Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

13, 4 (1972)

ОБ АНАЛОГЕ ОДНОЙ ОЦЕНОЧНОЙ ТЕОРЕМЫ Н.В. ЕФИМОВА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

И.А. ЧЕРНЯВСКАЯ, Ростов-на-Дону

Известна следующая, принадлежащая Н.В. Ефимову [1,2], оценочная теорема в евклидовом пространстве E_3, относящаяся к поверхностям отрицательной кривизны K, которые имеют однозначную проекцию на плоскость α:

существует постоянная C, $C = const$, такая, что, если на регулярной поверхности $\mathcal{F}$

$$K \leq -a^2 < 0, \qquad (a = const > 0),$$

то
$$\rho \leq \frac{C}{a},$$

где ρ - радиус круга, целиком лежащего в области $\mathcal{D}$.

Л.А. Сидоров [3] построил аналог этой теоремы для поверхностей в гиперболическом пространстве кривизны $k = -1$.

Теорема Л.А. Сидорова утверждает, что

существует постоянная C, $(C = const > 0)$, такая, что для любой однозначно ортогонально проектирующейся на плоскость α регулярной поверхности $\mathcal{F}$ при условии

AMS, Primary: 53A35 Ref. Ž. 3.931.213

$$K_e \leq -a^2 < 0 , \qquad (a = const > 0) ,$$

справедлива оценка

$$th\, \rho \leq \frac{c}{a} \quad ,$$

где $K_e = K - k$ - внешняя кривизна поверхности $\mathcal{F}$; ρ - радиус круга, целиком лежащего внутри проекции поверхности $\mathcal{F}$ на плоскость α .

Цель настоящей работы - изложить аналог теоремы Н.В. Ефимова для поверхностей эллиптического пространства.

п.1. Трехмерное эллиптическое пространство кривизны $k = \frac{1}{r^2}$ будем интерпретировать в виде гиперсферы S_3 радиуса r с отождествленными диаметрально противоположными точками в четырехмерном евклидовом пространстве E_4 . Введем в E_4 ортогональный базис $\{ \bar{e}_0 , \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 \}$:

$$(\bar{e}_i \, \bar{e}_j) = \begin{cases} 0 , & i \neq j , \\ r^2 , & i = j . \end{cases}$$

Введем в эллиптическом пространстве вейерштрассовы координаты, сопоставляя с каждой точкой его декартовы координаты $\{ x^0 , x^1 , x^2 , x^3 \}$ соответствующей точки гиперсферы S_3 . Для однозначности изометрического отображения эллиптического пространства на гиперсферу потребуем дополнительно

(1) $$x^0 > 0$$

Рассмотрим в эллиптическом пространстве S_3 две регулярные изометричные поверхности $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$:

$$\bar{x} = \bar{x}(u,v), \quad \bar{x}^2 = r^2 ,$$

$$\bar{x}' = \bar{x}'(u,v), \quad \bar{x}'^2 = r^2 .$$

Погореловское отображение [4]:

$$(2) \quad \bar{y} = T\bar{x}\,\frac{r^2\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0\bar{x})}{\bar{e}_0(\bar{x}+\bar{x}')} \qquad \bar{y}' = T'\bar{x}' = \frac{r^2\bar{x}' - \bar{e}_0(\bar{e}_0\bar{x}')}{\bar{e}_0(\bar{x}+\bar{x}')}$$

переводит $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ в пару регулярных изометричных поверхностей Φ, Φ' евклидова пространства $E_0(x^0 = 0)$ [4].

Обозначим K - гауссову кривизну поверхности $\mathcal{F}$. Поставим задачу:

найти связь между внешней кривизной $K_e = K - \frac{1}{r^2}$ поверхности $\mathcal{F}$ и гауссовой кривизной $\tilde{K}$ поверхности Φ в соответсвенных при этом отображении точках $\mathcal{M} \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{N} \in \Phi$.

Обозначим E - конец вектора $\bar{e}_0$. Некоторым движением A эллиптического пространства переведем поверхность $\mathcal{F}$ в конгруэнтную ей поверхность $A\mathcal{F}$ так, чтобы точки $\mathcal{M} \in \mathcal{F}$ перешли в точку $E \in A\mathcal{F}$.

