Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

15,1 (1974)

ELEMENTS FINIS ET L'ESTIMATION DE L'ERREUR INTERIEUR DE LA CONVERGENCE

Jaroslav HASLINGER, Praha

Résumé: En utilisant la régularité interne, J.A. Nitsche a étudié dans [1] l'ordre de la convergence des solutions de Galerkin à l'intérieur du domaine Ω . Il exige, que certaines conditions, concernant des espaces S_h , soient satisfaites. Le but de ce travail est de démontrer, que certaine classe $\{S_h\}$, assez utilisée dans la pratique, satisfait à ces conditions. De plus, on utilise ici seulement des versions locales de ces propriétés.

Mots clef : éléments finis.

AMS, Primary: 65N30 Ref. Ž. 8.33

---

§ 1. Introduction. Soit $\Omega \subset E_n$ un domaine borné. $W^{k,p}(\Omega)$ ($p \geq 1$, $k \geq 0$ entier) signifie le sous-espace des fonctions de $L^p(\Omega)$, dont les dérivées généralisées jusqu' à l'ordre k sont des éléments de $L^p(\Omega)$. $W^{k,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante:

$$(1.1) \qquad \|v\|_{k,p,\Omega} = \Big(\sum_{j=0}^{k} |v|^p_{j,p,\Omega}\Big)^{1/p}$$

où

$$(2.1) \qquad |v|^p_{j,p,\Omega} = \int_\Omega \|D^j v(x)\|^p dx \; .$$

$\|D^j v(x)\|$ est la norme de l'application j -linéaire, symétrique $D^j v(x) : (E_m)^j \longmapsto E_1$, c'est-à-dire:

(3.1) $$\|D^j v(x)\| = \sup_{\xi_i \neq 0} \frac{D^j v(x)(\xi^1, \dots, \xi^j)}{\|\xi^1\| \dots \|\xi^j\|}$$

$(\xi^i \in E_m)$.

$W_0^{k,p}(\Omega)$ signifie la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme (1.1). $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment continûment differentiables, à support compact dans Ω . Pour 2 espaces de Banach X, Y $\mathcal{L}(X, Y)$ signifie l'espace de toutes les applications linéaires, continues de X dans Y. Soit $\hat{M} \subset E_m$ un ensemble quelconque. On dira, que $M \subset E_m$ est équivalent à $\hat{M}$ (et on écrira $M \sim \hat{M}$), s'il existe une application F affine, inversible de E_m dans E_m telle que $M = F(\hat{M})$. Donc F est de la forme $F\hat{x} = B\hat{x} + b$ avec $B \in \mathcal{L}(E_m, E_m)$ inversible, $b \in E_m$. Soit $\hat{P}$ un espace de dimension finie des fonctions, définies sur le domaine $\hat{\Omega} \subset E_m$. Pour $\Omega \sim \hat{\Omega}$ on définit l'espace P de la manière suivante:

(4.1) $$P = \{p, \exists \hat{p} \in \hat{P}, p = \hat{p} \circ F^{-1}\} ,$$

où F^{-1} est l'application inverse de F: $F(\hat{\Omega}) = \Omega$. Evidemment $\dim P = \dim \hat{P} = N(\hat{P})$. En supposant que $\hat{P} \subset W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ on a $P \subset W^{k+1,p}(\Omega)$ si la frontière $\hat{\Gamma}$ de $\hat{\Omega}$ est assez régulière (cf. [3]).

§ 2. <u>Lemmes</u>

<u>Lemme 1</u> (l'inégalité inverse). Soit $\hat{\Omega} \subset E_m$ un domaine fixe, $\Omega \sim \hat{\Omega}$. Alors pour chaque $v \in P$:

(1.2) $|v|_{j+1,p,\Omega} \leq \hat{c}\,\|B^{-1}\|^{j+1} \cdot \|B\|^{j}\,|v|_{j,p,\Omega}$

$j = 0, 1, \ldots, k$,

où $\hat{c} = \hat{c}(k, n, p, \hat{\Omega}, N(\hat{P}))$ est une constante indépendante de v .

