Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

15,2 (1974)

# ОПЕРАЦИИ НАД ЯЗЫКАМИ, ГЕНЕРИРУЕМЫМИ $\tau_m$ -ГРАММАТИКАМИ

Виктор АЛАДЬЕВ, Таллин

Резюме: В настоящей статье показывается, что языки, генерируемые $\tau_m$-грамматиками, незамкнуты относительно основных операций за исключением операции обращения.

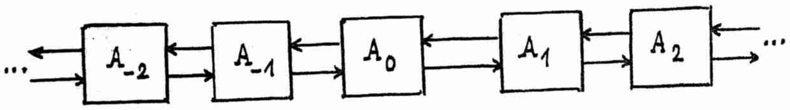
Ключевые слова: Однородная структура; слово, генерируемое однородной структурой; $\tau_m$-грамматика; язык, генерируемый $\tau_m$-грамматикой; L -системы.

AMS: 94A20, 68A30, 92A05 Ref. Ž. 8.764.11

---

Теория однородных структур представляет большой интерес для вычислительной техники, математической биологии, а также как отдельная ветвь абстрактных автоматов [1 - 3]. Впоследние годы наибольшее число работ (в том числе и настоящая) посвящается структурным и поведенческим аспектам теории. В работе [4] на основе одномерных однородных структур мы определили $\tau_m$-грамматики и изучили ряд свойств языков, генерируемых такими грамматиками. $\tau_m$-грамматики подобны грамматикам, введеным Линденмайером [5] (так называемые L -системы). Оба типа грамматик были впервые введены с целью изучения и описания формальных правил функционирования развивающихся биологических систем. Однако эти грамматики представляют определенный интерес и для теории формальных языков. Такие грамматики обладают тем свойством, что на каждом шаге в выводе перерабатывается каждый символ слова, с которым грамматика оперирует. Таким образом, $\tau_m$-грамматики и L -системы подобны другим грамматикам с параллельными правилами замещения [6 - 8], но параллелизм в первых выше, так как в $\tau_m$-грамматиках и L-системах каждый символ слова заменяется на каждом шаге вывода. Более того, $\tau_m$-грамматики на формальном уровне описывают функционирование однородных структур, на которых реализуются вычислительные и логические устройства, а сами структуры весьма удобны в качестве технической базы для организации параллельной обработки информации [2]. Известно [4], что класс всех языков, генерируемых $\tau_m$-грамматиками, является собственным подклассом класса всех языков, порождаемых L-системами. Такое сужение связано с тем, что правила замещения в L-системах позволяют делать вставки любых подслов в любые места перерабатываемых системой слов, тогда как $\tau_m$-грамматики допускают это только на концах слов. Более того, $\tau_m$-грамматика является алгоритмом, тогда как L-системы есть, вообще говоря, исчисления. Известно [9], что языки, порождаемые L-системами, незамкнуты относительно всех основных операций: объединения, пересечения, дополнения, обращения, произведения, итерации, гомоморфизма и конечного преобразования. Возникает интересный вопрос сравнения степени влияния такого сужения $\tau_m$-грамматик относительно L-систем на замкнутость языков, генерируемых $\tau_m$-грамматиками, относительно основных операций. Для дальнейшего нам понадобится ряд понятий и определений.

Классическое понятие одномерной <u>однородной структуры</u> (ОС) состоит в следующем. Имеется связанное множество идентичных конечных автоматов Мура, помещенных в точки пространства $Z^1$ (рис).