Отображение

$$(3) \qquad \tilde{y} = \tilde{T}(A\bar{x}) = \frac{r^2 A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{\bar{e}_0(\bar{x} + A\bar{x})}$$

переведет поверхность $A\mathcal{F}$ в поверхность $\tilde{\Phi}$ евклидова пространства E_0 $(x^0 = 0)$. Отображение B поверхности Φ на поверхность $\tilde{\Phi} = B\Phi$, при котором точке $\bar{y} = T\bar{x}$ сопоставляется точка $\tilde{y} = \tilde{T}(A\bar{x})$, является движением, и, следовательно, поверхности Φ и $B\Phi$ конгруэитны [4].

Как следуют из (3), отображение $\widetilde{T}$ переводит точку E пространства S_3 в начало координат 0 пространства E_0. Поэтому движение B переводит точку $\mathcal{N} \in \Phi$ в точку $0 \in B\Phi$.

Очевидно

$$(4) \qquad Ke\big|_{\mathcal{M} \in \mathcal{F}} = Ke\big|_{E \in A\mathcal{F}}, \quad \widetilde{X}\big|_{\mathcal{N} \in \Phi} = \widetilde{X}\big|_{0 \in B\Phi} .$$

Найдем сначала связь между $Ke|_E$ и $\widetilde{X}|_0$. Обозначим $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$; L, M, N и e, f, g; ℓ, m, n - коэффициенты первой и второй основных форм соответственно поверхностей $A\mathcal{F}$ и $B\Phi$. Как известно [4]

$$(5) \quad \mathcal{E} = (A\bar{x})_u^2, \quad \mathcal{F} = (A\bar{x})_u \cdot (A\bar{x})_v, \quad \mathcal{G} = (A\bar{x})_v^2 ,$$

$$(6) \quad L = \frac{(A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v, (A\bar{x})_{uu})}{|[A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v]|} ,$$

$$(7) \quad M = \frac{(A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v, (A\bar{x})_{uv})}{|[A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v]|} ,$$

$$(8) \quad N = \frac{(A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v, (A\bar{x})_{vv})}{|[A\bar{x}, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v]|} ,$$

$$(9) \quad K_e = \frac{LN - M^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} ,$$

и аналогичные формулы имеют место для e, f, g, ℓ, m, n.

Вычислим коэффиценты e, f, g; ℓ, m, n поверхности

$B\Phi = \tilde{\Phi}$ в точке 0. Для этого, дифференцируя (3) по u, v получаем:

$$\tilde{y}_u = \frac{r^2(A\bar{x})_u - \bar{e}_0(\bar{e}_0(A\bar{x})_u)}{\bar{e}_0(\bar{x} + A\bar{x})} - \tag{10}$$

$$- \frac{r^2 A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{(\bar{e}_0 x + \bar{e}_0 A\bar{x})^2} \quad (\bar{e}_0\bar{x}_u + \bar{e}_0(A\bar{x})_u),$$

$$\tilde{y}_v = \frac{r^2(A\bar{x})_v - \bar{e}_0(\bar{e}_0, (A\bar{x})_v)}{\bar{e}_0(\bar{x} + A\bar{x})} - \tag{11}$$

$$- \frac{r^2 A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^2} \quad (\bar{e}_0\bar{x}_v + \bar{e}_0(A\bar{x})_v),$$

$$\tilde{y}_{uu} = \frac{r^2(A\bar{x})_{uu} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, (A\bar{x})_{uu})}{\bar{e}_0(\bar{x} + A\bar{x})} -$$

$$-2\, \frac{r^2(A\bar{x})_u - \bar{e}_0(\bar{e}_0, (A\bar{x})_u)}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^2} (\bar{e}_0\bar{x}_u + \bar{e}_0(A\bar{x})_u) -$$

$$- \frac{r^2 A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{(\bar{e}_0 x + \bar{e}_0 A\bar{x})^2} (\bar{e}_0\bar{x}_{uu} + \bar{e}_0(A\bar{x})_{uu}) +$$

$$+ 2\, \frac{r^2 A\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{e}_0, A\bar{x})}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^3} (\bar{e}_0\bar{x}_u + \bar{e}_0(A\bar{x})_u)^2, \tag{12}$$

