = x_0 .$$

Мы в этом параграфе будем пользоваться также следующими условиями, которые являются более слабыми, чем условия теоремы 2.1.

1) Функция f_i непрерывна по t при фиксированном $x \in \ell_p$, т.е.

(2.10)
$$|f_i(t+\Delta t, x_1, x_2, \dots) - f_i(t, x_1, x_2, \dots)| \to 0$$

при $\Delta t \to 0$.

2) При любом $t \in [0,T]$ и при $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, \dots$ имеет место неравенств

(2.11)
$$|f_i(t,0,0,\dots)| \le \gamma(t) \quad (i = 1,2,\dots),$$

где $\gamma(t)$ - некоторая непрерывная на $[0,T]$ функция

3) Функции f_i удовлетворяют условию Коши-Липшица относительно переменных, $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_\infty$

$$|f_i(t, x_1, x_2, \dots) - f_i(t, y_1, y_2, \dots)| \le \alpha(t) \|x - y\|_{\ell_\infty},$$

где $\alpha(t)$ - некоторая положительная непрерывная функция на $[0,T]$.

Из этих условий вытекают следующие свойства функции f_i

а)

(2.12) $|f_i(t, x_1, x_2, \dots)| \le \alpha(t)\|x\|_{\ell_\infty} + \gamma(t)$

б) В любой точке области $\mathcal{D}$ имеет место

(2.13) $|f_i(t+\Delta t, x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \dots) - f(t, x_1, x_2, \dots)| \to 0$

при $|\Delta t| + \|\Delta x\|_{\ell_\infty} \to 0$.

в) Если на отрезке $[0, T]$ семейство функции $x_1(t), x_2(t), \dots$ равностепенно непрерывно, то функции

$$f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

непрерывны по t на $[0, T]$.

Теорема 2.2. [9] Пусть выполнены все вышеуказанные условия. Тогда через каждую заданную точку $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$ области $\mathcal{D}$ проходит только одно ограниченное решение задачи Коши

(2.14)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots) \\ x_i(t_0) = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

равностепенно непрерывное по t на $[0, T]$ и непрерывно зависящее от начального условия

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots) \in \ell_\infty \ .$$

Функция $f(x_1, x_2, \dots)$ определенная в пространстве ℓ_p $(1 \le p \le \infty)$ называется непрерывной в точке $x = (x_1, x_2, \dots)$, если для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из

(2.15)
$$\|x - y\|_{\ell_p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \delta$$

$$\left(\|x - y\|_{\ell_\infty} = \sup_i |x_i - y_i| < \delta\right)$$

следует

$$|f(x_1, x_2, \dots) - f(y_1, y_2, \dots)| < \varepsilon \quad . \tag{2.16}$$

Функция $f(x_1, x_2, \dots)$ непрерывная в каждой точке $x = (x_1, x_2 \dots) \in \ell_p$ называется просто непрерывной в пространстве ℓ_p. Отметим, что определение непрерывности действительной функции от счетного аргумента, данное А.Н. Тихоновым характерное для непрерывности действительной функции, определенной в пространстве ℓ_∞. В нашем случае это определение непрерывности не совпадает с определением непрерывности, данным А.Н. Тихоновым.

<u>Теорема 2.3</u>. Пусть правые части системы дифференциальных уравнений удовлетворяют условиям; что они

а) определены в области $\mathcal{D}$;

б) непрерывны в пространстве ℓ_p , при фиксированных t ;

в) удовлетворяют неравенствам

$$|f_i(t, x_1, x_2, \dots)| \le m_i(t) \quad , \tag{2.17}$$

где $m_i(t)$ - функции, суммируемые в интервале $[0, T]$, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^T m_i(\tau)\, d\tau \right)^p < \infty \tag{2.18}$$

$$\left(\int_0^T m_i(\tau)\, d\tau \longrightarrow 0 \text{ при } i \to \infty \text{ для } \ell_\infty \right) .$$

Тогда при перечисленных условиях через каждую точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots) \in \ell_p$ проходит хотя бы одно решение $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots)$ системы дифференциальных уравнений (2.3) удовлетворяющее начальному условию

(2.19) $\qquad x(0)=x^0 \Longleftrightarrow x_i(0)=x_i^0 \quad (i=1,2,\dots)$.

<u>Доказательство</u>. Заменим счетные системы дифференциальных уравнений (2.3) системой интегральных уравнений

$$x_i(t)=x_i^0+\int_0^t f_i(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)\,d\tau \tag{2.20}$$

и рассмотрим соответствующее им отображение

$$y_i(t)=x_i^0+\int_0^t f_i(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)\,d\tau \tag{2.21}$$

ставящее в соответствие всякой счетной системе непрерывных функций $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots)$, $\|x\|\leq r$ другую такую же систему $y(t)=(y_1(t),y_2(t),\dots)$.

