Commentationes Mathematicae Universitas Carolinae

15,2 (1974)

О СВЯЗИ ПРЕДСТАВИМОСТИ КОНСТРУКТИВНОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ЭТОЙ ФУНКЦИИ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: В классической математике функция f равномерно непрерывная на сегменте $0 \Delta 1$ представима на этом сегменте в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций тогда и только тогда, когда f отображает множество тех точек сегмента $0 \Delta 1$, в которых f не имеет конечную производную, в множество нулевой меры ([1], стр. 203). В настоящей заметке исследуется конструктивный аналог этого утверждения.

Ключевые слова: Конструктивная функция, абсолютно непрерывная функция, функция ограниченной вариации, суперпозиция функций.

AMS: Primary 02E99 Ref. Ž. 2.644.2
Secondary 26A72

В следующем мы пользуемся определениями, обозначениями и результатами из [9] и [10].

Напомним, что а) конструктивную функцию действительной переменной f мы называем функцией, если f везде определена и выполнено $\forall x ((x \leq 0 \supset f(x) = f(0)) \,\&$
$\&\, (1 \leq x \supset f(x) = f(1)))$;

б) всякая функция ограниченной вариации (на $0 \Delta 1$) является равномерно непрерывной (теорема 6.10 из [2]);

в) мы говорим, что функция f обладает свойством α, и обозначаем $\alpha(f)$, если для всякого РЧ a функция $f-h_a$ является функцией ограниченной вариации (на $0\Delta 1$), где $\forall a x\,(h_a(x)=a\,.\,max\,(min\,(x,1),0))$.

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ функция.

1) Мы скажем, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^{\Delta}$, если для всякого НЧ p существуют S_{σ}-множество $\mathcal{G}^{p}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{p}}$, равномерно непрерывная функция φ_p и последовательность НЧ $\{s_k^p\}_k$ такие, что

$$\forall x y k\,(x\in 0\Delta 1\ \&\ \neg(\mathcal{F}(x)\in\mathcal{G}^{p})\ \&\ |y-x|<\frac{1}{s_k^p}\supset$$
$$\supset|\mathcal{F}(y)-\mathcal{F}(x)-\varphi_p(x)\,.\,(y-x)|\le\frac{1}{2^{k}}\,.\,|y-x|)\ .$$

2) Мы скажем, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$, если для всякого НЧ p существуют S_{σ}-множество $\mathcal{G}^{p}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{p}}$ и функция g_p, для которых выполнено

$$\alpha(g_p)\ \&\ \forall x\,(\neg(\mathcal{F}(x)\in\mathcal{G}^{p})\supset\mathcal{F}(x)=g_p(x))\ .$$

На основании теорем 2, 3 и 5 и замечания 3 из [10] легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$ тогда и только тогда, когда существует возрастающая последовательность НЧ $\{m_k\}_k$ и для всяких S_{σ}-множества $\mathcal{G}$ и КДЧ y, где y мера $\mathcal{G}$, можно построить S_{σ}-множество $\mathcal{G}'$ и КДЧ z такие, что z является мерой $\mathcal{G}'$ и верно

$$\forall x\,(x\in\mathcal{G}\supset\mathcal{F}(x)\in\mathcal{G}')\ \&\ \forall k\,(y<\frac{1}{m_k}\supset z<\frac{1}{2^{k}})\ .$$

Замечание 1. Пусть $\mathcal{F}$ функция.

1) Если $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^{\Delta}$, то согласно тео-

ремам 10 и 3 из [10] $\mathcal{F}$ обладает свойствами $(T_1)^*$ и $(N)^*$ и является равномерно непрерывной.

2) Ввиду 1) и леммы 1 легко доказать: если $\mathcal{F}$ является суперпозицией двух функций, обладающих свойством $(S)^\Delta$, то $\mathcal{F}$ тоже обладает этим свойством.

3) Согласно теореме из [4], следствию теоремы 2 из [6], лемме 1 и теореме 3 из [3], следствию теоремы 7 из [10] и лемме 1 ясно, что всякая абсолютно нперерывная функция обладает свойствами $(S)^\Delta$ и α и, следовательно, и свойством $(T_1)^\Delta$.

4) Ввиду равномерной непрерывности функций, обладающих свойством α видно, что всякая функция, обладающая свойством $(T_1)^\Delta$, равномерно непрерывна.

5) Ввиду определения 3, замечания 4 и леммы 5 из [9], леммы 1 из [5], леммы 1 и 1 - 4) функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^\Delta$ (соответственно $(T_1)^\Delta$) тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и функция $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ обладает свойством $(S)^\Delta$ (соотв. $(T_1)^\Delta$).

6) Пусть $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^\Delta$. Тогда на основании 5) и теоремы 2 из [9] легко доказать, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^*$ (см. определение 3 из [9]).