и соответствующие выражения для $\tilde{y}_{uv}$, $\tilde{y}_{vv}$. В точке $E \in A\mathcal{F}$ $A\bar{x} = \bar{e}_0$, поэтому

$$(\bar{e}_0 A\bar{x})|_E = r^2, \tag{13}$$

$$(\bar{e}_0(A\bar{x})_u)|_E = (\bar{e}_0, (A\bar{x})_v)|_E = 0. \tag{14}$$

Учитывая (5) и равенства (10),(11),(13),(14), получаем:

$$e|_0 = \tilde{y}_u^2|_0 = \frac{r^4 (A\bar{x})_u^2}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^2}\bigg|_E = \frac{\mathcal{E}|_E}{(1 + \varkappa^0|_M)^2}, \tag{15}$$

и аналогично находим

$$(16)\qquad f|_0 = \frac{\mathcal{F}|_E}{(1+x^0|_M)^2}, \quad g|_0 = \frac{\mathcal{G}|_E}{(1+x^0|_M)^2}.$$

Подсчитаем теперь коэффициенты ℓ, m, n второй основной формы поверхности $\tilde{\Phi} = B\Phi$ в точке 0.

$$(17)\qquad \ell|_0 = \frac{(\tilde{\psi}_u \tilde{\psi}_v \tilde{\psi}_{uu})}{|[\tilde{\psi}_u \tilde{\psi}_v]|}\Big|_0 = \frac{(\bar{e}_0 \tilde{\psi}_u \tilde{\psi}_v \tilde{\psi}_{uu})}{|[\bar{e}_0 \tilde{\psi}_u \tilde{\psi}_v]|}\Big|_0$$

(здесь $(\tilde{\psi}_u \tilde{\psi}_v \tilde{\psi}_{uu})$ - смешанное произведение векторов $\tilde{\psi}_u$, $\tilde{\psi}_v$, $\tilde{\psi}_{uu}$, как векторов евклидова пространства E_0 $(x^0 = 0)$; $(\bar{e}_0 \tilde{\psi}_u \tilde{\psi}_v \tilde{\psi}_{uu})$ - смешанное произведение тех же векторов как векторов пространства E_4, [4].

Подставляя в (17) вместо $\tilde{\psi}_u, \tilde{\psi}_v, \tilde{\psi}_{uu}$ их выражения из (10 - 12) и учитывая (13),(14) получим:

$$\ell|_0 = \frac{(\bar{e}_0, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v, (A\bar{x})_{uu}) \cdot \dfrac{r^6}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^3}}{|[\bar{e}_0, (A\bar{x})_u, (A\bar{x})_v]| \cdot \dfrac{r^4}{(\bar{e}_0\bar{x} + \bar{e}_0 A\bar{x})^2}}\Bigg|_E ,$$

или учитывая (6),

$$(18)\qquad \ell|_0 = \frac{L|_E}{(1+x^0|_M)}.$$

Аналогично находим

$$(19)\qquad m|_0 = \frac{M|_E}{(1+x^0|_M)}, \quad n|_0 = \frac{N|_E}{(1+x^0|_M)}.$$

В силу равенств (15),(16),(18),(19) можем записать:

$$\tilde{K}|_0 = \frac{\ell n - m^2}{eg - f^2}\Big|_0 = \frac{LN - M^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\Big|_E \cdot \frac{(1+x^0|_M)^4}{(1+x^0|_M)^2},$$

или, в силу (9)

(20) $$\tilde{K}|_0 = K_e|_E (1 + x^0|_M)^2 \quad .$$

Из (20), согласно (4), получаем:

$$\tilde{K}|_{N\in\Phi} = K_e|_{M\in\mathcal{F}} \cdot (1 + x^0|_M)^2 \quad .$$

Так как точка M была взята на поверхности $\mathcal{F}$ произвольно, то можно окончательно записать:

(21) $$\tilde{K} = K_e \left[\frac{r^2 + (\bar{e}_0 \bar{x})}{r^2}\right]^2 \quad .$$

Это аналог известной формулы Л.А. Сидорова [3].

В силу (1) из (21) следует, что

(22) $$|\tilde{K}| > |K_e| \quad .$$

п.2. Пусть в эллиптическом пространстве S_3 задана прямая p, проходящая через точку E – конец вектора e_0:

(23) $$\bar{x} = \varphi(\bar{e}_0 + \bar{a}t), \quad \bar{x}^2 = r^2$$

где $\bar{a}$ – направляющий вектор длины r прямой p, приложенный к точке E, т.е.

