COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

15,3 (1974)

СКОЛЬЗЯЩИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Н.Г. ПЕРЛОВА, Ростов-на-Дону

Аннотация: Устанавливается существование на выпуклой поверхности вращения S класса C^2 счетного множества пар параллелей $(u_k, \tilde{u}_k)$ таких, что пояс поверхности S, заключенной между u_k и $\tilde{u}_k$, допускает бесконечно малые изгибания 1-го и 2-го порядков, при которых параллели u_k и $\tilde{u}_k$ остаются плоскими кривыми.

Ключевые слова: поверхность вращения, изгибания, плоская кривая.

AMS: 53A05 Ref. Ž.: 3.934.14

Известно [1], что на замкнутой поверхности вращения S положительной гауссовой кривизны существует счетное множество параллелей u_k таких, что каждый сегмент S_k, ограниченный параллелью u_k и неоднозначно проектирующийся на плоскость граничной параллели, допускает бесконечно малые изгибания 1-го и 2-го порядков, при которых параллель u_k остается плоской кривой (так называемые скользящие бесконечно малые изгибания).

В настоящей заметке доказывается существование на поверхности S счетного множества пар параллелей $(u_k, \tilde{u}_k)$ таких, что заключенный между параллелями u_k и $\tilde{u}_k$ пояс допускает скользящие бесконечно малые изгибания 1-го и 2-го порядков. Для доказательства используется метод С. Кон-Фоссена [2].

Рассмотрим поверхность вращения $S: \bar{r} = u\bar{e} + r(u)\bar{a}(v)$, отнесенную к подвижному реперу $\bar{e}$, $\bar{a}(v)$, $\bar{a}'(v)$ [2]. Пусть $r(u) = \sqrt{u(a-u)}\,R(u)$, $u \in [0,a]$, $R(u) \in C^2[0,a]$, $R(u) > 0$, $r''(u) < 0$ при $u \in (0,a)$. При этих условиях гауссова кривизна поверхности положительна

Методом С. Кон-Фоссена [2] отыскание бесконечно малых изгибаний 1-го порядка поверхности S сводится к решению уравнения

$$r(u)\chi_k''(u) + (k^2-1)r''(u)\chi_k(u) = 0 \tag{1}$$

при $k \geq 2$. Через функцию $\chi_k(u)$ без квадратур выражаются функции

$$\begin{cases} ik\varphi_k(u) = -r'(k^2-1)\chi_k - r\chi_k' \,; \\ \psi_k(u) = -ik\chi_k \,, \end{cases} \tag{2}$$

которые вместе с χ_k определяют изгибающее поле $\bar{z}_k$ 1-го порядка:

$$\begin{aligned} \bar{z}_k(u,v) = (\varphi_k e^{ikv} + \bar{\varphi}_k e^{-ikv})\bar{e} \; &+ \\ + (\psi_k e^{ikv} + \bar{\psi}_k e^{-ikv})\bar{a}(v) \; &+ \\ + (\chi_k e^{ikv} + \bar{\chi}_k e^{-ikv})\bar{a}'(v) \; &. \end{aligned}$$

Известно [2], что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений вида

$$\chi_k^{+}(u) = u^{\frac{1+k}{2}}(a-u)^{\frac{1-k}{2}} X_k^{+}(u) \,,$$

$$\chi_k^-(u) = u^{\frac{1-k}{2}}(a-u)^{\frac{1+k}{2}} X_k^-(u) \quad ,$$

где $X_k^{\pm}(u) \in C^2[0,a]$. В силу условия $\frac{r''}{r} < 0$ из (1) следует:

$$\frac{\chi_k''}{\chi_k} > 0$$

на $(0,a)$, а потому функции $\chi_k^{\pm}(u)$ не имеют положительных максимумов и отрицательных минимумов в интервале $(0,a)$. Так как решение уравнения (1) определяется с точностью до постоянного множителя, то можно считать функции $\chi_k^{\pm}(u)$ положительными. По той же причине можно считать, что графики функций $\chi_k^+(u)$ и $\chi_k^-(u)$ (см. Рис. 1) пересекаются в точке $u = u_{экв}$, соответствующей экватору поверхности.