<u>Теорема 1</u>. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда следующие четыре условия являются эквивалентными.

1) $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^\Delta$.

2) Для всякого НЧ n существуют S_δ-множество $\mathcal{G}^n$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^n}$ и абсолютно непрерывная функция g_n такие, что $\forall x(\neg(\mathcal{F}(x) \in \mathcal{G}^n) \supset \mathcal{F}(x) = g_n(x))$.

3) $\mathcal{F}$ обладает свойствами $(T_1)^{\Delta}$ и $(N)^*$.

4) $\mathcal{F}$ представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций.

На основании этой теоремы, теоремы 2 из [5] и замечания 1 из [11] мы сразу получаем следующее утверждение.

<u>Следствие</u>. Функция $\mathcal{F}$ является абсолютно непрерывной (на $0\triangle 1$) тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ является функцией ограниченной вариации (на $0\triangle 1$) и обладает свойством $(S)^{\Delta}$ (т.е. свойствами $(T_1)^{\Delta}$ и $(N)^*$).

На основании леммы 2 из [9] легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>. Пуцть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, $\{z_k\}_k$ последовательность КДЧ, $a\triangle b$ сегмент, а y КДЧ такие, что $\mathcal{Z}(\mathcal{F},\{z_k\}_k)\ \&\ a\triangle b \subseteq 0\triangle 1\ \&\ y \in \langle \mathcal{O},\mathcal{F}\rangle \llcorner a\triangle b \lrcorner\ \&\ \neg\exists k\,(y = z_k)$. Тогда можно построить КДЧ x_1 и x_2 такие, что $a < x_1 \leq x_2 < b\ \&$ $\&\ \mathcal{F}(x_1) = \mathcal{F}(x_2) = y\ \&\ \forall x\,(x \in a\triangle b\ \&\ \mathcal{F}(x) = y \supset x_1 \leq x \leq x_2)$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и φ равномерно непрерывные функции, n НЧ, $\mathcal{G}$ S_{σ}-множество меры меньшей чем $\frac{1}{2^{n+3}}$, а $\{s_k\}_k$ последовательность НЧ такие, что

$$\forall x y k\,(x \in 0\triangle 1\ \&\ \neg(\mathcal{F}(x) \in \mathcal{G})\ \&\ |x-y| < \frac{1}{s_k} \supset$$
$$\supset |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) - \varphi(x)\cdot(y-x)| \leq \frac{1}{2^k}\cdot|y-x|)\ .$$

Тогда существуют S_{σ}-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^n}$ и абсолютно непрерывная функция g , удовлетворяющая условию Липшица, для которых верно $\forall x\,(\neg(\mathcal{F}(x) \in \mathcal{G}) \supset \mathcal{F}(x) = g(x))$.

Доказательство. Определения алгорифмов $\langle S, \mathcal{F}\rangle$, $\langle I, \mathcal{F}\rangle$, $\langle \sigma, \mathcal{F}\rangle$ и $\langle \omega, \mathcal{F}\rangle$ приведены в [7], стр. 228.

Согласно теореме 1.3 из [2], стр. 399, существует слово P такое, что $(P \mathrel{\text{I}} \Lambda \supset \langle \omega, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} > \frac{1}{2^{n+1}})\ \&$ $\&\ (\neg(P \mathrel{\text{I}} \Lambda) \supset \langle \omega, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} < \frac{3}{2^{n+2}})$.

1) Если $\neg(P \mathrel{\text{I}} \Lambda)$, мы построим S_σ-множество $\mathcal{Y}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^n}$, для которого выполнено $\forall y\, (y \in \mathcal{Y} \equiv$ $\equiv y \in \langle I, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} \Delta (\langle S, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} 0 \Delta 1_{\lrcorner} + \frac{1}{2^{n+2}}))$ а в качестве g мы возьмем функцию идентично равную нулю.

2) Пусть $P \mathrel{\text{I}} \Lambda$. Мы построим НЧ M, последовательность КДЧ $\{z_k\}_k$ и НЧ q такие, что

$$(1)\quad |\varphi| < M - 1\ \&\ \mathcal{Z}(\mathcal{F}, \{z_k\}_k)\ \&\ \forall x y\, (|x - y| \le \frac{1}{q} \supset |\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{1}{2^{n+3}})\ \&\ s_{n+4} < q$$

(см. лемму 2 из [9]).