Рисунок

Связь автоматов (не нарушая общности) определяется <u>индексом соседства</u> $\vartheta = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ единичного $A_i$ -автомата структуры. Индекс соседства одинаков для всех автоматов ОС и определяет <u>шаблон соседства</u> (набор соседних $A_i$ -автомату автоматов) ШС $= \{i+0, i+1, \ldots, i+m-1\}$ , т.е. соседними $A_i$-автомату служат $A_j$ -автоматы $(j = i + k;\ k = \overline{0, m-1})$ . Каждый $A_i$ -автомат может находиться в любой дискретный момент времени $T \geq 0$ в состоянии из множества $S^p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Работа любого $A_i$-автомата в ОС определяется <u>локальной функцией</u> перехода $L^{\vartheta}_{(m)}$ , которая определяет состояние $A_i$-автомата в момент $T+1$ по состояниям всех его соседей в момент времени $T$ . Функция $L^{\vartheta}_{(m)}$ полностью определяется соотношениями

$$\langle X_1 X_2 \ldots X_m \rangle \longrightarrow X'_1$$

$$(1) \qquad \langle 0\ 0\ \ldots\ 0 \rangle \longrightarrow 0$$

$$X_i, X'_1 \in S^p \qquad (i = \overline{1, m}) .$$

Отображение $\theta : Z^1 \longrightarrow S^p$ будем называть <u>словом</u> (конфигурацией) ОС. Слово, имеющее только конечное множество символов из $S^p \setminus \{0\}$ будем называть конечным и множество всех таких слов обозначать через $\overline{C}_p$ . Мы будем рассматривать только слова из множества $\overline{C}_p$ . Слово ОС в момент $T=0$ будем обозначать через $c_0$ . Одновременное применение соотношений (1) определяет <u>глобальную функцию</u> $\tau$ , т.е. для данного мно-

жества $S^{r}_{\vartheta}$ , индекса соседства $\vartheta$ и слов $c_1$, $c_2 \in \overline{C}_r$ локальная функция $L^{\vartheta}_{(m)}$ определяет глобальное преобразование $\tau : c_1 \longrightarrow c_2$ . Нетрудно убедиться, что для $(\forall c_1 \in \overline{C}_r)(c_1 \tau \in \overline{C}_r)$ . Таким образом, функционирование ОС состоит в переработке преобразованием $\tau$ конечных слов ОС. При сделанных предположениях ОС генерирует последовательность слов $\langle c_0 \rangle = c_0, c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots$ $(c_i = c_0 \tau^i; i = 1, 2, \ldots)$.
Тогда $\tau_m$ -грамматикой будем называть упорядоченную тройку $\tau_m = (\overline{C}_r, c_0, L^{\vartheta}_{(m)})$ , где:

$\overline{C}_r$ - терминальный словарь,

$c_0 \in \overline{C}_r$ - начальное слово или аксиома,

$L^{\vartheta}_{(m)}$ - правила вывода.

А множество $\langle c_0 \rangle$ генерируемое такой грамматикой, будем называть $L(\tau_m)$ -языком. От общеизвестных формальных грамматик $\tau_m$ -грамматики, также как и $L$ -системы, отличаются двумя основными моментами:

а) отсутствием нетерминального словаря,

б) одновременным применением правил вывода (1).

Будем говорить, что множество слов $G \subset \overline{C}_r$ является языком $L(\tau_m)$ , если существует $\tau_m$ -грамматика, генерирующая множество $G$ . В работе [4] мы доказали, что множество $\overline{C}_r$ не может быть $L(\tau_m)$ -языком.

Для $L(\tau_m)$-языков обычным образом определяются все основные операции. Только операция дополнения определяется относительно множества $\overline{C}_r$ . Если мы обозначим через $L^*$ класс языков, порождаемых $L$ -системами, а через $L(\tau_m)$ класс языков, генерируемых $\tau_m$ -грамматиками, то свойства языков по отношению к основным операциям можно свести в следующую таблицу.

Таблица

| п/п | Операции | Тип языка | |
|---|---|---|---|
| | | $L(\tau_m)$ | $L^*$ |
| 1 | объединение | 0 | 0 |
| 2 | пересечение | 0 | 0 |
| 3 | дополнение | 0 | 0 |
| 4 | обращение | 1 | 0 |
| 5 | произведение | 0 | 0 |
| 6 | итерация | 0 | 0 |
| 7 | гомоморфизм | 0 | 0 |
| 8 | конечное преобразование | 0 | 0 |

В этой таблице единица обозначает замкнутость относительно соответствующей операции класса языков определенного типа, нуль - незамкнутость. Из анализа приведенной таблицы, учитывая, что языки без нетерминальных символов оказывают чрезвычайно большое сопротивление замкнутости относительно основных операций над языками [10], можно сделать вывод, что при прочих равных условиях отсутствие возможности вставки подслов в любом месте генерируемого слова в $\tau_m$-грамматиках исключает семейство $L(\tau_m)$-языков из семейства языков анти-AFL.