Если существует система, инвариантная при этом отображении, то она является решением системы уравнений (2.20), а поэтому и (2.3).

Множество систем непрерывных функций $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots)$ для которых

$$\|x\|_{\overline{\ell}_p}=\sup_t\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i(t)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty \tag{2.22}$$

является банаховым пространством $\overline{\ell}_p$ с нормой (2.22). Каждая система $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots)\in\overline{\ell}_p$ называется точкой этого пространства.

Рассмотрим множество K состоящее из тех точек $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots)$ для которых x_j удовлетворяет условиям:

$$|x_j(t)-x_j^0|\leq\int_0^t m_j(\tau)\,d\tau \tag{2.23}$$

$$(2.24) \qquad |x_j(t_1) - x_j(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} m_j(\tau)\,d\tau \ .$$

Заметим, что множество K компактно.

В самом деле, пусть $x_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots)$ - счетная последовательность из K. j - компоненты этих точек по (2.23) равномерно ограничены и по (2.24) равностепенно непрерывны.

По теореме Арцела из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $x_1^{n_1^i}(t)$ равномерно сходящуюся к некоторой функции $x_1(t)$.

Аналогично из $x_2^{n_1^i}(t)$ можно выбрать подпоследовательность $x_2^{n_2^i}(t)$ равномерно сходящуюся к $x_2(t)$ и так далее. Последовательность точек

$$x_{n_k^k} = (x_1^{n_k^k}, x_2^{n_k^k}, \dots)$$

сходится к очке $x = (x_1, x_2, \dots)$, так как

$$\|x_{n_k^k}(t) - x(t)\|_{\bar{\ell}_p} = \sup_t \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{n_k^k}(t) - x_i(t)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

при $k \to \infty$.

Действительно, всилу неравенства (2.18) для каждого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует $N(\varepsilon)$, что $2\Big(\sum_{i=N(\varepsilon)}^{\infty}\Big(\int_0^T m_i(\tau)\,d\tau\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Из равномерной сходимости функций $x_i^{n_k^k}$ к функции $x_i(t)$ $(i = 1, \dots, N(\varepsilon))$ для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует натуральное число $m(\varepsilon)$, что при

$$\sup_t \Big[\sum_{i=1}^{m(\varepsilon)} |x_i^{n_k^k}(t) - x_i(t)|^p\Big]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Отсюда при $k \ge m(\varepsilon)$

$$\|x_{m_k}(t)-x(t)\|_{\bar{l}_p} \le \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} |x_i^{m_k}(t)-x_i(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + 2\left(\sum_{i=N(\varepsilon)}^{\infty}\left(\int_0^T m_i(\tau)d\tau\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Ясно, что $x(t)\in K$.

В силу неравенства (2.17) отображение (2.21) преобразует множество K в себя. Докажем, что это отображение непрерывно.

Пусть последовательность элементов $x_k=(x_1,x_2,\dots)$ из K сходится к элементу $x^0(t)=(x_1^0(t),x_2^0(t),\dots)$:

$$\|x_k(t)-x^0(t)\|_{\bar{l}_p} = \sup_t \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k(t)-x_i^0(t)|^p)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

при $k\to\infty$.

Тогда по условию теоремы при каждом фиксированном t каждая последовательность функций $f_i(t,x_1^k(t),x_2^k(t),\dots)$ $(k=1,2,\dots)$ сходится к соответствующей функции $f_i(t,x_1^0(t),x_2^0(t),\dots)$ при $k\to\infty$. Пусть $\varepsilon>0$ - произвольное фиксированное число. Для $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу неравенства (2.18) найдется число $i_0(\varepsilon)$, что имеет место неравенство

$$2\left(\sum_{i=i_0(\varepsilon)}^{\infty}\left(\int_0^T m_i(\tau)d\tau\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

С другой стороны в силу теоремы Лебега о предельном под знаком интеграла для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует число $k_0(\varepsilon)$, что при $k\ge k_0(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{i_0(\varepsilon)} \left|\int_0^t [f_i(\tau,x_1^k(\tau),x_2^k(\tau),\dots) - f_i(\tau,x_1^0(\tau),x_2^0(\tau),\dots)]d\tau\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{i_0(\varepsilon)}\left(\int_0^T |f_i(\tau,x_1^k(\tau),x_2^k(\tau),\dots) - f_i(\tau,x_1^0(\tau),x_2(\tau),\dots)|d\tau\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Отсюда следует, что при $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \Big| \int_0^t [f_i(\tau, x_1^k(\tau), x_2^k(\tau), \ldots) -$$

$$- f_i(\tau, x_1^0(\tau), x_2^0(\tau), \ldots)] d\tau \Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{i_0(\varepsilon)} \Big(\int_0^T |f_i(\tau, x_1^k(\tau), x_2^k(\tau), \ldots) -$$

$$- f_i(\tau, x_1^0(\tau), x_2^0(\tau), \ldots)| d\tau\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \Big(\sum_{i=i_0(\varepsilon)}^{\infty} \Big(\int_0^T m_i(\tau) d\tau\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \ .$$

Это означает непрерывность отображения (2.21).

