Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
13,3 (1972)

ПРИЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ К ТЕОРИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.Г. МАЗЬЯ , Ленинград

Эта статья примыкает к работам автора [1] и [2]. В [1] были доказаны (сформулированные ранее в [3]) необходимые и достаточные условия справедливости неравенства

$$\|v\|_{L_q(\Omega)} \le C \, \|D_\ell v\|_{L_p(\Omega)} , \qquad (1.0)$$

где $q \ge p$, Ω - неограниченное открытое подмножество R^n а v - любая функция из $C_0^\infty(R^n)$. В § 1 этой статьи показано, что неравенство (1.0) необходимо и достаточно для разрешимости задачи Дирихле с однородным краевым условием для квазилинейных эллиптических уравнений, входящих в класс уравнений, рассмотренных в [4]. При этом предполагается, что правая часть уравнения суммируема со степенью $q' = \frac{q}{q-1}$. Этот факт, в сочетании с критерием, полученным в [1], дает явные условия разрешимости, формулируемые в терминах (p,ℓ)-емкости. Для линейных эллиптических уравнений соответствующий результат был получен в [4].

В § 2 доказана теорема единственности ограниченного решения задачи Дирихле, принимающего нулевые краевые значения вне некоторого компактного подмножества границы, имеющего

AMS, Primary: 35J65 Ref. Ž. 7.956

нулевую (p,l)-емкость. В § 3 аналогичный результат получен для задачи Неймана для квазилинейного уравнения второго порядка.

Содержание § 1 было приведено без доказательств в [3], результаты §§ 2, 3 публикуются впервые.

Введем несколько обозначений, используемых в дальнейшем. Пусть $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $D_j = \{\partial^j / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}\}$, $Du = D_1 u$, $\|u\|_p = \|u\|_{L_p(\Omega)}$, Q_d – куб $\{x : 2|x_i| < d,\ i=1,\dots,n\}$; интегрирование без указания пределов распространено на Ω.

Через $L_p^l(\Omega)$ обозначаем пространство функций в Ω, обобщенные производные которых порядка l принадлежат $L_p(\Omega)$. Пусть еще $W_p^l(\Omega) = L_p^l(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, а $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ и $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ – пополнения $C_0^\infty(\Omega)$ в метриках $\|D_l u\|_p + \|u\|_p$ и $\|D_l u\|_p$, соответственно.

Пусть e – компактное подмножество открытого множества $\omega \subset R^n$ и

$$\mathfrak{M}(e,\omega) = \{u \in C_0^\infty(\omega) : 0 \le u \le 1 \text{ в } \omega,\ u=1 \text{ в окрестности } e\}.$$

Число

$$(p,l)\text{-}cap(e,\omega) = \inf\{\int_\omega |D_l u|^p dx : u \in \mathfrak{M}(e,\omega)\}$$

называется (p,l)-емкостью компакта e относительно множества ω. Если $\omega = R^n$, указание на ω в обозначениях $(p,l)\text{-}cap(e,\omega)$, $\mathfrak{M}(e,\omega)$ и т.п. будем опускать. Пусть ω – ограниченное множество. Если $e \subset \omega$ и (p,l)-$cap(e,\omega) = 0$, то множество e называется (p,l)-полярным. Свойство (p,l)-полярности не зависит от объемлющего множества. При $pl < n$ множество e является (p,l)-полярным в том и только в том случае, когда $(p,l)-cap(e) = 0$.

§ 1. Разрешимость задачи Дирихле для квазилинейных уравнений в бесконечной области.

Рассмотрим уравнение

$$(1.1)\quad Au \equiv (-1)^l D^\alpha (a_\alpha(x, D_l u)) = f(x),\ x \in \Omega,$$

где f - суммируемая в Ω функция, α - мультииндекс порядка l, $D^\alpha = \partial^l / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}$.