Démonstration: On démontre facilement (cf. [2]):

$$(2.2) \quad \begin{cases} |\hat{v}|_{j,p,\hat{\Omega}} \leq \|B\|^{j}\,|\det B|^{-1/p} \cdot |v|_{j,p,\Omega} \\ |v|_{j,p,\Omega} \leq \|B^{-1}\|^{j}\,|\det B|^{1/p} \cdot |\hat{v}|_{j,p,\hat{\Omega}} \end{cases}$$

$j = 0, 1, \ldots, k+1$,

pour chaque $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ avec $v = \hat{v} \circ F^{-1}$. De (4.1), (2.2), et du fait que $N(\hat{P}) < \infty$, on obtient pour $v \in P$:

$$|v|_{j+1,p,\Omega} \leq \|B^{-1}\|^{j+1}\,|\det B|^{1/p}\,|\hat{v}|_{j+1,p,\hat{\Omega}} \leq$$

$$\leq \hat{c}\,\|B^{-1}\|^{j+1}\,|\det B|^{1/p}\,|\hat{v}|_{j,p,\hat{\Omega}} \leq \hat{c}\,\|B^{-1}\|^{j+1}\,\|B\|^{j}\,|v|_{j,p,\Omega} \, .$$

Remarque 1.2. On désigne par h (resp. $\hat{h}$) le diamètre de Ω (resp. de $\hat{\Omega}$) et par ρ (resp. $\hat{\rho}$) le maximum des diamètres des sphères contenues dans Ω (resp. $\hat{\Omega}$). Si $\hat{\rho} > 0$, l'estimation suivante est connue (cf. [2]):

$$\|B\| \leq \frac{h}{\hat{\rho}} \, , \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho} \, .$$

Alors:

$$(3.2) \qquad |v|_{j+1,p,\Omega} \leq c\,\frac{h^{j}}{\rho^{j+1}}\,|v|_{j,p,\Omega} \, .$$

Remarque 2.2. Soit $\alpha > 0$ indépendant de h tel que

(4.2) $$\frac{\rho}{h} \geq \alpha \; .$$

D'ici et de (3.2) on obtient:

(5.2) $$|v|_{j+1,p,\Omega} \leq c h^{-1} |v|_{j,p,\Omega}$$
$$v \in P \, , \quad j = 0, 1, \dots, k \; .$$

Remarque 3.2. Le résultat analogue à celui de (1.2) a lieu aussi pour des éléments finis courbes isoparamètriques.

Faisons maintenant le choix plus spécial de $\hat{\Omega}$ et $\hat{P}$. Soient $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^{N}$ N points distincts de E_n et $\hat{\Omega} = \hat{K} = conv(\hat{\Sigma})$ l'enveloppe convexe de $\hat{\Sigma}$. Dans ce qui suit on va distinguer 2 cas:

I. $\hat{K}$ est le n-simplex dans E_n et $\hat{P} = P_k$ est l'espace des polynômes de degré $\leq k$ en n variables. Soit $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^{N}$, $\Sigma \sim \hat{\Sigma}$, c'est-à-dire $F(\hat{a}_i) = a_i$, $i = 1, \dots, N$, F affine inversible. Alors $K = F(\hat{K}) = conv(\Sigma)$ est un n-simplex dans E_n. Supposons qu'il existe l'application $\hat{\Pi}_{\hat{K}} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{K}), W^{m,p}(\hat{K}))$, $0 \leq m \leq k+1$ et telle que $\hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{v} = \hat{v}$ pour chaque $\hat{v} \in P_k$. Définissons l'opérateur $\Pi_K \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(K), W^{m,p}(K))$ par $\widehat{\Pi_K v} = \hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{v}$, où $\widehat{\Pi_K v} = \Pi_K v \circ F$. L'estimation suivante est connue (cf. [2]):

(6.2) $$|v - \Pi_K v|_{m,p,K} \leq c h^{k+1-m} |v|_{k+1,p,K} \, , \quad v \in W^{k+1,p}(K) \, ,$$

si la condition (4.2) est satisfaite.

Lemme 2. Soient $\omega \in C^{\infty}(K)$ et $\hat{\Pi}_{\hat{K}} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{K}), W^{m,p}(\hat{K}))$, $0 \le m \le k+1$ comme ci-dessus. Alors pour chaque $v \in P$ il existe $\varphi \in P$ tel que:

$$(7.2) \qquad |\omega v - \varphi|_{m,p,K} \le c h^{k+1-m} \|v\|_{k,p,K}$$

si la condition (4.2) est satisfaite.

Démonstration: en effet, il suffit de prendre $\varphi = \Pi_K(\omega v)$. De (6.2):

$$|\omega v - \varphi|_{m,p,K} \le c h^{k+1-m} |\omega v|_{k+1,p,K} .$$

Parce que $P = P_k$ on a $D^{k+1} v(x) \equiv 0$ pour chaque $v \in P$. D'ici:

$$|\omega v|_{k+1,p,K} \le c(\omega) \|v\|_{k,p,K} ,$$

d'où l'assertion du lemme.