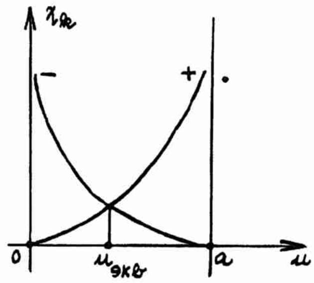

Рис.1

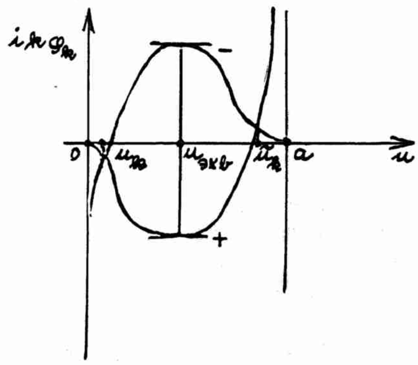

Рис. 2

На Рис. 2 изображены графики функций $ik\varphi_k^+(u)$ и $ik\varphi_k^-(u)$, которые по формуле (2_1) выражаются через $\chi_k^+(u)$ и $\chi_k^-(u)$ соответственно. Функция $ik\varphi_k(u) = ik\varphi_k^+ - ik\varphi_k^-$, очевидно имеет нули $u_k < u_{экв}$ и $\tilde{u}_k > u_{экв}$ (Рис. 3). Поэтому пояс поверхности

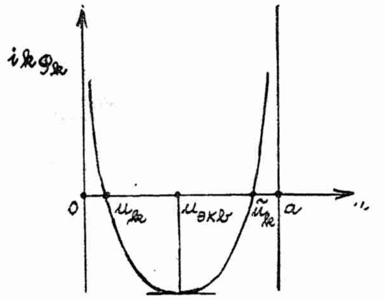

Рис. 3

S, заключенный между параллелями u_k и $\tilde{u}_k$, допускает бесконечно малое изгибание 1-го порядка $\overline{z}_k$, при котором параллели u_k и $\tilde{u}_k$ скользят в своих плоскостях.

Отыскание бесконечно малого изгибания 2-го порядка поверхности S сводится к решению уравнения

$$(3)\quad \varkappa(u)\underset{(2)}{\chi}''_{2k}(u) + (4k^2-1)\varkappa''(u)\underset{(2)}{\chi}_{2k}(u) = -2ik\frac{\varkappa''(u)}{\varkappa'(u)}\varphi_k(u)\varphi'_k(u)$$

при $k \geq 2$, где $ik\varphi_k = ik\varphi_k^+ - ik\varphi_k^-$. Через функцию $\underset{(2)}{\chi}_{2k}$ без квадратур выражается функция

$$(4)\quad 2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(u) = -\varkappa'(4k^2-1)\underset{(2)}{\chi}_{2k} - \varkappa\underset{(2)}{\chi}'_{2k} + \{\varphi_k, \varphi'_k\},$$

где $\{\varphi_k, \varphi'_k\}$ - некоторое выражение, составленное из φ_k и φ'_k. Пусть $\chi^{\pm}_{2k}(u)$ - фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (3), удовлетворяющая условиям: $\chi^{\pm}_{2k}(u) > 0$ при $u \in (0, a)$, $\chi^{+}_{2k}(u_{экв}) = \chi^{-}_{2k}(u_{экв})$. Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$\underset{(2)}{\chi}_{2k}(u) = c_1\chi^+_{2k}(u) + c_2\chi^-_{2k}(u) + \underset{(2)}{\hat{\chi}}_{2k}(u) ,$$

где $\underset{(2)}{\hat{\chi}}_{2k}$ - частное решение уравнения (3), c_1 и c_2 - произвольные постоянные. По формуле (4) найдем функцию

$$2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(u) = c_1 2ik\varphi^+_{2k}(u) + c_2 2ik\varphi^-_{2k}(u) + 2ik\underset{(2)}{\hat{\varphi}}_{2k}(u)$$

и покажем, что постоянные c_1 и c_2 можно выбрать так, что будут иметь место равенства:

$$2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(u_k) = 0 ,$$

$$2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(\tilde{u}_k) = 0 .$$

Для этого достаточно убедиться, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2ik\varphi^+_{2k}(u_k) & ,2ik\varphi^-_{2k}(u_k) \\ 2ik\varphi^+_{2k}(\tilde{u}_k) & 2ik\varphi^-_{2k}(\tilde{u}_k) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Выясним поведение нулей функции $ik\varphi_k(u)$ при возрастании k. Пусть натуральное число $m > k$, $\chi_k = \chi^+_k - \chi^-_k$, $\chi_m = \chi^+_m - \chi^-_m$ (Рис. 4).

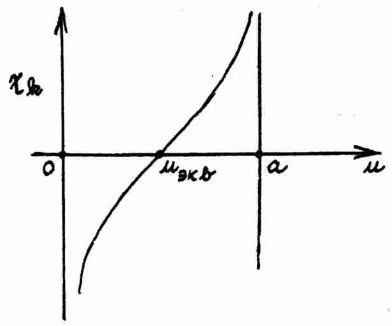

Рис. 4

Из уравнения (1) следует:

$$\chi_k'' = -(k^2-1)\frac{r''}{r}\chi_k ,$$
$$\chi_m'' = -(m^2-1)\frac{r''}{r}\chi_m ,$$