(24) $$(\bar{a}\bar{e}_0) = 0, \quad (\bar{a}\bar{a}) = r^2 \;;$$

φ – нормирующий множитель:

(25) $$\varphi = \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{(\bar{e}_0 + \bar{a}t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \quad .$$

Отложим на прямой p отрезок EC. Пусть точке C отвечает значение параметра $t = t_0$. Обозначим S - длину отрезка EC.

Рассмотрим специальное погореловское отображение

$$\bar{y} = \frac{\kappa^2 \bar{x} - \bar{e}_0 (\bar{e}_0 \bar{x})}{\bar{e}_0 (\bar{x} + A \bar{x})} \tag{26}$$

где A - тождественное преобразование пространства S_3. Тогда (26) можно записать в виде:

$$\bar{y} = \frac{\kappa^2 \bar{x} - \bar{e}_0 (\bar{e}_0 \bar{x})}{2 (\bar{e}_0 \bar{x})} \tag{27}$$

Отображение (27) переводит отрезок EC в отрезок $\tilde{E}\tilde{C}$, лежащий на прямой $\tilde{p}$ - образе прямой p при отображении (27) в пространстве $E_0 \, (x^0 = 0)$.

Как следует из (27), точка $\tilde{E}$, соответствующая при этом отображении точке E, совпадает с началом координат O. Точке $\tilde{C}$, как и точке C отвечает значение параметра $t = t_0$. Обозначим длину отрезка $\tilde{E}\tilde{C}$ через $\tilde{\varphi}$. Имеет место

Теорема 1.

Если один из концов отрезка прямой в эллиптическом пространстве совпадает с концом вектора $\bar{e}_0$, то его длина φ и длина $\tilde{\varphi}$ его образа при специальном погореловском отображении (27) связаны соотношением

$$\tilde{\varphi} = \frac{\kappa}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{\kappa} \tag{28}$$

Доказательство. Длина ρ отрезка EC прямой p в пространстве S_3 может быть найдена по формуле [4]:

$$\rho = \int_0^{t_0} \sqrt{\bar{x}_t'^2}\, dt \quad . \tag{29}$$

Из (23) получаем

$$\bar{x}_t' = \varphi_t'(\bar{e}_0 + \bar{a}t) + \varphi\bar{a} \quad . \tag{30}$$

Дифференцируя (25) по t и подставляя в (30), находим:

$$(\bar{x}_t')^2 = \left(\frac{k}{1+t^2}\right)^2 \quad ,$$

Теперь из (29) получаем:

$$\rho = k \operatorname{arctg}(t_0) \quad . \tag{31}$$

Уравнение прямой $\tilde{p}$ как образа прямой p :

$$\tilde{y} = \frac{k^2\varphi(\bar{e}_0+\bar{a}t) - \bar{e}_0(\varphi(\bar{e}_0+\bar{a}t), \bar{e}_0)}{2\varphi(\bar{e}_0^2 + (\bar{e}_0\bar{a})t)} = \frac{t\bar{a}}{2} \quad . \tag{32}$$

Так как концам отрезка $\tilde{E}\tilde{C}$ прямой $\tilde{p}$ отвечают значения параметра $t = 0$, $t = t_0$ соответственно, то длина его $\tilde{\rho}$ равна:

$$\tilde{\rho} = \frac{kt_0}{2} \quad .$$

Из (31) и (32) следует (28).

п. 3. Пусть p - прямая в пространстве S_3 , проходящая через точку E и q - произвольная прямая эллиптического пространства, пересекающая p в точке D под прямым углом. Прямые p, q зададим соотвестственно уравнениями:

(33) $$\bar{x} = \varphi_1(\bar{e}_0 + \bar{a}t), \quad \bar{x}^2 = \kappa^2,$$

(34) $$\bar{X} = \varphi_2(\bar{x}(t_0) + \bar{b}v), \quad \bar{X}^2 = \kappa^2,$$

где $\bar{x}(t_0)$ - точка $\mathcal{D}$ встречи прямых p и q, т.е.

(35) $$\bar{x}(t_0) = \bar{X}(0),$$

$\bar{a}$ - направляющий вектор длины κ прямой p в точке $\mathcal{D}$;
$\bar{b}$ - направляющий вектор длины κ прямой q в той же точке $\mathcal{D}$, т.е.