Допустим, что функции a_α непрерывны при почти всех $x \in \Omega$ по совокупности всех остальных переменных и при любых значениях этих переменных измеримы по x. Кроме того, предположим, что для любого вектора $v = \{v_\alpha\}$ при некотором $p > 1$ справедливы неравенства

$$(2.1)\quad a_\alpha(x,v) v_\alpha \geq |v|^p,\quad \sum_\alpha |a_\alpha(x,v)| \leq \lambda |v|^{p-1}$$

Будем считать выполненным "условие монотонности": если $w \neq v$, то

$$(3.1)\qquad [a_\alpha(x,v) - a_\alpha(x,w)](v_\alpha - w_\alpha) > 0.$$

Покажем, что задача Дирихле для уравнения (1.1) разрешима при всех $f \in L_{q'}(\Omega)$ в том и только в том случае, если для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство (1.0).

Назовем функцию $u \in \overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega) \cap L(\Omega, loc)$ решением задачи Дирихле

$$(4.1)\qquad Au = f \text{ в } \Omega,\quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

если для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

(5.1) $\int a_\alpha(x, D_\ell u) D^\alpha \varphi\, dx = \int f \varphi\, dx$.

<u>Лемма 1.1</u>. Пусть для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$ при некотором $q \geq 1$

(6.1) $$\| v \|_q \leq C \| D_\ell v \|_p \quad .$$

Тогда для любой функции $f \in L_{q'}(\Omega)$ существует одно и только одно решение задачи (4.1).

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{\Omega_k\}$ – возрастающая последовательность ограниченных открытых множеств, $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$, $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$. Обозначим через $\{u_k\}$ последовательность решений задачи

(7.1) $A u_k = 0$ в Ω_k , $u_k = 0$ на $\partial\Omega_k$.

Такие решения существуют по теореме Ж. Лере и Ж.-Л. Лионса [5]. Поскольку $u_k \in \overset{\circ}{L}{}_p^\ell(\Omega_k)$, то

(8.1) $$\int a_\alpha(x, D_\ell u_k) D^\alpha u_k\, dx = \int f u_k\, dx \, .$$

(Функции u_k продолжены нулем вне Ω_k .) Значит,

(9.1) $$\| D_\ell u_k \|_p^{p-1} \leq C \| f \|_{q'} \, , \quad \| u_k \|_q^{p-1} \leq C^p \| f \|_{q'} \, .$$

Выделим из последовательности $\{u_k\}$ подпоследовательность v_k слабо сходящуюся в $\overset{\circ}{L}{}_p^\ell(\Omega)$ и $L_q(\Omega)$. Если u – слабый предел последовательности $\{v_k\}$, то

(10.1) $$\lim_{k\to\infty} \int a_\alpha(x, D_\ell u)(D^\alpha v_k - D^\alpha u)\, dx = 0 \, .$$

В силу (8.1)

$$(11.1) \qquad \int a_\alpha(x, D_\ell v_k) D^\alpha v_k\,dx \to \int f u\,dx .$$

Пусть $w_m \in C_0^\infty(\Omega)$, $w_m \to u$ в $L_p^\ell(\Omega)$. Так как $supp\, w_m \subset \Omega_k$ при фиксированном m и достаточно больших k то

$$\int a_\alpha(x, D_\ell v_k) D^\alpha u\,dx = \int a_\alpha(x, D_\ell v_k) D^\alpha (u - w_m)\,dx + \int f w_m\,dx .$$

Отсюда и из (8.1)

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \int a_\alpha(x, D_\ell v_k) D^\alpha u\,dx - \int f u\,dx \right| \le$$

$$\le c\lambda \overline{\lim_{k\to\infty}} \|D_\ell v_k\|_p^{p-1} \|D_\ell(u - w_m)\|_p + \left|\int f(u - w_m)\,dx\right| \le$$

$$\le \|f\|_{q'} (c\lambda C \|D_\ell(u - w_m)\|_p + \|u - w_m\|_q) .$$

Итак,

$$\int a_\alpha(x, D_\ell v_k) D^\alpha u\,dx \to \int f u\,dx ,$$

что вместе с (10.1) и (11.1) дает

$$J_k = \int (a_\alpha(x, D_\ell v_k) - a_\alpha(x, D_\ell u))(D^\alpha v_k - D^\alpha u)\,dx \to 0 .$$