Согласно теореме 1.3 из [2] существует система слов $\{P_i\}_{i=1}^{q}$ такая, что

$$\forall i\, (1 \le i \le q \supset (P_i \mathrel{\text{I}} \Lambda \supset \langle \omega, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} \tfrac{i-1}{q} \Delta \tfrac{i}{q} > \tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \tfrac{1}{q} + \nu\langle \mathcal{Y}\rangle_{\llcorner} \langle \sigma, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} \tfrac{i-1}{q} \Delta \tfrac{i}{q}{}_{\lrcorner\lrcorner})\ \&\ (\neg(P_i \mathrel{\text{I}} \Lambda) \supset$$
$$\supset \langle \omega, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} \tfrac{i-1}{q} \Delta \tfrac{i}{q}{}_{\lrcorner} < \tfrac{3}{2^{n+3}} \cdot \tfrac{1}{q} + \nu\langle \mathcal{Y}\rangle_{\llcorner} \langle \sigma, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} \tfrac{i-1}{q} \Delta \tfrac{i}{q}{}_{\lrcorner\lrcorner})).$$

а) Пусть i НЧ, $1 \le i \le q\ \&\ P_i \mathrel{\text{I}} \Lambda$.

Допустим, что $\exists x\, (x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}\ \&\ |\varphi(x)| \le \frac{1}{2^{n+3}})$. Тогда ввиду (1) и леммы 2 из [7] верно $\forall x\, (x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \supset$ $\supset |\varphi(x)| < \frac{1}{2^{n+2}})\ \&\ \langle \omega, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}{}_{\lrcorner} \le \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{q} + \nu\langle \mathcal{Y}\rangle_{\llcorner} \langle \sigma, \mathcal{F}\rangle_{\llcorner} \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}{}_{\lrcorner\lrcorner}$, что невозможно.

Итак, выполнено $\forall x\,(x \in \frac{i-1}{q} \vartriangle \frac{i}{q} \supset \frac{1}{2^{n+3}} < |\varphi(x)|)$, функция φ не меняет на сегменте $\frac{i-1}{q} \vartriangle \frac{i}{q}$ свой знак и, следовательно, согласно нашим предположениям и лемме 2 для всякого КДЧ y,

$$y \in \langle \sigma, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner \frac{i-1}{q} \vartriangle \frac{i}{q} \lrcorner} \,\&\, \neg\, \exists k\,(y = z_k) \,\&\, \neg\,(y \in \mathcal{Y}) ,$$

существует одно и только одно КДЧ x, для которого верно $x \in \frac{i-1}{q} \vartriangle \frac{i}{q} \,\&\, \mathcal{F}(x) = y$.

Кроме того ввиду предположений нашей леммы и (1), для всяких КДЧ x и y,
$x \in \frac{i-1}{q} \vartriangle \frac{i}{q} \,\&\, y \in \frac{i-1}{q} \vartriangle \frac{i}{q} \,\&\, \neg\,(\mathcal{F}(x) \in \mathcal{Y})$,
выполнено

$$\frac{1}{2^{n+3}} \cdot |y-x| - |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq |\varphi(x).(y-x)| - |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq$$
$$\leq |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) - \varphi(x).(y-x)| \leq \frac{1}{2^{n+4}} \cdot |y-x| ,$$
$$|\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq (|\varphi(x)| + \frac{1}{2^{n+4}}) . |y-x|$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2^{n+4}} \cdot |y-x| \leq |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq M . |y-x| .$$

б) Согласно сказанному и замечанию 2 из [8] существует последовательность дизъюнктных сегментов $\{L_k\}_k$ такая, что $\{L_k\}_k$ S_σ-множество меры меньшей чем $\frac{1}{2^{n+1}}$ и выполнено $\forall y\,((\langle I, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner 0 \vartriangle 1 \lrcorner} - 1 < y < \langle S, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner 0 \vartriangle 1 \lrcorner} + 1 \,\&\, (y \in \mathcal{Y} \vee \exists k\,(y = z_k) \vee \exists a\,(y = a) \vee \exists i\,(1 \leq i \leq q \,\&\, \neg\,(P_i \rightleftarrows \Lambda) \,\&\, y \in \langle \sigma, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner \frac{i-1}{q} \vartriangle \frac{i}{q} \lrcorner}))) \supset \exists k\,(\mathcal{Э}_l(L_k) < y < \mathcal{Э}_m(L_k)))$.

Пусть i НЧ, $1 \le i \le q$. Тогда существуют НЧ m_i и n_i такие, что $\langle I, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \lrcorner} \in L_{m_i} \& \langle S, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \lrcorner} \in L_{n_i}$.

α) Если $m_i = n_i$, то мы построим S_σ -множество $\{H^i_\ell\}_\ell$ такое, что $\forall x (x \in \{H^i_\ell\}_\ell \equiv x \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q})$.