II. (Le deuxième cas.) $\hat{K}$ est le parallelotope dans E_n. Ici on prend $\hat{P} = \hat{Q}_k$, où $\hat{Q}_k$ est l'espace de polynômes de degré $\le k$ par rapport à chaque variable. Soient $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^{N}$, $\Sigma \sim \hat{\Sigma}$, c'est-à-dire $F(\hat{a}_i) = a_i$, $i = 1, \dots, N$ et supposons que la matrice B de l'application affine F est diagonale. Autrement dit, $K = F(\hat{K})$ est un parallelotope dans E_n. Soit $\hat{\Pi}_{\hat{K}} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{K}), W^{m,p}(\hat{K}))$, $0 \le m \le k+1$, laissant des polynômes de $\hat{Q}_k$ invariants: $\hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{v} = \hat{v}$ pour chaque $\hat{v} \in \hat{Q}_k$. Si on définit $\Pi_K \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(K), W^{m,p}(K))$ par

$\widehat{\Pi_K v} = \hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{v}$ et la condition (4.2) est satisfaite, alors (cf. [2]):

(8.2) $$|v - \Pi_K v|_{m,p,K} \leq c h^{k+1-m} [v]_{k+1,p,K} ,$$
$$0 \leq m \leq k+1$$

avec $$[v]^p_{k+1,p,K} = \int_K [D^{k+1} v(x)]^p dx ,$$
$$[D^{k+1} v(x)] = \sup_{\alpha \in A} |D^{k+1} v(x)((e_1)^{\alpha_1}, \dots, (e_n)^{\alpha_n})| ,$$

où $e_1, \dots, e_n$ forment la base canonique de E_n et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. $D^{k+1} v(x)((e_1)^{\alpha_1}, \dots, (e_n)^{\alpha_n})$ est la valeur de la forme $(k+1)$-linéaire symétrique, appliquée à α_1 vecteurs $e_1, \dots, \alpha_n$ vecteurs e_n. A est l'ensemble de tous les multi-indices de longueur $(k+1)$ ayant une seule composante non nulle.

<u>Lemme 3</u>. Soient $\omega \in C^\infty(K)$, $\hat{\Pi}_{\hat{K}} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{K}), W^{m,p}(\hat{K}))$ comme ci-dessus. Alors pour chaque $v \in P$ il existe $\varphi \in P$ tel que

(9.2) $$|\omega v - \varphi|_{m,p,K} \leq c h^{k+1-m} \| v \|_{k,p,K}$$

si la condition (4.2) est satisfaite.

<u>Démonstration</u>: Dans ce cas spécial, $\hat{Q}_k$ reste invariant par rapport à l'application F (avec B diagonale). On vérifie immédiatement, que $\varphi = \Pi_K(\omega v)$ satisfait à (9.2).

Soit $\Omega \subset E_n$ un domaine polyèdrique, borné, de frontière Γ. Etant donné un paramètre $h > 0$, destiné à tendre vers 0 , on associe à h une triangulation $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$: $\overline{\Omega}$ s'exprime comme étant la réunion d'un nombre fini de n -simplexes K_i fermé, avec des propriétés usuelles $(i = 1, \ldots, N(h))$. Soit h_i le diamètre de K_i et ρ_i le diamètre de la sphère inscrite dans K_i . On suppose que $h_i \leq h$, $i = 1, 2, \ldots, N(h)$ est que $\{\mathcal{T}_h\}$ est une suite régulière de triangulation de $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire: $\exists\, \alpha > 0$ ind. de h tel que:

$$\max_{i=1,\ldots,N(h)} \frac{h_i}{\rho_i} \leq \alpha \quad .$$

Si la frontière Γ est un polyèdre à côtés parallèles aux axes, on utilise une suite des quadrangulations $\{\mathcal{R}_h\}$ avec les propriétés analogues comme dans le cas précédent. Des raisons de la simplification des notations, on va utiliser le symbole commun $\mathcal{T}_h$ qui signifie ou la triangulation ou la quadrangulation du domaine $\overline{\Omega}$, suivant le cas. Associons à chaque $\mathcal{T}_h$ l'espace de dimension finie S_h , défini de la manière suivante:

$$(10.2)\quad S_h = \{v, v \in C(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,2}(\Omega), v|_{K_i} \in P, \forall K_i \in \mathcal{T}_h\} \;,$$

avec $P = P_k$ dans le cas de la triangulation et $P = Q_k$ qui est associé à $\hat{P} = \hat{Q}_k$ par (4.1) dans le cas de la quadrangulation de $\overline{\Omega}$. Enfin on désigne par

$\Pi_{K_i} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(K_i), W^{m,p}(K_i))$ l'opérateur avec des propriétés précédentes sur chaque $K_i \in \mathcal{T}_h$. Supposons que l'application κ_h définie par:

$$\kappa_h v = \Pi_{K_i} v \qquad \text{sur chaque } K_i \in \mathcal{T}_h$$

e κ une application de $V_{k,p}(\Omega,\{\mathcal{T}_h\})$ dans S_h.