Выделим из последовательности $\{v_k\}$ такую подпоследовательность $\{w_k\}$, что

$$(12.1) \qquad \lim_{k\to\infty} [a_\alpha(x, D_\ell w_k(x)) - \\ - a_\alpha(x, D_\ell u(x))](D^\alpha w_k(x) - D^\alpha u(x)) = 0$$

при почти всех $x \in \Omega$. Пусть x - точка, для которой равенство (12.1) выполнено, ξ^* - любая предельная точка последовательности $D_\ell w_k(x)$ и $\xi = D_\ell u(x)$. Покажем, что $|\xi^*| < \infty$. В самом деле,

$$(a_\alpha(x, D_\ell w_k) - a_\alpha(x, D_\ell u))(D^\alpha w_k - D^\alpha u) \ge$$

$$\geq a_\alpha(x, D_\ell w_k) D_\alpha w_k - c(|D_\ell w_k|^{p-1} + |D_\ell w_k| + 1) \ .$$

Поэтому, предполагая, что $\xi^* = \infty$, мы получим

$$a_\alpha(x, D_\ell w_k(x)) D_\alpha w_k(x) \longrightarrow \infty \ ,$$

что противоречит равенству (12.1). Так как функция $a_\alpha(x, y)$ непрерывна по y, то $[a_\alpha(x, \xi^*) - a_\alpha(x, \xi)](\xi^* - \xi) = 0$. Значит, $\xi^* = \xi$, то есть почти везде

$$D_\ell w_k(x) \longrightarrow D_\ell u(x) \ , \quad a_\alpha(x, D_\ell w_k(x)) \longrightarrow a_\alpha(x, D_\ell u(x)) \ .$$

Далее воспользуемся следующим простым фактом (см.[5]). Если $g_k, g \in L_p(\Omega)$, $\|g_k\|_p \leq c$ и если $g_k \longrightarrow g$ почти везде в Ω, то $g_k \longrightarrow g$ слабо в $L_p(\Omega)$. Отсюда следует, что $a_\alpha(x, D_\ell w_k) \longrightarrow a_\alpha(x, D_\ell u)$ слабо в $L_p(\Omega)$. Поэтому для любой функции $w \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int a_\alpha(x, D_\ell u) D^\alpha w \, dx = \lim_{k \to \infty} \int a_\alpha(x, D_\ell w_k) D^\alpha w \, dx \ .$$

Но $\operatorname{supp} w \subset \Omega_k$ при достаточно больших k и, значит,

$$\int a_\alpha(x, D_\ell w_k) D^\alpha w \, dx = \int f w \, dx \ .$$

Таким образом, u - решение уравнения $Au = f$.

Пусть u_1, u_2 - два решения задачи (4.1). Так как $(u_1 - u_2) \in \overset{\circ}{L}{}_p^\ell(\Omega)$, то при $i = 1, 2$

$$\int a_\alpha(x, D_\ell u_i) D^\alpha(u_1 - u_2) dx = \int f(u_1 - u_2) dx$$

и поэтому

$$\int [a_\alpha(x, D_\ell u_1) - a_\alpha(x, D_\ell u_2)](D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2) dx = 0 \ .$$

Отсюда и из (3.1) следует, что $u_1 = u_2$ почти всюду в Ω. Лемма доказана. Докажем обратное утверждение:

<u>Лемма 2.1</u>. Если для любой функции $f \in L_{q'}(\Omega)$ существует решение задачи (4.1), то для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$

выполняется неравенство (6.1) [x].

<u>Доказательство</u>. Пусть $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|v\|_{L_p^\ell(\Omega)} = 1$. Функционал

$$v(f) = \int f v \, dx ,$$

определенный на $L_{q'}(\Omega)$, можно представить в виде

$$v(f) = \int a_\alpha(x, D_\ell u) D^\alpha v \, dx ,$$

где $u \in \overset{\circ}{L}{}_p^\ell(\Omega) \cap L(\Omega, loc)$. Поэтому $|v(f)| \le \le c\lambda \|D_\ell u\|_p^{p-1}$ и функционалы $v(f)$ ограничены на каждой функции $f \in L_p(\Omega)$. Значит, нормы $v(f)$ ограничены в совокупности и выполнено неравенство (6.1).