β) Пусть $\neg (m_i = n_i)$. Тогда $P_i \not\equiv \Lambda$ и существует возрастающая последовательность НЧ $\{k^i_t\}_t$ такая, что

$$\forall k (L_k \subseteq \partial_m (L_{m_i}) \nabla \partial_n (L_{n_i}) \equiv \exists t (k = k^i_t))\ .$$

Согласно а) можно построить S_σ -множество $\{H^i_\ell\}_\ell$ содержащееся в $\frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}$, для которого выполнено

$$\forall j (i-1 \le j \le i \supset (\frac{j}{q} \in H^i_1 \vee \frac{j}{q} \in H^i_2)) \& \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner H^i_1 \lrcorner} =$$

$$= \langle I, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \lrcorner} \Delta\, \partial_m (L_{m_i}) \& \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner H^i_2 \lrcorner} =$$

$$= \partial_n (L_{n_i}) \Delta \langle S, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q} \lrcorner} \& \forall t (\langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle_{\llcorner H^i_{t+2} \lrcorner} = L_{k^i_t})\ .$$

в) Для всяких НЧ i и m, $1 \le i \le q$, мы определим $H_{q\cdot(m-1)+i} \rightleftharpoons H^i_m$. Тогда $\{H_\ell\}_\ell$ S_σ -множество, для которого выполнено

$$\forall x ((x \in 0 \Delta 1 \& \mathcal{F}(x) \in \{L_n\}_n) \equiv x \in \{H_\ell\}_\ell)\ .$$

Мы построим равномерно непрерывную функцию $\mathcal{F}_1$ и НЧ $\overline{M}$ такие, что для всяких НЧ i и КДЧ x, $1 \le i \le q \,\&\, x \in \in \frac{i-1}{q} \Delta \frac{i}{q}$, верно $q \cdot |\mathcal{F}(\frac{i}{q}) - \mathcal{F}(\frac{i-1}{q})| < \overline{M}\ \&$

$$(m_i = n_i \supset \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}(\tfrac{i-1}{q}) + q \cdot (\mathcal{F}(\tfrac{i}{q}) - \mathcal{F}(\tfrac{i-1}{q})) \cdot (x - \tfrac{i-1}{q}))\ \&$$

$$(\neg (m_i = n_i) \supset \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}(x))\ .$$

Тогда ряд $\sum_\ell |\mathcal{F}_1(\partial_m(H_\ell)) - \mathcal{F}_1(\partial_n(H_\ell))|$ сходится и

$$\forall x(x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \{H_\ell\}_\ell) \supset D(\varphi(x), \mathcal{F}_1, x) \,\&\, \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}(x)) \;.$$

Согласно лемме 9 из [7] можно построить абсолютно непрерывную функцию g, для которой верно

$$\forall \ell x (x \in H_\ell \supset g(x) = \mathcal{F}_1(Э_л(H_\ell)) + (\mathcal{F}_1(Э_п(H_\ell)) -$$
$$- \mathcal{F}_1(Э_л(H_\ell)) \cdot \frac{x - Э_л(H_\ell)}{|H_\ell|}) \,\&\, \forall x(\neg \exists \ell (Э_л(H_\ell)) < x < Э_п(H_\ell)) \supset$$
$$\supset g(x) = \mathcal{F}_1(x))$$

и, следовательно, $\forall x(\neg(\mathcal{F}(x) \in \{L_m\}_m) \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_1(x) = g(x))$.

Ввиду а) и свойства НЧ $\overline{M}$ выполнено $\forall x y(|g(y) - g(x)| \leq (M + \overline{M}) \cdot |y - x|)$.

На основании замечания 1, лемм 1 и 3 настоящей заметки, леммы 1 из [5] и леммы 5 из [9] легко доказать следующее.

<u>Лемма 4</u>. Пусть функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(S)^\Delta$, а функция $\mathcal{G}$ свойством $(T_1)^\Delta$. Тогда функция $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ (т.е. суперпозиция функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$) обладает свойством $(T_1)^\Delta$.

Нетрудно доказать следующие утверждения.

<u>Лемма 5</u>. Пусть g равномерно непрерывная функция, а $\{\xi_m \Delta \eta_m\}_m$ последовательность неперекрывающихся сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, такая, что выполнено $|\xi_m \Delta \eta_m| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$. Тогда можно построить равномерно непрерывную функцию φ, для которой верно $\forall x((\neg \exists m(\xi_m < x < \eta_m) \supset \varphi(x) = g(x)) \,\&$
$\forall m(\xi_m < x < \eta_m \supset \varphi(x) = g(\xi_m) + (g(\eta_m) - g(\xi_m)) \cdot \frac{x - \xi_m}{\eta_m - \xi_m}))$.

Что касается ограниченности вариации, абсолютной непрерывности, свойств $\mathcal{a}$ и α , то принадлежность функции g к одному из соответствующих классов функций влечет за собой принадлежность φ к тому же классу.