$V_{j,p}(G,\{\mathcal{T}_h\})$ (avec $G \subset E_n$ un domaine borné, $p \geq 1$, $j \geq 1$ entier) signifie l'ensemble linéaire, des fonctions avec cette propriété:

ayant une famille $\{\mathcal{T}_h\}$ correspondante à $h \longrightarrow 0$ telle que

$$\bigcup_{i=1}^{N(h)} K_i \supseteq \overline{G} \quad \text{pour chaque } h \text{, alors:}$$

$$\|v - \Pi_{K_i} v\|_{m,p,K_i} \leq c h^{j+1-m} \|v\|_{j+1,p,K_i}, \quad 0 \leq m \leq j+1$$

et pour chaque $K_i \subseteq \overline{G}$. Evidemment si G est un polyèdre, on peut prendre $\{\mathcal{T}_h\}$ tel que

$$\bigcup_{i=1}^{N(h)} K_i = G, \quad K_i \subseteq \overline{G}, \quad i = 1, 2, \dots, N(h).$$

Lemme 4. Soit $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap V_{k,p}(\Omega,\{\mathcal{T}_h\})$ $(k \geq 1)$ avec $supp(v) = \Omega' \subset \Omega$. Alors il existe $v_h \in S_h$ tel que

(11.2) $$\|v - v_h\|_{j,p,\Omega} \leq c h^{k+1-j} \sum_{K_i} \|v\|_{k+1,p,K_i}, \quad j = 0,1$$

et

(12.2) $$dist(\Omega', supp(v_h)) \leq c h,$$

où c est une constante indépendante de h.

Démonstration: on obtient pour $v_h = \kappa_h v$

$$\|v - \kappa_h v\|^p_{j,p,\Omega} = \sum_{K_i} \|v - \Pi_{K_i} v\|^p_{j,p,K_i} \leq c h^{p(k+1-j)} \sum_{K_i} \|v\|^p_{k+1,p,K_i}.$$

De plus, de la définition de κ_h on a:

$dist(\Omega', supp(r_h v)) \leq ch$ pour h assez petit.

Remarque 4.2. Si $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ on peut écrire dans (11.2)

$$(13.2) \qquad \| v - v_h \|_{j,p,\Omega} \leq c h^{k+1-j} \| v \|_{k+1,p,\Omega}$$

$$(j = 0, 1) \ .$$

Lemme 5. Supposons que $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap V_{k',p}(\Omega, \{\mathcal{T}_h\}) \cap V_{k,p}(\Omega_1, \{\mathcal{T}_h\})$, $k > k' \geq 1$, $\Omega_1 \subset \Omega$ et $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$ ($\Longleftrightarrow \Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$) .
Alors il existe $v_h \in S_h$ tel que

$$(14.2) \qquad \| v - v_h \|_{j,p,\Omega} \leq c h^{k'+1-j} \sum_{K_i} \| v \|_{k'+1,p,K_i}$$

et

$$(15.2) \qquad \| v - v_h \|_{j,p,\Omega_2} \leq c h^{k+1-j} \sum_{K_i \subset \Omega_1} \| v \|_{k+1,p,K_i}$$

$$(j = 0, 1)$$

pour h assez petit.

Démonstration: En effet, pour $v_h = r_h v$ le résultat (14.2) vient du lemme 4. Désignons par $\Omega_3 = \bigcup_{K_i \cap \Omega_2 \neq \emptyset} K_i$. Alors $\Omega_3 \subset \Omega_1$ pour h assez petit et

$$\| v - r_h v \|^p_{j,p,\Omega_2} \leq \| v - r_h v \|^p_{j,p,\Omega_3} \leq c h^{p(k+1-j)} \sum_{K_i \subset \Omega_1} \| v \|^p_{k+1,p,K_i} \ .$$

Lemme 6. Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap V_{k,p}(\Omega_1, \{\mathcal{T}_h\})$, $k \geq 1$, $\Omega_1 \subset \Omega$ et $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$. Alors il existe $v_h \in S_h$ tel que:

$$(16.2) \qquad \| v - v_h \|_{1,p,\Omega} \longrightarrow 0 \qquad \text{pour } h \longrightarrow 0$$