Леммы 1.1 и 2.1 в сочетании с теоремой 1'.1 работы [1] дают следующий результат.

<u>Теорема 1.1</u>. Пусть $q \in [p, \frac{pn}{n-p\ell})$ при $n \ge p\ell$, $q \in [p, \infty]$ при $n < p\ell$. Задача (4.1) разрешима при всех $f \in L_{q'}(\Omega)$ в том и только в том случае, если множество Ω удовлетворяет одному из следующих условий.

1°. При некотором $d > 0$

$$\inf_{Q_d} (p, \ell) - cap(\overline{Q}_d \cap C\Omega) > 0 ,$$

если $n > p\ell$. Здесь и в следующем пункте *infimum* берется по всем кубам Q_d с ребром d.

2°. При некотором $d > 0$

$$\inf_{Q_d} (p, \ell) - cap(\overline{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) > 0 ,$$

если $n = p\ell$.

3°. Множество Ω не содержит произвольно больших ку-

---

x) Условие (3.1) ненужно для справедливости леммы 2.1.

бов, если $n < pl$ или если $n = pl$ и дополнение к Ω связно.

§ 2. <u>Единственность решения задачи Дирихле с исключительным множеством для уравнения любого порядка</u>.

Пусть Ω - ограниченное открытое множество в R^n с границей $\partial\Omega$ и пусть на $\partial\Omega$ выделено компактное подмножество e .

Будем говорить, что заданная на Ω функция u принадлежит пространству $L^\ell_p(\Omega, e, loc)$, если для любого открытого множества $\omega \subset \Omega$, $\bar{\omega} \cap e = \emptyset$, эта функция принадлежит пространству $L^\ell_p(\omega, loc)$, то есть $D_\ell u \in L_p$ на любом компактном подмножестве множества ω.

Через $\mathring{L}^\ell_p(\Omega, e, loc)$ обозначим множество функций u из $L^\ell_p(\Omega, e, loc)$, удовлетворяющих следующему условию. Для любого открытого множества $\omega \subset \Omega$, $\bar{\omega} \cap e = \emptyset$, функция u является пределом в $W^\ell_p(\omega)$ последовательности функций из $W^\ell_p(\omega)$, обращающихся в нуль вблизи $\partial\omega \cap \partial\Omega$.

<u>Лемма 1.2</u>. Пусть $\zeta \in \mathfrak{M}(e, R^n)$ и $u \in \mathring{L}^\ell_p(\Omega, e, loc) \cap L_\infty(\Omega)$. Тогда при $m = 1, \ldots, \ell - 1$

$$(1.2) \quad c\|(1-\zeta)^m D_m u\|_{\frac{p\ell}{m}} \leq \|u\|_\infty^{1-\frac{m}{\ell}} \|(1-\zeta)^\ell D_\ell u\|_p^{\frac{m}{\ell}} + \|u\|_\infty \|D_\ell \zeta\|_p^{\frac{m}{\ell}} .$$

Здесь и далее через c обозначены положительные постоянные, зависящие только от p, m, ℓ .

<u>Доказательство</u>. Пусть G и g - такие окрестности множества e, что $\zeta = 1$ на G и $\bar{g} \subset G$. Продолжим функцию u нулем на $R^n \setminus \Omega$ и рассмотрим ее на открытом множестве

$\omega = R^n \setminus \overline{g}$. Функции u и $\varkappa = 1 - \zeta$ обладают следующими свойствами: $u \in L_p^\ell(\omega) \cap L_\infty(\omega)$, $u = 0$ вне некоторого шара, $\varkappa = 0$ в окрестности $\partial\omega$ и $\varkappa = 1$ вне некоторого шара. Далее следует повторить применительно к ω , u , $\varkappa$ доказательство леммы 3.1 из работы [2]. В формулировке этой леммы $\varkappa$ - функция с компактным носителем, а функция u не обязана обращаться в нуль в окрестности бесконечности. Однако, это отличие не вносит существенных изменений в доказательство.