Лемма 6. Пусть φ функция, а $\{\varphi_n\}_n$ последовательность функций, такие, что для всякого НЧ n и любой возрастающей системы РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{s}$, $c_0 = 0 \& c_s = 1$, выполнено $\alpha(\varphi_n)$ и

$$\sum_{j=1}^{s} |\varphi(c_j) - \varphi(c_{j-1}) - (\varphi_n(c_j) - \varphi_n(c_{j-1}))| < \frac{1}{n} .$$

Тогда верно $\alpha(\varphi)$.

Лемма 7. Для функции $\mathcal{F}$ верно $\alpha(\mathcal{F})$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$ и является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ функция.

1) Если $\alpha(\mathcal{F})$, то - очевидно - $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$ и верно $\exists x\, Var(x, \mathcal{F}, 0\Delta 1)$.

2) Пусть $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$ и пусть x КДЧ такое, что $Var(x, \mathcal{F}, 0 \Delta 1)$. Мы используем лемму 6.

Пусть n НЧ. Мы хотим построить функцию φ_n такую, что $\alpha(\varphi_n)$ и для всякой возрастающей системы РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{s}$, $c_0 = 0 \& c_s = 1$, выполнено

$$\sum_{j=1}^{s} |\mathcal{F}(c_j) - \mathcal{F}(c_{j-1}) - (\varphi_n(c_j) - \varphi_n(c_{j-1}))| < \frac{1}{n} .$$

Существует слово P такое, что $(P \boldsymbol{\Xi} \Lambda \supset \frac{1}{2n} < x) \&$ $\& (\neg (P \boldsymbol{\Xi} \Lambda) \supset x < \frac{1}{n})$.

1) Если $\neg(P \boldsymbol{\Xi} \Lambda)$, то мы определим $\forall x (\varphi_n(x) \rightleftharpoons 0)$. Тогда, очевидно, требуемое выполнено.

2) Пусть $P \boldsymbol{\Xi} \Lambda$. Тогда ввиду наших предположений существуют НЧ m и M , система слов $\{P_l\}_{l=1}^{m}$, S_θ-множество $\mathcal{G}$

меры меньшей чем $\frac{1}{8m.m}$, функция g и последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ такие, что

(2) $\sum_{l=1}^{m} | \mathcal{F}(\frac{l}{m}) - \mathcal{F}(\frac{l-1}{m}) | > x - \frac{1}{6m}$,

$|F| < M \& \forall l (1 \le l \le m \supset (P_l \mathrel{\text{ж}} \Lambda \supset | \mathcal{F}(\frac{l}{m}) - \mathcal{F}(\frac{l-1}{m}) | > \frac{1}{7m.m}) \&$

$\& (\neg (P_l \mathrel{\text{ж}} \Lambda) \supset | \mathcal{F}(\frac{l}{m}) - \mathcal{F}(\frac{l-1}{m}) | < \frac{1}{6m.m})) \& \alpha (g) \& \forall x (\neg (\mathcal{F}(x) \in$

$\in \mathcal{Y}) \supset \mathcal{F}(x) =$

$= g(x)) \& \mathcal{Z}(\mathcal{F}, \{x_k\}_k)$.

Согласно замечанию 2 из [8] существует последовательность дизъюнктных сегментов $\{L_p\}_p$, являющаяся S_g -множеством меры меньшей чем $\frac{1}{7m.m}$, для которой выполнено

$\{L_p\}_p \subseteq (-M) \Delta M \& \forall y ((-M < y < M \& (y \in \mathcal{Y} \vee \exists a (y = a) \vee$

$\vee \exists k (y = x_k))) \supset \exists p (\partial_\lambda (L_p) < y < \partial_m (L_p)))$.

Пусть l НЧ, $1 \le l \le m \& P_l \mathrel{\text{ж}} \Lambda$.Мы построим НЧ p_1^l и p_2^l , возрастающую последовательность НЧ $\{p_{t+2}^l\}_t$ и последовательность пар НЧ $\{s_{1,t+2} \square s_{2,t+2}\}_t$ такие, что

$\mathcal{F}(\frac{l-1}{m}) \in L_{p_1^l} \& \mathcal{F}(\frac{l}{m}) \in L_{p_2^l} \& \forall p (L_p \subseteq min(\partial_m(L_{p_1^l}), \partial_m(L_{p_2^l}))$

$max(\partial_\lambda(L_{p_1^l}), \partial_\lambda(L_{p_2^l})) \equiv \exists t (p = p_{t+2}^l)) \& \forall t k (2 < t \& k < t \supset$

$\supset s_{1,t} < t \& s_{2,t} < t \& (\partial_m(L_{p_k^l}) \le \partial_m(L_{p_{s_{1,t}}^l}) < \partial_\lambda(L_{p_t^l}) \vee$

$\vee \partial_m(L_{p_t^l}) < \partial_\lambda(L_{p_{s_{2,t}}^l}) \le \partial_\lambda(L_{p_k^l})))$.