(17.2) $$\| v - v_h \|_{j,p,\Omega_2} \leq c h^{k+1-j} \sum_{K_i \subset \Omega_1} \| v \|_{k+1,p,K_i}$$

(18.2) $$\sum_{K_i^h \cap \Omega_2 \neq \emptyset} \| v - v_h \|_{j,p,K_i} \leq c h^{k+1-j} \sum_{K_i \subset \Omega} \| v \|_{k+1,p,K_i} ,$$

$$j = 0, 1, \ldots, k+1 .$$

<u>Démonstration</u>: Construisons un recouvrement $\{ O_t \}_{t=1}^{N+1}$ de Ω tel que $O_t \supset \overline{\Omega - \Omega_1}$, $O_t \cap \Omega_2 = \emptyset$ $(t = 1, \ldots, N)$ et $\Omega_2 \subset\subset O_{N+1} \subset\subset \Omega_1$. Soient φ_t des fonctions donnant une décomposition de l'unité pour Ω correspondante à $\{ O_t \}_{t=1}^{N+1}$. On peut écrire:

$$v = \sum_{t=1}^{N+1} v_t , \quad v_t = v \cdot \varphi_t .$$

Il est évident que $v_{N+1} = v$ dans un voisinage de Ω_2 . Parce que $v_t \in W_0^{1,2}(O_t)$ $(t = 1, 2, \ldots, N)$, on peut trouver une suite $\{ \varphi_t^\lambda \}$, $\varphi_t^\lambda \in \mathcal{D}(O_t)$ telle que $\| v_t - \varphi_t^\lambda \|_{1,p,O_t} \longrightarrow 0$ pour $\lambda \longrightarrow 0$.

Posons $V^\lambda = \sum_{t=1}^{N} \varphi_t^\lambda + v_{N+1}$. Alors:

$$\| v - V^\lambda \|_{1,p,\Omega} \leq \sum_{t=1}^{N} \| v_t - \varphi_t^\lambda \|_{1,p,O_t} \longrightarrow 0$$

pour $\lambda \longrightarrow 0$.

Soit $\{ \mathcal{T}_h \}$ une famille associée à $h \longrightarrow 0$. Alors pour h assez petit la condition suivante est satisfaite:

$$K_i \cap \Omega_2 \neq \emptyset \Longrightarrow K_i \cap (\Omega - \Omega_1) = \emptyset \qquad (K_i \in \mathcal{T}_h)$$

On sait que $v \in \mathcal{V}_{k,p}(\Omega_1, \{ \mathcal{T}_h \})$ d'où il vient:

$v_{N+1} \in \mathcal{V}_{k,p}(\Omega_1, \{\mathcal{T}_h\})$ (même de $\mathcal{V}_{k,p}(\Omega, \{\mathcal{T}_h\})$.

De (11.2):

$$\| v_{N+1} - r_h v_{N+1} \|_{j,p,\Omega} \leq c h^{k+1-j} \sum_{K_i} \| v_{N+1} \|_{k+1,p,K_i}$$

$$\leq c h^{k+1-j} \sum_{K_i \subset \Omega_1} \| v \|_{k+1,p,K_i} \quad \text{et}$$

$supp(r_h v_{N+1}) \subset\subset \Omega_1$ pour h assez petit.

De même:

$$\| \varphi_t^\lambda - r_h \varphi_t^\lambda \|_{j,p,O_t} = \| \varphi_t^\lambda - r_h \varphi_t^\lambda \|_{j,p,\Omega} \leq c h^{k+1-j} \| \varphi_t^\lambda \|_{k+1,p,O_t}$$

$(\varphi_t^\lambda \in \mathcal{V}_{k,p}(\Omega, \{\mathcal{T}_h\}))$.

Posons $v_h = \sum_{t=1}^{N} r_h \varphi_t^\lambda + r_h v_{N+1} \in S_h$.

Alors

$$\| v - v_h \|_{j,p,\Omega} \leq \| v - V^\lambda \|_{j,p,\Omega} + \sum_{t=1}^{N} \| \varphi_t^\lambda - r_h \varphi_t^\lambda \|_{j,p,O_t} +$$

$$+ \| v_{N+1} - r_h v_{N+1} \|_{j,p,\Omega} \longrightarrow 0 \quad \text{pour } h, \lambda \longrightarrow 0 ,$$

d'où (16.2).