По теореме Шаудера [12] у отображения (2.21) существует хотя бы одна неподвижная точка $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots)$. Тогда система функций $(x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots)$ соответствующая этой точке $x^*(t)$ является решением системы интегральных уравнений (2.20) или дифференциальных уравнений (2.3).

Теорема доказана.

Теорема 2.4. Пусть выполнены все условия теоремы 2.3. Пусть системы дифференциальных уравнений (2.3) имеет единственное решение, проходящее через каждую точку $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots)$ области $\mathcal{D}$. Тогда решение

$$x(t) = (x_1(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots), x_2(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots), \ldots)$$

системы уравнений (2.3), проходящее через точку $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots)$ области $\mathcal{D}$ есть непрерывная функция их начальных значений $(x_1^0, x_2^0, \ldots)$.

Доказательство. Предположим противное.
Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, и последовательность точек $x_m^0 = (x_1^{0m}, x_2^{0m}, \ldots)$, что имеет место соотношение:

$$\| x_m^0 - x^0 \|_{\ell_p} \longrightarrow 0, \ \| x^m(t) - x(t) \|_{\overline{\ell}_p} \geq \varepsilon_0 \ \text{при} \ m \longrightarrow \upsilon \ ,$$

где $x_m(t)$ и $x(t)$ решения системы уравнений (2.3) проходящее соответственно через точки x_m^0 и x^0. С другой стороны (как в доказательстве теоремы 2.3) существует подпоследовательность $x_{m_k}(t)$, что $x_{m_k}(t) \longrightarrow \overline{x}(t)$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу в равенстве

$$(2.25) \qquad x_i^{m_k}(t) = x_i^{0 m_k} + \int_0^t f_i(\tau, x_1^{m_k}(\tau), x_2^{m_k}(\tau), \ldots)\, d\tau ,$$

получим

$$\overline{x}_i(t) = x_i^0 + \int_0^t f_i(\tau, \overline{x}_1(\tau), \overline{x}_2(\tau), \ldots)\, d\tau .$$

Это противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

Следует указать, что задача Коши (2.14) имеет единственное решение, если правые части $f_i(t, x_1, x_2, \ldots)$ удовлетворяют условиям Липшица: [10]

$$| f_i(t, x_1' x_2', \ldots) - f_i(t, x_1'' x_2'', \ldots) | \leq \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} | x_j' - x_j'' | ,$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} K_{ij}$ сходящиеся и равномерно ограничены, т.е. $\sum_{i=1} K_{ij} = A_j < A$.

2.2. О линейной счетной системе дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейные счетные системы дифференциальных уравнений

$$(2.26) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t) x_j$$

и

$$(2.27) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t) x_j + g_i(t) ,$$

где t - действительное независимое переменное, $a_{ij}(t)$,

$g_i(t)$ – заданные непрерывные функции на интервале $(-\infty, \infty)$, причем

$a_{ij}(t) = a_{ij}(t+\omega)$, $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots) \in \ell_p \; (1 \le p \le \infty)$,

x_i –искомые вещественные функции переменного t.

Будем считать, что на отрезке $[0, \omega]$ выполнены следующие условия функции

(2.28) $$a_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(t)| \le \alpha ,$$

где α – некоторое положительное число, если рассмотреть системы уравнений (2.26) и (2.27) в пространстве ℓ_∞.

В случае, когда система уравнений (2.26), (2.27) рассматривается в пространстве $\ell_p \; (1 \le p < \infty)$ дополнительно будем предполагать выполнение следующих условий:

а) $$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(t+h) - a_{ij}(t)|^{p} \Big)^{\frac{p}{q}} \to \quad \text{при } h \to 0$$

б) $$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(t)|^{q} < \alpha ,$$

где α – положительное число, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Легко заметить, что в силу теоремы 2.2 через каждую точку $(t_0, x_0) = (t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$ области $\mathcal{D} = [0, \omega] \times \ell_\infty$ проходит единственное решение

(2.29) $$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots)$$

системы уравнений (2.26) и (2.27) непрерывно зависящее от начального условия $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots)$.

Приведем еще одну необходимую общеизвестную теорему [11].

Пусть конус K – множество элементов с неотрицательными компонентами в пространстве $\ell_p \ (1 \le p < \infty)$.