(36) $$\bar{a}\bar{x}(t_0) = 0, \quad \bar{a}\bar{a} = \kappa^2,$$

(37) $$\bar{b}\bar{X}(0) = 0, \quad \bar{b}\bar{b} = \kappa^2.$$

Так как прямые p, q пересекаются в точке $\mathcal{D}$ под прямым углом, то

(38) $$\bar{a}\bar{b} = \bar{x}'_t(t_0)\bar{X}'_v(0) = 0.$$

Погореловское отображение (27) переводит прямые p, q соответственно в прямые $\tilde{p}, \tilde{q}$ евклидова пространства $E_0(x^0 = 0)$ [4]. Имеет место следующая

Лемма 1.

Образы $\tilde{p}, \tilde{q}$ при отображении (27) двух ортогональных прямых p, q пространства S_3 в том случае, когда одна из них проходит через точку E, тоже ортогональны.

Доказательство. Уравнение прямых $\tilde{p}, \tilde{q}$ как образов прямых p, q, согласно (27), имеют соответственно вид:

(39) $$\bar{y} = \frac{\kappa^2\bar{x} - \bar{e}_0(\bar{x}\bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0\bar{x})},$$

$$(40) \qquad \bar{Y} = \frac{\varkappa^2 \bar{X} - \bar{e}_0 (\bar{X} \bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0 \bar{X})} \,,$$

где вместо $\bar{x}$, $\bar{X}$ следует подставить правые части равенств (33),(34) соответственно. Покажем, что

$$\bar{y}'_t \, \bar{Y}'_v \Big|_{\substack{t=t_0 \\ v=0}} = 0 \,.$$

Дифференцируя (39) по t, (40) по v, получим:

$$\bar{y}'_t = \frac{\varkappa^2 \bar{x}'_t - \bar{e}_0 (\bar{x}'_t \,, \bar{e}_0)}{2\,(\bar{e}_0 \bar{x})} - \frac{\varkappa^2 \bar{x} - \bar{e}_0 (\bar{x} \bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0 \bar{x})^2} (\bar{e}_0 \bar{x}'_t) \,,$$

$$\bar{Y}'_v = \frac{\varkappa^2 \bar{X}'_v - \bar{e}_0 (\bar{X}'_v \, e_0)}{2\,(\bar{e}_0 \bar{X})} - \frac{\varkappa^2 \bar{X} - \bar{e}_0 (\bar{X} e_0)}{2\,(\bar{e}_0 \bar{X})^2} (\bar{e}_0 \bar{X}'_v) \,.$$

Перемножая почленно эти равенства и используя (35) - (38), находим:

$$(41) \quad \bar{y}'_t \bar{Y}'_v \Big|_{\substack{t=t_0 \\ v=0}} = \frac{\varkappa^4 (\bar{e}_0 \bar{x}'_t)(\bar{e}_0 \bar{X}'_v)(\bar{x} \bar{X})}{4\,(\bar{e}_0 \bar{x})^2 \,(\bar{e}_0 \bar{X})^2} \Bigg|_{\substack{t=t_0 \\ v=0}} \,.$$

Покажем, что

$$(\bar{e}_0 \bar{X}'_v)\big|_{v=0} = 0 \,.$$

Действительно, в силу (38), (34), (35), следует:

$$(42) \qquad (\bar{a}\, \bar{X}'_v)\big|_{v=0} = \bar{a}\, \bar{b} = 0 \,,$$

$$(43) \qquad \bar{x}\,(t_0)\, \bar{X}'_v(0) = \bar{X}(0) \bar{X}'_v(0) = 0 \,.$$

При $t = t_0$ из (33) получаем:

$$\bar{x}\,(t_0) = \varphi(\bar{e}_0 + \bar{a}\, t_0) \,,$$

или

$$\bar{e}_0 = \frac{\bar{x}(t_0)}{\varphi} - \bar{a}\,t_0 \quad . \tag{44}$$

Умножая (44) скалярно на вектор $\bar{X}'_v(0)$ и учитывая (42), (43), находим:

$$\bar{e}_0\,\bar{X}'_v(0) = 0 \ , \tag{45}$$

а теперь из (41) следует

$$(\bar{\psi}'_t\,\bar{Y}'_v)\Big|_{\substack{t=t_0\\ v=0}} = 0 \ ,$$

т.е. прямые $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ ортогональны.