Maintenant:

$$\| v - v_h \|_{j,p,\Omega_2} = \| v_{N+1} - r_h v_{N+1} \|_{j,p,\Omega_2} \leq$$

$$\leq \sum_{K_i \cap \Omega_2 \neq \emptyset} \| v_{N+1} - r_h v_{N+1} \|_{j,p,K_i} \leq c h^{k+1-j} \sum_{K_i \cap \Omega_2 \neq \emptyset} \| v \|_{k+1,p,K_1}$$

$(j = 0, 1)$

d'où (17.2) et de la même façon (18.2).

§ 3. Estimation de l'ordre de la convergence à l'intérieur Ω

Considérons le même problème, comme dans [1], c'est-à-dire:

(1.3) $\quad -\Delta u = f \quad$ dans $\Omega \subset E_2$, Ω polygonal

$$u|_{\Gamma} = 0 ,$$

sous les mêmes hypothèses sur la régularité de la solution de (1.3):

(i) pour $f \in L^2(\Omega)$ la solution u appartient à $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ et

(2.3) $$\|u\|_{2,2,\Omega} \leq c \|f\|_{0,2,\Omega} .$$

(ii) Si $\Omega_2 = supp\,(f) \subset\subset \Omega$ et $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset \Omega$, alors la restriction u sur $\Omega - \Omega_1$ appartient à $W^{\lambda,2}(\Omega - \Omega_1)$ (λ ind.de Ω_1 , Ω_2) et

(3.3) $$\|u\|_{\lambda,2,\Omega-\Omega_1} \leq c \|f\|_{0,2,\Omega_2} .$$

Remarque 1.3. La formulation faible de notre problème est la suivante: trouver $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que

(4.3) $$a(u,v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \, dy \qquad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) ,$$

où $$a(u,v) = \int_{\Omega} grad\, u \cdot grad\, v \, dx\, dy .$$

Si $\Omega \subset E_2$ est un polygôn convexe, alors les deux conditions (i), (ii) sont satisfaites (cond. (ii) avec $\lambda = 2$ par ex.).

Remarque 2.3. En ce qui concerne de la régularité interne de la solution de (1.3), le résultat suivant est connu (cf. [3]):

soit $f \in W^{-1+j,2}(\Omega)$ $(j \geq 1$ entier). Alors $u \in W^{j+1,2}(\Omega')$ pour chaque sous-domaine $\Omega' \subset\subset \Omega$.

On cherche $u_h \in S_h$ tel que

$$a(u_h, v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx \, dy \qquad \forall v \in S_h \ .$$

Lemme 8. Soient Ω_2, Ω_1 des domaines, $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset \subset \Omega$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{k+1,2}(\Omega_1)$ $(k \geq 1)$, $\{S_h\}$ le système des espaces de dimension finie, introduit par (10.2), κ_h l'application de

$$\mathcal{V}_{k,2}(\Omega_1, \{\mathcal{T}_h\}) \cap \mathcal{V}_{\lambda-1,2}(\Omega - \Omega_2, \{\mathcal{T}_h\}) \cap \mathcal{V}_{1,2}(\Omega, \{\mathcal{T}_h\}) \ .$$

Alors:

$$(5.3) \qquad \|e\|_{1,2,\Omega_2} \leq ch \|e\|_{1,2,\Omega_1} + ch^k \|u\|_{k+1,2,\Omega_1} + ch^{\lambda-1} \|e\|_{1,2,\Omega}$$

où $e = u - u_h$ et c est une constante ind. de h .

Démonstration: c'est une adaptation de la démonstration présentée dans [1]. Soient $\Omega_2 \subset\subset \Omega'_2 \subset\subset \Omega'_1 \subset\subset \Omega''_1 \subset\subset \Omega_1$ et $\omega(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leq \omega(x) \leq 1$ et

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_2 \\ 0 & x \in \Omega - \Omega'_2 \ . \end{cases}$$

Dans ce qui suit le symbole $\tilde{q}$ signifie le produit $q\omega$. On a: $\tilde{e} = \omega(u-u_h) = (\tilde{u} - R_h\tilde{u}) - (\tilde{u}_h - R_h\tilde{u}_h) + R_h\tilde{e}$, où $R_h \in \mathcal{L}(W_0^{1,2}(\Omega), S_h)$ est défini par:

$$a(u,v) = a(R_h u, v) \qquad \forall v \in S_h \,. \tag{6.3}$$

En utilisant les propriétés de R_h et de l'espace S_h on obtient:

$$\|\tilde{u} - R_h\tilde{u}\|_{1,2,\Omega} \leq c\|\tilde{u} - \kappa_h\tilde{u}\|_{1,2,\Omega_1} \leq ch^k\|u\|_{k+1,2,\Omega_1} \,. \tag{7.3}$$