Будем говорить, что функция u является ограниченным решением задачи Дирихле для уравнения (1.1) с исключительным множеством $e \subset \partial\Omega$, если $u \in \mathring{L}_p^\ell(\Omega, e, loc) \cap L_\infty(\Omega)$ и для всех $\varphi \in \mathring{L}_p^\ell(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, равных нулю в окрестности e ,

$$(2.2) \quad \int a_\alpha(x, D_\ell u) D^\alpha \varphi \, dx = \int f \varphi \, dx , \quad f \in L(\Omega) .$$

<u>Лемма 2.2</u>. Пусть $\zeta \in \mathfrak{M}(e, R^n)$ и u - решение задачи Дирихле с исключительным множеством e , $u \in \mathring{L}_p^\ell(\Omega, e, loc) \cap L_\infty(\Omega)$. Тогда справедлива оценка

$$(3.2) \quad c \, \|(1 - \zeta)^\ell D_\ell u\|_p \le \|u\|_\infty \|D_\ell \zeta\|_p + \|u\|_\infty^{1/p} \|f\|_1^{1/p} ,$$

где c - положительная постоянная, не зависящая от u и ζ .

<u>Доказательство</u>. Пусть $\varkappa = 1 - \zeta$. Положим в (2.2) $\varphi = u \varkappa^{\ell p}$. Тогда

$$\int \varkappa^{\ell p} a_\alpha(x, D_\ell u) D^\alpha u \, dx =$$

$$= -\int a_\alpha(x, D_\ell u) \sum_{\alpha \geq \beta > 0} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\,\beta!} D^{\alpha-\beta} u \, D^\beta(\varkappa^{\ell p})\,dx \; +$$

$$+ \int f \varkappa^{\ell p} u \, dx$$

и в силу (2.1)

$$c \int \varkappa^{\ell p} |D_\ell u|^p dx \leq$$

$$\leq \int |D_\ell u|^{p-1} \sum_{k=1}^{\ell} |D_{\ell-k} u| \, |D_k(\varkappa^{\ell p})| \, dx + \|u\|_\infty \|f\|_1 \quad .$$

Применяя к правой части неравенство Гельдера, получаем

$$c \|\varkappa^\ell D_\ell u\|_p \leq \Big\| \sum_{k=1}^{\ell} \varkappa^{\ell-k} |D_{\ell-k} u| \sum_{i=1}^{k} \varkappa^{k-i} \prod_{\sum_{j=1}^{i} m_j = k} |D_{m_j} \varsigma| \Big\|_p + A \quad ,$$

где $A^p = \|u\|_\infty \|f\|_1$. Первое слагаемое справа не превосходит

$$c \sum_{k=1}^{\ell} \|\varkappa^{\ell-k} D_{\ell-k} u\|_{\frac{p\ell}{\ell-k}} \sum_{i=1}^{k} \prod_{\sum_{j=1}^{i} m_j = k} \|D_{m_j} \varsigma\|_{\frac{\ell p}{m_j}} \quad .$$

Применяя неравенство Е. Гальярдо [6] - Л. Ниренберга [7]

$$\|D_m \varsigma\|_{\frac{\ell p}{m}} \leq c \|\varsigma\|_\infty^{1-\frac{m}{\ell}} \|D_\ell \varsigma\|^{\frac{m}{\ell}}$$

при $m = m_j$, получаем

$$c \|\varkappa^\ell D_\ell u\|_p \leq \sum_{k=1}^{\ell} \|D_\ell \varsigma\|^{\frac{k}{\ell}} \|\varkappa^{\ell-k} D_{\ell-k} u\|_{\frac{p\ell}{\ell-k}} + A \quad .$$

Воспользуемся оценкой (1.2) при $m = \ell - k$. Тогда

$$c \|\varkappa^\ell D_{\ell-k} u\|_p \leq \sum_{k=1}^{\ell} \|D_\ell \varsigma\|_p^{\frac{k}{\ell}} \|u\|_\infty^{\frac{k}{\ell}} \|\varkappa^\ell D_\ell u\|_p^{1-\frac{k}{\ell}} +$$

$$+ \|u\|_\infty \|D_\ell \varsigma\|_p + A \leq \varepsilon \|\varkappa^\ell D_\ell u\|_p + c_\varepsilon \|u\|_\infty \|D_\ell \varsigma\|_p + A$$

при всех $\varepsilon > 0$. Оценка (3.2) доказана.