<u>Лемма 2.</u>

Погореловское отображение (27) переводит всякую плоскость α, проходящую через точку E, и всякую прямую p, ортогональную плоскости α в пространстве S_3, в ортогональные плоскость $\tilde{\alpha}$ и прямую $\tilde{p}$ евклидова пространства E_0 $(x^0 = 0)$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим в пространстве S_3 произвольную прямую m, ортогональную той же плоскости α. Пусть прямые p, m заданы соответственно уравнениями

$$\bar{x}_1 = \varphi_1(\bar{a} + \bar{b}t)\ , \quad \bar{x}_1^2 = r^2 \ , \tag{46}$$

$$\bar{x}_2 = \varphi_2(\bar{c} + \bar{d}/v)\ , \quad \bar{x}_2^2 = r^2 \ , \tag{47}$$

где $\bar{a}$, $\bar{c}$ - радиусы-векторы точек A, C встречи прямых p, m с плоскостью α; $\bar{b}, \bar{d}$ - направляющие векторы прямых p, m в точках A, C соответственно.

Так как плоскость α проходит через точку E, то ее можно задать уравнением

$$\bar{X} = \rho(\bar{e}_0 + \bar{k}u + \bar{l}v), \quad \bar{X}^2 = \kappa^2 .$$

Можно найти вектор нормали $\bar{N} = [\bar{X}, \bar{X}_u, \bar{X}_v]$ [4], плоскости α. Он равен:

$$\bar{N} = \rho^3 [\bar{e}_0 \bar{k} \bar{l}] = \rho^3 \bar{n} , \tag{48}$$

где

$$\bar{n} = [\bar{e}_0 \bar{k} \bar{l}] = \overline{const} .$$

Прямые p, m являются нормалями плоскости α в точках A и C соответственно. Поэтому их направляющие векторы $\bar{b}, \bar{d}$ в точках A, C коллинеарны вектору нормали $\bar{N}$ плоскости α:

$$\bar{b} = \lambda \bar{n} , \quad \bar{d} = \mu \bar{n} . \tag{49}$$

Построим в плоскости α прямые p', m' проходящие через точку E и точки A, C соответственно. Очевидно прямая p ортогональна прямой p', а прямая m ортогональна прямой m'. Согласно лемме 1 отображение (27) переводит прямые p, p' в ортогональные прямые $\tilde{p}, \tilde{p}'$, а прямые m, m' в ортогональные прямые $\tilde{m}, \tilde{m}'$ евклидова пространства E_0 $(x^0 = 0)$.

Покажем, что прямые $\tilde{p}, \tilde{m}$ коллинеарны. Уравнения прямых $\tilde{p}, \tilde{m}$ как образов прямых p, m имеют соответственно вид:

$$\tilde{y}_1 = \frac{\kappa^2(\bar{a} + \bar{b}t) - \bar{e}_0(\bar{a} + \bar{b}t, \bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0, \bar{a} + \bar{b}t)} , \tag{50}$$

$$(51)\qquad \tilde{y}_2 = \frac{k^2(\bar{c}+\bar{d}v) - \bar{e}_0(\bar{c}+\bar{d}v, \bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0, \bar{c}+\bar{d}v)} \ .$$

Как было показано при доказательстве леммы 1 (см. (45)), имеют место равенства:

$$(\bar{e}_0 \bar{b}) = (\bar{e}_0 \bar{d}) = 0 \ .$$

Следовательно, уравнения (50), (51) принимают вид:

$$(52)\qquad \tilde{y}_1 = \frac{k^2\bar{a} - \bar{e}_0(\bar{a}\bar{e}_0)}{2(\bar{e}_0\bar{a})} + \frac{k^2\bar{b}}{2(\bar{e}_0\bar{a})}\, t \ ,$$

$$(53)\qquad \tilde{y}_2 = \frac{k^2\bar{c} - \bar{e}_0(\bar{c}\bar{e}_0)}{2(\bar{c}\bar{e}_0)} + \frac{k^2\bar{d}}{2(\bar{e}_0\bar{c})}\, v \ .$$