Введем в ℓ_p естественный порядок

$$x \le y \Longleftrightarrow y - x \in K \Longleftrightarrow x_i \le y_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

Говорят, что функция $f(t, x) = (f_1(t, x_1, x_2, \ldots), f_2(t, x_1, x_2, \ldots), \ldots)$ на $\mathcal{D} = [0, T] \times \ell_p \ (1 \le p \le \infty)$ со значениями в ℓ_p квазимонотонно возрастает по x_j , если каждая f_i возрастает по x_j при $i \ne j$ т.е.

(2.30) $\quad x \le y, \ x_i = y_i \Longrightarrow f_i(t, x) \le f_i(t, y)$.

<u>Теорема 2.5</u>. Пусть $f(t, x)$ удовлетворяет либо условиям теоремы 2.1 либо условиям теоремы 2.2 и квазимонотонно возрастает по x . Если $u(t)$ - решение задачи Коши (2.14) и дифференцируемая функция $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots)$ удовлетворяет неравенствам

(2.31) $\quad z_i'(t) \le f_i(t, z_1(t), z_2(t), \ldots)$ в $[0, T]$, $z_i(0) \le u_i(0)$

то $z(t) \le u(t)$ в $[0, T]$.

Отметим наконец, что результаты первого параграфа обобщаются на дифференциальные уравнения в банаховых пространствах.

Приведем еще одну теорему для счетных систем дифференциальных уравнений аналогично теореме 1.1.

<u>Теорема 2.6</u>. Пусть выполнены следующие условия:

1) $f_i(t, 0, 0, \ldots) \ge 0 \quad (x_j = 0, \ j = 1, 2, \ldots)$,

2) функция $f(t, x)$ - квазимонотонна и $f(t, x) = f(t + \omega, x)$,

3) выполнены все условия либо теоремы 2.1 либо теоремы 2.2.

4) $f_i(t, x_1, x_2, \dots) \le \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t) x_j + g_i, (t)$,

где

$$a_{ij}(t) = a_{ij}(t+\omega),\ a_{ij}(t) \ge 0 \text{ при } i \ne j \text{ и } g = (g_1, g_2, \dots) \in K,$$

5) оператор монодромии $V(\omega, 0)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t) x_j \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

имеет в конусе K собственный вектор x_0 с собственным значением λ_0 $(0 < \lambda_0 < 1)$, причем $\int_0^{\omega} V(\omega, \tau) g(\tau) d\tau \le \lambda_1 x_0$, где λ_1 - некоторое положительное число.

6) Каждое решение задачи Коши (2.14) определено в промежутке $[0 \le t \le \omega]$.

Тогда система дифференциальных уравнений (2.14) имеет по крайней мере одно ω -периодическое решение.

Литература

[1] КОЛЕСОВ Ю.С. и КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А.: Устойчивость по Ляпунову и уравнения с вогнутыми операторами, Доклады Акад.Наук СССР 145(1962),1217-1220.

[2] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А.: Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз,1962 г.

[3] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А.: Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М.,1966 г.

[4] НУРЕКЕМОВ Т.К.: О свойствах оператора сдвига по траекториям систем интегро-дифференциальных уравнений, Известия Акад.Наук Каз ССР,сер.физ.-мат.(1966), вып. 1, 43-47.

[5] НУРЕКЕНОВ Т.К.: О неотрицательных периодических решениях интегро-дифференциальных уравнений, автореферат диссертации, Воронеж,1966 г.,1-7.

[6] НУРЕКЕНОВ Т.К.: О существовании неотрицательных ω-периодических решений у систем интегро-дифференциальных уравнений, Известия Акад.Наук Каз ССР, сер.физ.-мат.(1968),вып.5,80-81.

[7] НУРЕКЕНОВ Т.К., ХАМИТОВ М.; О существовании ω-периодических решений дифференциальных уравнений, Вестник Акад.Наук Каз ССР (1971),вып.3,70-71.

[8] НУРЕКЕНОВ Т.К., ХАМИТОВ М.: О существовании ω-периодических решений счетных систем дифференциальных уравнений, Труды Инст.мат.мех.Акад.Наук Каз ССР, том 2(1971),39-43.

[9] ПЕРСИДСКИЙ К.П.: Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений, Известия Акад. Наук Каз ССР, сер.мат.и мех.(11)(1958),вып.7, 52-71.

[10] ТИХОНОВ А.: О бесконечных системах дифференциальных уравнениях, Мат.сборник,41(1934),551-560.

[11] WALTER W.: Existence and convergence theorems for the boundary lower equations based on the line method, Arch.Rational Mech.Anal.39(1970),169-188.

[12] ДАНФОРД Н. и ШВАРЦ Дж.Т.: Линейные операторы(общая теория),М.,1963 ;

480064 Алма-Ата-64

Ул. Тулебаева 187, кв.18

СССР

(Oblatum 3.5.1974)