<u>Лемма 3.2</u>. Если e - компактное (p, ℓ) -полярное подмножество $\partial\Omega$ и Π - многочлен степени не выше $\ell - 1$ из множества $\mathring{L}_p^\ell(\Omega, e, loc) \cap L_\infty(\Omega)$,

то $\Pi \equiv 0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\overline{\Omega} \subset Q_d$. Так как (p, ℓ) - $cap(e, Q_{2d}) = 0$, то $(p,1)-cap(e, Q_{2d}) = 0$. Пусть $\delta > 0$ и g - отркытое множество такое, что $e \subset g \subset Q_{2d}$ и $(p,1)-cap(g, Q_{2d}) < \varepsilon$. Покроем $(\partial\Omega)\setminus g$ конечным числом открытых кубов q_i , $q_i \cap e = \emptyset$. В силу монотонности и полуаддитивности $(p,1)-cap$ при достаточно малом $\delta > 0$

$$\sum_i (p,1)-cap(q_i \cap \partial\Omega, Q_{2d}) \geq (p,1)-cap((\partial\Omega)\setminus g, Q_{2d}) \geq$$

$$\geq (p,1)-cap(\partial\Omega, Q_{2d}) - (p,1)-cap(g, Q_{2d}) \geq$$

$$\geq (p,1)-cap(\partial\Omega, Q_{2d}) - \varepsilon .$$

Поэтому существует открытый куб Q_δ такой, что $\overline{Q}_\delta \cap e = \emptyset$, $(p,1)-cap(\overline{Q}_\delta \cap \partial\Omega, Q_{2d}) > 0$. Пусть $\{u_m\}$ - последовательность функций из $C^\infty(\overline{Q_\delta})$, равных нулю в окрестности $\overline{Q_\delta} \setminus \Omega$, сходящаяся к Π в $W_p^\ell(Q_\delta \cap \Omega)$. Очевидно,

$$\| D_\ell u_m \|_{L_p(Q_\delta)} = \| D_\ell u_m \|_{L_p(Q_\delta \cap \Omega)} \longrightarrow 0$$

при $m \to \infty$. В силу леммы 1.2 из [1] и первой части леммы 6.1 работы [8] $u_m \longrightarrow 1$ в $L_p(Q_\delta \cap \Omega)$. Значит, $\Pi = 0$ на $Q_\delta \cap \Omega$ а потому и всюду.

<u>Теорема 1.2</u>. Задача Дирихле для уравнения (1.1), с исключительным (p,ℓ)-полярным множеством имеет не более одного ограниченного решения.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\overline{\Omega} \subset Q_d$; u и v - два ограниченных решения для задачи Дирихле и $x = 1 - \varsigma$, где

$\xi \in \mathfrak{M}(e, Q_{2d})$. Тогда

$$\int [a_\alpha(x, D_\ell u) - a_\alpha(x, D_\ell v)]\, D^\alpha (z^{\ell p}(u-v))\,dx = 0$$

и, значит,

$$J \overset{def}{=} \int z^{\ell p} [a_\alpha(x, D_\ell u) - a_\alpha(x, D_\ell v)]\, D^\alpha (u-v)\,dx =$$

$$= -\int [a_\alpha(x, D_\ell u) - a_\alpha(x, D_\ell v)] \sum_{\alpha \geq \beta > 0} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\,\beta!} D^{\alpha-\beta}(u-v) D^\beta (z^{\ell p})\,dx .$$

Отсюда следует, что

$$J \leq c \sum_\alpha (\| z^{\ell(p-1)} a_\alpha(x, D_\ell u)\|_{p'} +$$

$$+ \| z^{\ell(p-1)} a_\alpha(x, D_\ell v)\|_{p'}) \sum_{k=1}^{\ell} \| D_\ell \xi \|_p^{\frac{k}{\ell}} \| z^{\ell-k} D_{\ell-k}(u-v)\|_{\frac{p\ell}{\ell-k}} .$$