Результаты по незамкнутости относительно основных операций $L^*$-языков можно найти в работе [9]. В работе [4] мы доказали незамкнутость операций 1, 2, 5 - 8 и замкнутость операции 4 (таблица). Здесь мы решим вопрос и относительно операции дополнения.

<u>Теорема</u>. Класс $L(\tau_m)$-языков незамкнут относительно дополнения.

<u>Доказательство</u>. Выше уже говорилось, что в случае $\tau_m$-

грамматик естественно рассматривать дополнение $L(\tau_n)$-языка относительно множества $\overline{C}_p$. Исходя из формулировки теоремы достаточно найти пример языка $L(\tau_n)$, дополнение которого не является $L(\tau_n)$-языком. В качестве примера выбираем язык $L_1 = \{1^m \mid m \geq 1\}$. Нетрудно убедиться, что язык $L_1$ генерируется уже грамматикой $\tau_2 = (\overline{C}_2, 1, L^{\vartheta}_{(2)})$ с функцией $L^{\vartheta}_{(2)}$ определяемой следующими соотношениями

$$00 \longrightarrow 0 \qquad 10 \longrightarrow 1 \qquad 01 \longrightarrow 1 \qquad 11 \longrightarrow 1 .$$

Тогда дополнением $L(\tau_n)$-языка $L_1$ является множество $L_2 = \overline{C}_2 / L_1$. Но так как в определении $\tau_n$-грамматик отсутствует нетерминальный словарь, то если $L_2$ есть $L(\tau_n)$-язык, то он обязательно должен генерироваться уже некоторой грамматикой $\tau_n = (\overline{C}_2, c_0, L^{\vartheta}_{(n)})$, где $c_0 \in \overline{C}_2$. Используем метод доказательства от противного. Предположим, что существует грамматика $\tau_n = (\overline{C}_2, c_0, L^{\vartheta}_{(n)})$ генерирующая язык $L_2$. Значит, $\tau_n$-грамматика генерирует последовательность слов $\langle c_0 \rangle = c_0 \longrightarrow c_1 \longrightarrow c_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow c_i \longrightarrow \ldots$ такую, что $\bigcup_i \{c_i\} = L_2$. Исследуем теперь, как реагирует ОС, соответствующая такой $\tau_n$-грамматике, на слова из множества $L_1$. Из определения $L_2$ следует, что $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ и язык $L_2$ бесконечен.

Возьмем слово $\alpha = 1^m \in L_1$ $(m \geq n)$ такое, что $\alpha\tau \in L_1$. Очевидно, что такое слово должно существовать, ибо в противном случае либо $(\forall\alpha \in L_1)(\alpha\tau = c_0)$, либо $(\forall\alpha \in L_1)(\exists i \neq 0)(\alpha\tau = c_i)$ при $\ell(\alpha) \geq n$ и $c_0, c_i \in L_2$, где $\ell(\alpha)$ - длина слова $\alpha$. Но в обоих случаях, как можно показать из определения языка $L_2$, существуют стираемые (а значит и неконструктируемые) конфигурации [1], что влечет за собой невозможность генерации $\tau_n$-грамматикой языка $L_2$ а это противоречит условию. Как может себя вести слово $\alpha = 1^m$

$(m \geq n)$ под действием глобальной функции перехода $\tau$ ?