откуда получаем:

$$(5)\qquad (m^2-1)\chi_k''\chi_m - (k^2-1)\chi_m''\chi_k = 0 .$$

Интегрируя (5) по частям в интервале от $u \in (0, u_{экв})$ до $u_{экв}$, получим:

$$-(m^2-1)\chi_k'\chi_m + (k^2-1)\chi_m'\chi_k = \int_u^{u_{экв}} (m^2-k^2)\chi_k'\chi_m'\,du > 0 ,$$

откуда следует неравенство

$$(6)\qquad \frac{\chi_m'}{(m^2-1)\chi_m} > \frac{\chi_k'}{(k^2-1)\chi_k}$$

при $u \in (0, u_{экв})$. Учитывая, что $\chi_m(u) < 0$ при $u \in (0, u_{экв})$, из (6) находим, что в точке $u = u_k$

$$im\,\varphi_m = -r(m^2-1)\chi_m\left[\frac{r'}{r} + \frac{\chi_m'}{(m^2-1)\chi_m}\right] > 0 .$$

Интегрируя (5) по частям в интервале от $u_{экв}$ до $u \in (u_{экв}, a)$, получим:

$$(m^2-1)\chi_k'\chi_m - (k^2-1)\chi_m'\chi_k = \int_{u_{экв}}^{u} (m^2-k^2)\chi_k'\chi_m'\,du > 0 ,$$

откуда следует:

$$(7)\qquad \frac{\chi_m'}{(m^2-1)\chi_m} < \frac{\chi_k'}{(k^2-1)\chi_k}$$

при $u \in (u_{экв}, a)$. Учитывая, что $\chi_m(u) > 0$ при $u \in (u_{экв}, a)$, из (7) найдем, что в точке $u = \tilde{u}_k$

$$i m \varphi_m = -r(m^2-1)\chi_m \left[\frac{r'}{r} + \frac{\chi'_m}{(m^2-1)\chi_m}\right] > 0 .$$

Таким образом, при возрастании k нули функции $ik\varphi_k(u)$ перемещаются в направлении экватора поверхности. Поэтому абсциссы точек пересечения графиков функций $2ik\varphi^+_{2k}(u)$ и $2ik\varphi^-_{2k}(u)$ лежат ближе к точке $u = u_{экв}$, нежели точки u_k и $\tilde{u}_k$ (см. Рис.5).

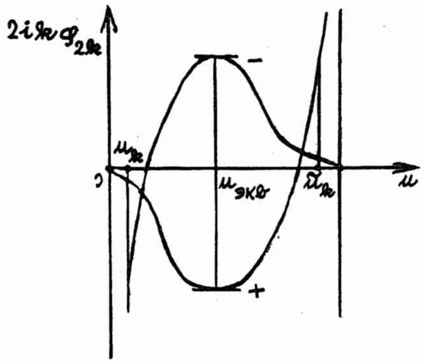

Рис. 5

Это означает, что

$$\frac{2ik\varphi^+_{2k}(u_k)}{2ik\varphi^-_{2k}(u_k)} < 1 , \quad \frac{2ik\varphi^+_{2k}(\tilde{u}_k)}{2ik\varphi^-_{2k}(\tilde{u}_k)} > 1$$

и потому определитель D отличен от нуля.

Итак, постоянные c_1 и c_2 могут быть выбраны так, что $2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(u_k) = 2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(\tilde{u}_k) = 0$. При таком выборе c_1 и c_2 проекция изгибающего поля $\underset{(2)}{\overline{z}}_k$ 2-го порядка на ось поверхности постоянна во всех точках каждой из граничных параллелей:

$$(\underset{(2)}{\overline{z}}_k,\overline{e})\big|_{u=u_k}=\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(u_k)e^{2ikv}+\underset{(2)}{\varphi}_0(u_k)+\underset{(2)}{\overline{\varphi}}_{2k}(u_k)e^{-2ikv}=const,$$

$$(\underset{(2)}{\overline{z}}_k,\overline{e})\big|_{u=\tilde{u}_k}=\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(\tilde{u}_k)e^{2ikv}+\underset{(2)}{\varphi}_0(\tilde{u}_k)+\underset{(2)}{\overline{\varphi}}_{2k}(\tilde{u}_k)e^{-2ikv}=const.$$

Следовательно, пояс поверхности S, заключенный между параллелями u_k и $\tilde{u}_k$ допускает бесконечно малое изгибание и 2-го порядка, при котором параллели u_k и $\tilde{u}_k$ остаются плоскими кривыми.

Литература

[1] E. REMBS: Über Gleitverbiegungen, Math.Ann.,111,4(1935), 587-595.

[2] С. КОН-ФОССЕН: Нежесткие замкнутые поверхности, в сб. "Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом", М., Физматгиз,1959, стр.87-114.

Ростов.гос.университет
кафедра геометрии
Ростов-на-Дону
С С С Р

(Oblatum 18.2.1974)