Parce que $\tilde{u}_h \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap \mathcal{V}_{k,2}(\Omega, \{\mathcal{T}_h\})$ (notons, qu'en général $u_h \notin W^{k,2}(\Omega)$, $k \geq 2$), d'après (7.2), (resp. (9.2)):

$$\|\tilde{u}_h - R_h\tilde{u}_h\|_{1,2,\Omega} \leq c\,\|\tilde{u}_h - \kappa_h\tilde{u}_h\|_{1,2,\Omega} \leq$$

$$\leq c\sum_{K_i \subset \Omega_1'} \|\omega u_h - \kappa_h(\omega u_h)\|_{1,2,K_i} \leq ch^k \sum_{K_i \subset \Omega_1'} \|u_h\|_{k,2,K_i}$$

prenant en considération que $supp(\kappa_h\tilde{u}_h) \subset\subset \Omega_1'$ pour h assez petit. Associons à u la fonction $U_h \in S_h$ avec les propriétés du lemme 6.

Parce que $U_h - u_h \in S_h$ on peut utiliser (5.2) avec $\Omega = K_i \in \mathcal{T}_h$. Alors:

$$\begin{aligned} ch^k \sum_{K_i \subset \Omega_1'} \|u_h\|_{k,2,K_i} &\leq ch^k\Big(\sum_{K_i \subset \Omega_1'} \|u_h - U_h\|_{k,2,K_i} + \\ &+ \sum_{K_i \subset \Omega_1'} \|U_h\|_{k,2,K_i}\Big) \leq ch \sum_{K_i \subset \Omega_1'} \|u_h - U_h\|_{1,2,K_i} + \\ &+ ch^k \sum_{K_i \subset \Omega_1'} \|U_h - u\|_{k,2,K_i} + ch^k\|u\|_{k,2,\Omega_1} \,. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Examinons tous les termes dans (8.3)

$$(9.3)\quad ch\sum_{K_i\subset\Omega_1'}\|u_h-U_h\|_{1,2,K_i}\le ch\,\|u_h-U_h\|_{1,2,\Omega_1'}\le$$
$$\le ch\,\|u_h-u\|_{1,2,\Omega_1'}+ch\,\|u-U_h\|_{1,2,\Omega_1'}\le ch\,\|e\|_{1,2,\Omega_1}+$$
$$+ch^{k+1}\|u\|_{k+1,2,\Omega_1}\quad \text{(d'après (17.2))}\ .$$

Enfin (d'après (18.2)):

$$(10.3)\quad ch^{k}\sum_{K_i\subset\Omega_1'}\|U_h-u\|_{k,2,K_i}\le ch^{k+1}\sum_{K_i\subset\Omega_1''}\|u\|_{k+1,2,K_i}\le$$
$$\le ch^{k+1}\|u\|_{k+1,2,\Omega_1}\ .$$

De (8.3), (9.3), (10.3):

$$(11.3)\quad \|\tilde u_h-R_h\tilde u_h\|_{1,2,\Omega}\le ch\,\|e\|_{1,2,\Omega_1}+ch^{k}\|u\|_{k+1,2,\Omega_1}\ .$$

Il nous reste à estimer $\|R_h\tilde e\|_{1,2,\Omega}$:

$$(12.3)\quad \|R_h\tilde e\|_{1,2,\Omega}\le c\,[a(R_h\tilde e,R_h\tilde e)]^{1/2}\le$$
$$\le c\,\sup_{\varphi}\{a(R_h\tilde e,\varphi),\ \varphi\in S_h,\ \|\varphi\|_{1,2,\Omega}\le 1\}\ .$$

De (6.3): $\quad a(R_h\tilde e,\varphi)=a(\tilde e,\varphi)\quad \forall\varphi\in S_h\ .$

En utilisant la formule de Green on obtient:

$$a(\tilde e,\varphi)=a(e,\tilde\varphi)+a(e,v)\ ,$$

où v est la solution du problème:

$$-\Delta v=2\,div\,(\varphi.\,grad\,\omega)+\varphi.\Delta\omega\quad \text{dans } \Omega$$
$$v|_{\Gamma}=0\ .$$

De la définition de l'erreur e : $a(e,\tilde\varphi)=a(e,\tilde\varphi-v_h)$ pour chaque $v_h\in S_h$. Si on pose $v_h=\pi_h\tilde\varphi$ on obtient:

$$|a(e,\tilde\varphi)|\le c\,\|e\|_{1,2,\Omega_1}\cdot\sum_{K_i\subset\Omega_1'}\|\omega\varphi-\pi_h(\omega\varphi)\|_{1,2,K_i}\le$$

$$\leq c h^{k} \| e \|_{1,2,\Omega_1} \cdot \sum_{K_i \subset \Omega'_1} \| \varphi \|_{k,2,K_i} \leq c h \| e \|_{1,2,\Omega_1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{K_i \subset \Omega'_1} \| \varphi \|_{1,2,K_i} \leq c h \| e \|_{1,2,\Omega_1} \cdot \| \varphi \|_{1,2,\Omega} \ .$$