(ср. с доказательством леммы 2.2). Используя лемму 1.2, получаем

$$J \leq c(\| z^\ell D_\ell u\|_p^{p-1} + \| z^\ell D_\ell v\|_p^{p-1}) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\ell} \| D_\ell \xi \|_p^{\frac{k}{\ell}} [\, \| u - v\|_\infty^{\frac{k}{\ell}} \| z^\ell D_\ell (u-v)\|_p^{1-\frac{k}{\ell}} +$$

$$+ \| u - v\|_\infty \| D_\ell \xi \|_p^{1-\frac{k}{\ell}}] .$$

В силу условия $u, v \in L_\infty(\Omega)$ и леммы 2.2 правая часть последнего неравенства не превосходит $\mathcal{M}(\| D_\ell \xi\|_p) \| D_\ell \xi \|_p^{1/\ell}$, где $\mathcal{M}$ – непрерывная функция на $[0, +\infty)$. Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность функций из $\mathfrak{M}(e, Q_{2d})$ такая, что $\| D_\ell \xi_k \|_{L_p(Q_{2d})} \to 0$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \int (1-\xi_k)^{\ell p} [a_\alpha(x, D_\ell u) - a_\alpha(x, D_\ell v)]\, D^\alpha (u-v)\,dx = 0 .$$

оскольку $\varsigma_k \longrightarrow 0$ по мере, то

$$\int [a_\alpha(x, D_\ell u) - a_\alpha(x, D_\ell v)] D^\alpha(u - v)\, dx = 0$$

и, следовательно, $D_\ell(u - v) = 0$. Мы получим, что $u - v$ есть многочлен степени не выше $\ell - 1$. Значит, по лемме 3.2 $u = v$. Теорема доказана.

§ 3. Единственность решения задачи Неймана для квазилинейного уравнения второго порядка.

Пусть Ω - ограниченное открытое подмножество R^n. Рассмотрим уравнение (1.1) второго порядка:

$$(1.3) \qquad -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x, Du)) = f, \quad f \in L(\Omega),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2.1), (3.1). Пусть e - замкнутое подмножество $\partial\Omega$.

Будем говорить, что функция $u \in L^1_p(\Omega, e, loc)$ является ограниченным решением задачи Неймана для уравнения (1.3) с исключительным множеством e, если $u \in L_\infty(\Omega)$ и для всех $\varphi \in L^1_p(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, равных нулю в окрестности e,

$$(2.3) \qquad \int a_i(x, Du)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int f\varphi\, dx.$$

Лемма 1.3. Пусть $\varkappa \in C^\infty(R^n)$, $\varkappa \geq 0$, $\varkappa = 0$ в окрестности $e \subset \partial\Omega$, а u - ограниченное решение задачи Неймана для уравнения (1.3) с исключительным множеством e. Тогда

$$(3.3) \quad \int \varkappa^p |Du|^p dx \leq c \operatorname{osc} u \, \|\varkappa\|^p_\infty \|f\|_1 + c(\operatorname{osc} u)^p \|D\varkappa\|^p_p ,$$

где $\|\cdot\|_q$ - норма в $L_q(\Omega)$ и $\operatorname{osc} u =$
$= \operatorname{ess.sup} u - \operatorname{ess.inf} u$.

Доказательство. Положим в (2.3)

$$\varphi = z^p(u - C), \quad C = const .$$

Тогда

$$\int z^p a_i(x, Du)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \le$$
$$\|u - c\|_\infty \|z\|_\infty^p \|f\|_1 +$$
$$+ p\|u - C\|_\infty \int z^{p-1}|a_i(x,Du)\frac{\partial z}{\partial x_i}|dx .$$

Используя (2.1), отсюда получаем (3.3).