Прежде всего следует отметить, что соответствующая функции $\tau$ функция $L^{\vartheta}_{(n)}$ должна содержать соотношение $\langle \underbrace{11\ldots1}_{n} \rangle \longrightarrow 1$. Действительно, в противном случае мы получаем либо $\alpha\tau \notin L_1$ при $\ell(\alpha) \geq n$, что противоречит условию, либо $\alpha\tau = 0$. Но тогда слово $c_i = \alpha 0^n \alpha \in L_2$ будет таково, что $c_i\tau = 0$, а это невозможно из-за бесконечности языка $L_2$ и характера функционирования ОС.

Таким образом, функция $L^{\vartheta}_{(n)}$ должна содержать соотношения

$$
(2)\qquad
\begin{array}{ll}
\langle \underbrace{11\ldots1}_{k}\ \underbrace{00\ldots0}_{n-k} \rangle \longrightarrow 0 & \\
\langle \underbrace{11\ldots1}_{k'}\ \underbrace{00\ldots0}_{n-k'} \rangle \longrightarrow 0 & k' < k \\
\langle \underbrace{00\ldots0}_{u}\ \underbrace{11\ldots1}_{n-u} \rangle \longrightarrow 1 & u' < u \\
\langle \underbrace{00\ldots0}_{u'}\ \underbrace{11\ldots1}_{n-u'} \rangle \longrightarrow 1 & t = u - k .
\end{array}
$$

Согласно величине t могут быть следующие три возможности:

1) $t > 0$, $\ell(\alpha) < \ell(\alpha\tau)$

2) $t = 0$, $\ell(\alpha) = \ell(\alpha\tau)$

3) $t < 0$, $\ell(\alpha) > \ell(\alpha\tau)$ .

В первом случае в ОС существует конечное множество универсальных конфигураций (УКФ) [1]. Действительно, таким множеством являются уже конфигурации (слова):

$$c_0,\ 1^{m_1},\ 1^{m_2}, \ldots, 1^{m_{t-1}},\ 1^{k} \qquad (k = \overline{1, n-1})$$

$$m_1 = n;\quad m_i = m_1 + (i-1), \qquad (i = \overline{1,t})$$

так как при сделанных предположениях имеет место соотношение

$$\overline{C}_p = \{\bigcup_i \langle 1^{m_i} \rangle\} \cup \{\bigcup_k \langle 1^{k} \rangle\} \cup \langle C_0 \rangle .$$

Значит, множество УКФ состоит из $n + t$ слов. Существование же конечного множества УКФ в ОС противоречит теореме 1.10 [1].

Значит, для слов $\alpha = 1^m$ $(m \geq n)$ не могут существовать правила вывода (2) при условии $t > 0$. Не могут быть правилами вывода и соотношения (2) при условии $t = 0$. Действительно, в противном случае в ОС существуют слова $\alpha = 1^m$ $(m \geq n)$ такие, что $\alpha\tau = \alpha$. Но тогда для слов $c_i = 1^m 0^n 1^m \in L_2$ также имеет место соотношение $c_i\tau = c_i$, что противоречит бесконечности языка $L_2$. Остается случай при $t < 0$. В этом случае на каждом шаге после применения функции $\tau$ к слову $\alpha = 1^m$ $(m \geq n)$ происходит уменьшение его длины на $t$ единицы. Следовательно, в результате такого применения функции $\tau$ к словам $\alpha = 1^m$ $(m \geq n)$ мы получим ядро, состоящее из слов $\beta = 1^k$ $(k = \overline{1, n-2})$, т.е. в ядро входят те слова, для которых нам не известен результат применения функции $\tau$, так как мы опираемся только на правила вывода (2) при условии $t < 0$. Тогда для $n \geq 4$ ядро состоит из двух слов $\alpha_1$ и $\alpha_2$. При применении же к ним функции $\tau$ могут быть следующие возможности:

1) $\alpha_1\tau = \alpha_1$ или $\alpha_2\tau = \alpha_2$,

2) $\alpha_1\tau = \alpha_2\tau$,

3) $\alpha_1\tau = c_i$ или $\alpha_2\tau = c_i$ $(i \neq 0)$.