Дифференцируя (52) по t, а (53) по v, получим направляющие векторы $\tilde{y}'_{1_t}$, $\tilde{y}'_{2_v}$ прямых $\tilde{p}$, $\tilde{m}$, соответственно:

$$(54)\qquad \tilde{y}'_{1_t} = \frac{k^2}{2(\bar{e}_0\bar{a})}\,\bar{b} \ ,$$

$$(55)\qquad \tilde{y}'_{2_v} = \frac{k^2}{2(\bar{e}_0\bar{c})}\,\bar{d} \ .$$

Из равенств (49), (54), (55) следует коллинеарность прямых $\tilde{p}$, $\tilde{m}$. Но прямая $\tilde{m}$ ортогональна прямой $\tilde{m}'$, лежащей в плоскоти $\tilde{\alpha}$. Следовательно, прямая $\tilde{p}$, как прямая, ортогональная двум неколлинеарным прямым $\tilde{p}'$, $\tilde{m}'$, лежащим в плоскости $\tilde{\alpha}$, ортогональна плоскости $\tilde{\alpha}$.

п. 4. Пусть $\mathfrak{F}$ - регулярная поверхность эллиптического пространства, имеющая отрицательную внешнюю кривизну K_e, $K_e = K - \frac{1}{R^2} < 0$, и однозначно ортогонально проектирующаяся на плоскость α в виде некоторй области $\mathfrak{D}$. Пусть область $\mathfrak{D}$ содержит некоторый круг Γ радиуса ρ. Имеет место:

<u>Теорема 2</u>.

Существует постоянная $\tilde{C}$ такая, что для любой регулярной поверхности $\mathfrak{F}$ эллиптического пространства при условии

$$K_e \leq - a^2 < 0, \quad (a = const > 0),$$

справедлива оценка

$$\mathrm{tg}\,\frac{\rho}{R} < \frac{\tilde{C}}{aR} \quad . \tag{56}$$

<u>Доказательство</u>. Не органичивая общность будем считать, что плоскость α проходит через конец вектора $\bar{e}_0$ - точку E пространства S_3, и центр круга Γ совпадает с точкой E. Погореловское отображение (27) переводит поверхность $\mathfrak{F}$ в поверхность Φ евклидова пространства E_0 $(x^0 = 0)$.
Если обозначить $\tilde{K}$ гауссову кривизну поверхности Φ, то в силу (21), (22) можем записать:

$$\tilde{K} < K_e \leq - a^2 < 0 \quad . \tag{57}$$

Отображение (27) переводит плоскость α в плоскость $\tilde{\alpha}$ пространства E_0, проходящую через начало координат O.

Всякую прямую, проходящую через произвольную точку M поверхности $\mathfrak{F}$ ортогонально плоскости α, отображение (27) переводит в проходящую через соответствующую точке M точку

$\tilde{M}$ поверхности $\tilde{\Phi}$ прямую, которая в силу леммы 2 ортогональна плоскости $\tilde{\alpha}$.

Следовательно, поверхность Φ, как образ однозначно ортогонально проектирующейся поверхности $\mathcal{F}$, сама однозначно ортогонально проектируется на плоскость $\tilde{\alpha}$, причем, так как проекция $\mathcal{D}$ поверхности $\mathcal{F}$ содержит круг Γ радиуса ρ с центром в точке E, то проекция $\tilde{\mathcal{D}}$ поверхности $\tilde{\Phi}$ содержит круг $\tilde{\Gamma}$ с центром в начале координат O, радиуса $\tilde{\rho}$, связанного с радиусом ρ, в силу теоремы 1, п. 2, соотношением:

$$\tilde{\rho} = \frac{k}{2} \operatorname{tg} \frac{\rho}{k} \quad . \tag{58}$$

Применяя к поверхности Φ оценочную теорему Н.В. Ефимова, получим, что существует такая постоянная C, что

$$\tilde{\rho} < \frac{C}{a}$$

и тогда, в силу (58) и обозначая $2C$ через $\tilde{C}$ получим утверждения теоремы 2.

Литература

[1] Н.В. ЕФИМОВ: Исследование полной поверхности отрицательной кривизны, Докл.АН СССР 93(1953), 393-395.

[2] Н.В. ЕФИМОВ: Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны, Докл.АН СССР 93(1953),609-611.

[3] Л.А. СИДОРОВ: Некоторые свойства поверхностей отрицательной внешней кривизны в пространстве Лобачевского, Мат. заметки 4(1968),165-169.

[4] А.В. ПОГОРЕЛОВ: Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, "Наука",Москва,1969.

Гос.университет

Ростов-на-Дону
СССР

(Oblatum 16.8.1972)