Les domaines Ω''_1, $\Omega - \Omega'_1$ forment un recouvrement de Ω. Soient φ_1, φ_2 la partition de l'unité, correspondante à ce recouvrement. Alors $v = v_1 + v_2$ avec $v_i = v \cdot \varphi_i$ $(i = 1, 2)$, $supp(v_1) \subset\subset \Omega''_1$, $supp(v_2) \subset\subset \Omega - \Omega'_1$.

$$| a(e, v) | \leq | a(e, v_1 - \kappa_h v_1) | + | a(e, v_2 - \kappa_h v_2) |$$

$$(13.3) \quad | a(e, v_1 - \kappa_h v_1) | \leq c \| e \|_{1,2,\Omega_1} \cdot \| v_1 - \kappa_h v_1 \|_{1,2,\Omega} \leq$$
$$\leq c h \| e \|_{1,2,\Omega_1} \| \varphi \|_{1,2,\Omega}$$

$$(14.3) \quad | a(e, v_2 - \kappa_h v_2) | \leq c \| e \|_{1,2,\Omega} \sum_{K_i \cap \Omega'_2 = \emptyset} \| v_2 - \kappa_h v_2 \|_{1,2,K_i} \leq$$
$$\leq c h^{a-1} \| e \|_{1,2,\Omega} \cdot \| \varphi \|_{1,2,\Omega}$$

en utilisant les hypothèses (i), (ii). De (7.3), (11.3), (13.3), (14.3) on obtient l'assertion du lemme.

<u>Théorème 1.</u> Sous les hypothèses du lemme précédent on obtient:

$$(15.3) \quad | e |_{1,2,\Omega_2} \leq c h^{k} \| u \|_{k+1,2,\Omega_1} + c h^{a-1} \| e \|_{1,2,\Omega} \ .$$

<u>Démonstration</u>: par récurrence par rappot aux domaines Ω_2 on obtient l'assertion du théorème.

<u>Example</u>.

$-\Delta u = f$ dans Ω, $\Omega \subset E_2$ un polygôn convexe

$u|_{\Gamma} = 0$, $f \in W^{1,2}(\Omega)$.

Alors $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega) \cap W^{3,2}(\Omega')$, $\Omega' \subset\subset \Omega$.
Soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille régulière des triangulations, associée à $h \to 0$. Nous partageons les triangles $K_i \in \mathcal{T}_h$ en 3 groupes disjoints. Le I^{er} groupe est formé par des triangles, dont au moins un côté fait une partie de Γ . L'espace P associé à tel triangle est $P = P_1$. Dans le deuxième groupe se trouve chaque triangle, dont au moins un côté est commun aussi pour un triangle du I^{er} groupe. Ici P est le sous-espace de P_2 des polynômes, dont la trace sur le côté commun est une fonction linéaire. Tous les autres triangles forment le troisième groupe. A chaque triangle de ce groupe nous associons l'espace $P = P_2$. Dans tous ces cas, $\Pi_{K_i} v$ signifie l'interpolation de Lagrange de la fonction v sur $K_i \in \mathcal{T}_h$ à l'aide de l'espace P . Si on définit S_h par (10.2), toutes les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites. Spécialement, $\varkappa_h$ est l' application de $\mathcal{V}_{1,2}(\Omega, \{\mathcal{T}_h\}) \cap \mathcal{V}_{2,2}(\Omega', \{\mathcal{T}_h\})$, $\Omega' \subset\subset \Omega$ fixe.

On obtient:

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq c h \|u\|_{2,2,\Omega}$$

et

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega_2} \leq c h^2 \|u\|_{3,2,\Omega_1} + c h^2 \|u\|_{2,2,\Omega}$$

pour h assez petit ($\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$).

Références :

[1] J.A. NITSCHE: Interior error estimates of projection methods, Proceedings Equadiff 3, Brno 1972, pp.235-239.

[2] P.A. RAVIART: Méthode des éléments finis, cours du

III^{ème} cycle, Université de Paris VI.

[3] J. NEČAS: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia,Prague 1967.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83, 18600 Praha 8

Československo

(Oblatum 5.12.1973)