В первом случае существует слово $c_k = \alpha_1 0^n \alpha_1$ или $c_k = \alpha_2 0^n \alpha_2$ такое, что $c_k\tau = c_k$ и бесконечный язык $L_2$ не может быть генерируем $\tau_n$-грамматикой. В остальных двух случаях в ОС будут существовать стираемые (а значит и неконструируемые) конфигурации [1] и $\tau_n$-грамматика также не сможет генерировать язык $L_2$, что противоречит условию. Нам осталось рассмотреть лишь случай, когда $n = 3$ и ядро содержит только одно слово. В этом случае, учитывая все вышесказанное, функция $L^{\vartheta}_{(3)}$ будет определяться следующими соотношениями:

$$(3)\quad \begin{array}{lll} 000 \to 0 & 010 \to X_1 & 100 \to 0 \\ 001 \to 0 & 011 \to X_2 & 101 \to X_3 \\ 110 \to X_4 & 111 \to 1\ , & X_i \in S^2 \quad (i = \overline{1,4}) \end{array}$$

ибо функция $\tau$ уменьшает длину любого слова $\alpha = 1^m$ $(m \geq 3)$, а это может происходить только при одном из следующих трех условий:

1) $\quad u = 1 \qquad k = 2$ ,

2) $\quad u = 0 \qquad k = 1$ ,

3) $\quad u = 0 \qquad k = 2$ .

Но из соотношений (3): $000 \to 0$ , $001 \to 0$ и $100 \to 0$ следует, что либо в ОС существуют конфигурации, если $010 \to 0$, либо существует слово $\alpha = 1$ такое, что $\alpha\tau = \alpha$ . Обе возможности говорят о том, что язык $L_2$ не может порождаться $\tau_3$ - грамматикой. А так как $\tau_m$ -грамматика, генерирующая язык $L_2$ , и соответствующая ей ОС должны перерабатывать и слова из множества $L_1$ , то из вышеприведенного анализа мы приходим к наличию противоречия с тем, что существует $\tau_m$-грамматика, генерирующая язык $L_2$ . Таким образом, множество слов $L_2 = \overline{C}_2 \setminus L_1$ не может быть $L(\tau_m)$ - языком. Теорема полностью доказана.

В заключение настоящей работы нам хотелось бы сформулировать следующую <u>гипотезу</u>: Дополнение $L(\tau_m)$-языка не может быть снова $L(\tau_m)$ -языком. Многочисленные попытки опровергнуть эту гипотезу так же как и доказать ее не дали пока никакого результата, хотя результаты исследований поведенческих свойств однородных структур склоняют все же в сторону истинности гипотезы.

## Литература


[1] В. АЛАДЬЕВ: К теории однородных структур, Таллин,1972.

[2] Э. ЕВРЕИНОВ, Ю. КОСАРЕВ: Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности, Новосибирск,1966.

[3] V. ALADYEV: Survey of research in the theory of homogeneous structures and their applications, Mathematical Biosciences 9 (to appear).

[4] В. АЛАДЬЕВ: $\tau_n$-грамматики и порождаемые ими языки, Изв.АН ЭССР,23(1974).

[5] A. LINDENMAYER: Developmental systems without cellular interaction.Their languages and grammars, J. Theoret.Biol.30(1971),455-484.

[6] S. GREIBACH and J. HOPCROFT: Scattered context grammars, J.Comput.Syst.Sci.3(1969),323-347.

[7] B. NASH and R. COHEN: Parallel levelled grammars, Tenth IEEE Conf.Swit.Aut.Theory (1969),263-276.

[8] V. RAJLICH: Absolutely parallel grammars and two-way deterministic finite state transducers, Proc. Third ACM Symp.Theory Computing (1971),132-137.

[9] A. LINDENMAYER and G. ROZENBERG: Developmental systems and languages, Proc.Fourth ACM Symp.Theory Computing (1972),214-221.

[10] A. SALOMAA: On sentential forms of context-free grammars, Acta Informatica 2(1973),40-49.



Эстонский филиал ВГПТИ ЦСУ СССР

Таллин

Маакри 15

СССР



(Oblatum 29.1.1974)