Пусть, например, $\mathcal{F}(\frac{l-1}{m}) < \mathcal{F}(\frac{l}{m})$. Согласно лемме 2 существуют КДЧ η_1^l и ξ_2^l и алгорифм $\mathcal{B}_l$, для которых выполнено $\mathcal{F}(\eta_1^l) = \partial_m(L_{p_1^l}) \& \mathcal{F}(\xi_2^l) = \partial_\lambda(L_{p_2^l}) \& \forall x (x \in \frac{l-1}{m} \Delta \frac{l}{m} \supset$

$\supset (\mathcal{F}(x) = \mathfrak{I}_m(L_{p_1^l}) \supset x \leq \eta_1^l) \,\&\, (\mathcal{F}(x) = \mathfrak{I}_n(L_{p_2^l}) \,\&$

$\& \, \eta_1^l \leq x \supset \xi_2^l \leq x)) \,\&\, \eta_1^l < \xi_2^l$,

для всяких сегментов $\xi \Delta \eta$ и L, $\xi \Delta \eta \subseteq \frac{l-1}{m} \Delta \frac{l}{m} \,\&\, \mathcal{F}(\xi) <$

$< \mathfrak{I}_n(L) < \mathfrak{I}_m(L) < \mathcal{F}(\eta) \,\&\, \neg \exists k (\mathfrak{I}_n(L) = x_k \vee \mathfrak{I}_m(L) = x_k)$,

алгорифм $\mathfrak{B}_l$ применим к слову $\xi \Delta \eta \,\square\, L$ и выдает по нему сегмент $y^1 \Delta y^2$ такой, что

$y^1 \Delta y^2 \subseteq \xi \nabla \eta \,\&\, \mathcal{F}(y^1) = \mathfrak{I}_n(L) \,\&\, \mathcal{F}(y^2) = \mathfrak{I}_m(L) \,\&\, \forall x (x \in \xi \Delta \eta \supset$

$\supset (\mathcal{F}(x) = \mathfrak{I}_n(L) \supset y^1 \leq x) \,\&\, (\mathcal{F}(x) = \mathfrak{I}_m(L) \supset x \leq y^2))$.

Мы определим $\xi_1^l \rightleftharpoons \frac{l-1}{m}$, $\eta_2^l \rightleftharpoons \frac{l}{m}$ и для всякого НЧ t, $2 < t$, $\xi_t^l \Delta \eta_t^l \rightleftharpoons \mathfrak{B}_l \llcorner \eta_{s_{1,t}}^l \Delta \xi_{s_{2,t}}^l \,\square\, L_{p_t^l} \lrcorner$.

Тогда $\{\xi_t^l \Delta \eta_t^l\}_t$ последовательность дизъюнктных сегментов, содержащихся в $\frac{l-1}{m} \Delta \frac{l}{m}$, $\xi_1^l = \frac{l-1}{m} \,\&\, \eta_2^l = \frac{l}{m} \,\&$

$\& \, \forall a (a \in \frac{l-1}{m} \nabla \frac{l}{m} \supset \exists t (a \in \xi_t^l \nabla \eta_t^l))$ и, следовательно,

$|\xi_t^l \Delta \eta_t^l| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$. Заметим, что ряд $\sum_t |\mathcal{F}(\eta_t^l) - \mathcal{F}(\xi_t^l)|$ сходится к КДЧ, меньшему чем $\frac{1}{7m.m}$ и

$\forall x (\frac{l-1}{m} < x < \frac{l}{m} \,\&\, \neg \exists t (\xi_t^l < x < \eta_t^l) \supset \mathcal{F}(x) = g(x))$.

В случае, что $\mathcal{F}(\frac{l-1}{m}) > \mathcal{F}(\frac{l}{m})$, мы поступаем аналогично и опять построим последовательность сегментов $\{\xi_t^l \Delta \eta_t^l\}_t$, удовлетворяющую условиям, перечисленным в предыдущем абзаце.

Мы построим функцию φ_m такую, что для всяких НЧ l и КДЧ x, $1 \leq l \leq m \,\&\, x \in \frac{l-1}{m} \Delta \frac{l}{m}$, выполнено

$(\neg (P_l \mathrel{\text{Ⲓ}} \Lambda) \supset \varphi_m(x) = \mathcal{F}(\frac{l-1}{m}) + m.(\mathcal{F}(\frac{l}{m}) - \mathcal{F}(\frac{l-1}{m}))$.

$$\cdot (x - \frac{\ell-1}{m})) \,\&\, (P_\ell \equiv \Lambda \supset (\neg \exists t (\xi_t^\ell < x < \eta_t^\ell) \supset \varphi_m(x) =$$

$$= \mathcal{F}(x)) \,\&\, \forall t (\xi_t^\ell < x < \eta_t^\ell \supset \varphi_m(x) = \mathcal{F}(\xi_t^\ell) +$$

$$+ (\mathcal{F}(\eta_t^\ell) - \mathcal{F}(\xi_t^\ell)) \cdot \frac{x - \xi_t^\ell}{\eta_t^\ell - \xi_t^\ell})) .$$

При помощи леммы 5 легко доказать $\alpha(\varphi_m)$.

Пусть $\{c_i\}_{i=0}^{s}$ возрастающая система РЧ, $c_0 = 0 \,\&\, c_s = 1$. Мы можем без ограничения общности предположить, что существует возрастающая система ЦЧ $\{i_j\}_{j=0}^{m}$ такая, что

$$\forall j (0 \le j \le m \supset 0 \le i_j \le s \,\&\, \frac{j}{m} = c_{i_j}) \,\&$$

$$\&\, \forall \ell (1 \le \ell \le m \,\&\, P_\ell \equiv \Lambda \supset 2 < i_\ell - i_{\ell-1} \,\&$$
$$\&\, c_{i_{\ell-1}+1} \in \xi_1^\ell \triangledown \eta_1^\ell \,\&\, c_{i_\ell - 1} \in \xi_2^\ell \triangledown \eta_2^\ell) .$$

Для всякого НЧ ℓ, $1 \le \ell \le m \,\&\, \neg(P_\ell \equiv \Lambda)$, мы определим $\tau_\ell \rightleftharpoons 1$, $\psi_1^\ell \rightleftharpoons \frac{\ell-1}{m}$, $\psi_2^\ell \rightleftharpoons \frac{\ell}{m}$, $\sigma_{\ell,1} \rightleftharpoons i_\ell - i_{\ell-1}$ и $\forall j (0 \le j \le \sigma_{\ell,1} \supset x_j^{\ell,1} \rightleftharpoons c_{i_{\ell-1}+j})$.

Пусть ℓ НЧ, $1 \le \ell \le m \,\&\, P_\ell \equiv \Lambda$, а $\{t_{\ell,j}\}_{j=1}^{\tau_\ell}$ система всех НЧ t таких, что $\exists i (i_{\ell-1} < i < i_\ell \,\&\, \xi_t^\ell < c_i < \eta_t^\ell)$, причем выполнено $\forall j (1 \le j < \tau_\ell \supset \eta_{t_{\ell,j}}^\ell < \xi_{t_{\ell,j+1}}^\ell)$. Для любого НЧ j, $1 \le j \le \tau_\ell$, пусть $i_{\ell,j}$ и $\sigma_{\ell,j}$ НЧ, для которых верно $\forall i (0 \le i \le s \supset (\xi_{t_{\ell,j}}^\ell < c_i < \eta_{t_{\ell,j}}^\ell \equiv i_{\ell,j} \le i \le i_{\ell,j} + \sigma_{\ell,j} - 2))$. Мы обозначим $\forall j (1 \le j \le \tau_\ell \supset (\psi_{2j-1}^\ell \rightleftharpoons \xi_{t_{\ell,j}}^\ell) \,\&\, (\psi_{2j}^\ell \rightleftharpoons \eta_{t_{\ell,j}}^\ell) \,\&$ $(x_0^{\ell,j} \rightleftharpoons \psi_{2j-1}^\ell) \,\&\, (x_{\sigma_{\ell,j}}^{\ell,j} \rightleftharpoons \psi_{2j}^\ell) \,\&\, \forall i (i_{\ell,j} \le i \le i_{\ell,j} + \sigma_{\ell,j} - 2 \supset x_{i - i_{\ell,j}+1}^{\ell,j} \rightleftharpoons c_i))$.

Тогда выполнено

$$\sum_{i=1}^{s} |\mathcal{F}(c_i)-\mathcal{F}(c_{i-1})-(\varphi_n(c_i)-\varphi_n(c_{i-1}))| \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{r_l-1} |\mathcal{F}(y^l_{2j+1})-\mathcal{F}(y^l_{2j})-(\varphi_n(y^l_{2j+1})-\varphi_n(y^l_{2j}))| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r_l} \sum_{k=1}^{s_{l,j}} |\mathcal{F}(x^{l,j}_k)-\mathcal{F}(x^{l,j}_{k-1})-(\varphi_n(x^{l,j}_k)-\varphi_n(x^{l,j}_{k-1}))| \Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_l} \sum_{k=1}^{s_{l,j}} \Big|\mathcal{F}(x^{l,j}_k)-\mathcal{F}(x^{l,j}_{k-1})-(\mathcal{F}(y^l_{2j})-\mathcal{F}(y^l_{2j-1}))\cdot \frac{x^{l,j}_k-x^{l,j}_{k-1}}{y^l_{2j}-y^l_{2j-1}}\Big| \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_l} \Big(|\mathcal{F}(y^l_{2j})-\mathcal{F}(y^l_{2j-1})| + \sum_{k=1}^{s_{l,j}} |\mathcal{F}(x^{l,j}_k)-\mathcal{F}(x^{l,j}_{k-1})| \Big) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n},$$

ибо (2) и для всякого НЧ l, $1 \le l \le m$, верно

$$\sum_{j=1}^{r_l} |\mathcal{F}(y^l_{2j})-\mathcal{F}(y^l_{2j-1})| < \frac{1}{6n.m} .$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда

а) $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$ в том и только том случае, если существуют абсолютно непрерывная функция g и функция φ такие, что $\alpha(\varphi)$ & $\mathcal{F} = g * \varphi$;

б) $\mathcal{F}$ обладает свойствами $(T_1)^{\Delta}$ и $(N)^*$ в том и только том случае, если $\mathcal{F}$ представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций.

Доказательство. Мы будем пользоваться определением 3 и замечанием 4 из [9]. Ввиду замечания 1 и леммы 4 нам достаточно ограничиться следующим.

Пусть функция $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$. Тогда ввиду замечания 1 $\mathcal{F}$ равномерно непрерывна и функция $n_{\mathcal{F}}$ обладает свойствами $(T_1)^{\Delta}$ и $(T_1)^*$. Согласно теореме 3 из [9] существуют возрастающие на $0 \Delta 1$ абсолютно непрерывные функции ψ_1 и ψ такие, что $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \psi * (\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ и $\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$. Применив замечание 1 и леммы 4 и 7 мы получаем $\alpha(\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$. По замечанию 4 из [9] верно $\mathcal{F} = {}^{\mathcal{F}}\psi * (\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$, где ${}^{\mathcal{F}}\psi$ абсолютно непрерывная функция.

Если функция $\mathcal{F}$ дополнительно обладает свойством $(N)^*$, то согласно замечанию 3, теоремам 3, 7 и 9 и следствию теоремы 5 из [10] функция $\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ обладает свойством a. Из $a(\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}}) \& \alpha(\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ следует по теореме из [4] абсолютная непрерывность функции $\psi_1 * \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{F}$ функция.

а) Согласно лемме 3 из 1) следует 2).

б) Пусть выполнено 2). В замечании 1 отмечено, что всякая абсолютно непрерывная функция обладает свойствами α и $(N)^*$. Таким образом, $\mathcal{F}$ обладает свойством $(T_1)^{\Delta}$. При помощи теоремы 5 из [10] и леммы 1 легко доказать, что $\mathcal{F}$ обладает свойством $(N)^*$. Итак, верно 3).

в) Согласно части б) теоремы 2 из 3) следует 4).

г) Мы на основании замечания 1 знаем, что 4) влечет за собой 1).

Условие равномерности дифференцирования в определении свойства $(S)^{\Delta}$ нельзя опустить, Об этом свидетельствует следующий пример.

Пример. Существуют равномерно непрерывные функция f и $\{F_n\}_n \in S$ такие, что

1) $0 \leq f \leq 1$, f обладает свойствами $(N)^*$ и $a_{кл}$;

2) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$\exists u\, (P(u, \{F_m\}_m, x)\ \&\ D(u, f, x))$;

3) f нельзя представить в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций;

4) согласно лемме 1 настоящей заметки, теореме 3 из [3] и теореме 10 из [10] из 1) и 2) следует

а) для всякого НЧ n существуют S_σ-множество $\mathcal{G}^n$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^n}$ и равномерно непрерывная функция φ_n такие, что $\forall x\, (\neg (f(x) \in \mathcal{G}^n)\ \&\ x \in 0 \Delta 1 \supset D(\varphi_n(x), f, x))$

и

б) f обладает свойством $(T_1)^*$.

Литература

[1] BARY N.: Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues, Math.Annalen 103(1930), 185-248.

[2] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова,т.LXVII (1962),385-457.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math.Univ.Carolinae 11(1970),705-726.

[5] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 12(1971),423-451.

[6] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math.Univ.Carolinae 12(1971),687-711.

[7] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивной функции в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций, Comment. Math.Univ.Carolinae 13(1972),227-251.

[8] ДЕМУТ О.: О представимости равномерно непрерывных конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973),7-25.

[9] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивном аналоге свойства (T_1), Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973), 421-439.

[10] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивных аналогах свойств (N) и (S), Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973), 565-582.

[11] ДЕМУТ О.: О представимости конструктивных функций, обладающих свойствами (S) и (T_1), в виде суперпозиций, Comment.Math.Univ.Caroline 15(1974), 49-64.

(Oblatum 2.1.1974)

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83
186 00 Praha 8, Československo