Следствие 1.3. Пусть e - замкнутое $(p,1)$ -полярное подмножество $\partial\Omega$ и u - ограниченное решение задачи Неймана для уравнения (1.3) с исключительным множеством e. Тогда $u \in L_p^1(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\overline{\Omega} \subset Q_d$ и ζ_k -последовательность функций из $\mathfrak{M}(e, Q_{2d})$ такая, что $\|D_\ell \zeta_k\|_{L_p(Q_{2d})} \longrightarrow 0$. Тогда из (3.3) получаем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int (1-\zeta_k)^p |Du|^p dx \le c \operatorname{osc} u \|f\|_1 .$$

Так как $\zeta_k \longrightarrow 0$ по мере, то

$$\int |Du|^p dx \le c \operatorname{osc} u \|f\|_1 . \tag{4.3}$$

Следствие доказано.

Теорема 1.3. Разность любых двух ограниченных решений задачи Неймана для уравнений (1.3) с исключительным $(p,1)$-полярным множеством равна константе.

Доказательство. Пусть u, v - два решения и $\varkappa \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varkappa \ge 0$, $\varkappa = 0$ в окрестности e. Тогда

$$\int [a_i(x,Du) - a_i(x,Dv)] \frac{\partial}{\partial x_i} [(u-v)\varkappa^p] dx = 0$$

Отсюда

$$(5.3) \qquad \int \varkappa^p [a_i(x,Du) - a_i(x,Dv)] \frac{\partial}{\partial x_i}(u-v) dx \le$$

$$\le p \| u - v \|_\infty \| [a_i(x,Du) - a_i(x,Dv)] \varkappa^{p-1} \|_{p'} \| D\varkappa \|_p \le$$

$$\le p \| u - v \|_\infty (\| \varkappa Du \|_p^{p-1} + \| \varkappa Dv \|_p^{p-1}) \| D\varkappa \|_p \ .$$

Пусть $\overline{\Omega} \subset Q_d$ и $\{\varkappa_k\}$ - последовательность функций из $\mathfrak{M}(e, Q_{2d})$ такая, что $\| D\varkappa_k \|_{L_p(Q_{2d})} \to 0$. Переходя к пределу в (5.3) и используя при этом оценку (4.3), получим

$$\int [a_i(x,Du) - a_i(x,Dv)] \frac{\partial}{\partial x_i}(u-v) dx = 0 \ .$$

Итак, $u - v = const$.

В следующей теореме также рассматривается уравнение (1.3), и для него при дополнительном ограничении на $\partial\Omega$ доказывается необходимость условия $(p, 1)$-полярности множества e

Пусть e - компактное подмножество $\partial\Omega$. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, e)$ пополнение в метрике $W_p^1(\Omega)$ множества функций из $W_p^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности e.

Теорема 2.3. Пусть область Ω есть образ куба при билипшицевом отображении. Если задача Неймана для уравнения (1.3) с исключительным множеством e имеет только тривиальное ограниченное решение $u \equiv const$, то e - $(p, 1)$ - полярное множество.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\overline{\Omega} \subset Q_d$. Предположим, что $(p,1)-cap(e, Q_d) > 0$. Обозначим через e_1, e_2 такие компакты, что
$e_1 \cap e_2 = \emptyset, e_i \subset e, (p,1)-cap(e_i, Q_d) > 0 \quad (i = 1,2)$.
(Существование таких множеств легко выводится с помощью свойства полуаддитивности $(p, 1)$-емкости.) Пусть ω - такая окрестность e_1, что $\overline{\omega} \subset Q_d$ и $e_2 \cap \overline{\omega} = \emptyset$, а h - функция из $\mathfrak{M}(e, \omega)$. В силу общей теоремы Ж. Лере и Ж.- Л. Лионса [5] существует функция $u \in W_p^1(\Omega)$ такая, что $(u-h) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, e_1 \cup e_2)$, и удовлетворяющая равенству

$$\int a_i(x, Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = 0 \tag{6.3}$$

при всех $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, e_1 \cup e_2)$. Используя абсолютную непрерывность функций из $W_p^1(\Omega)$ на почти всех прямых. параллельных координатным осям, нетрудно показать, что функции $(u-1)_+$ и u_- принадлежат пространству $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, e_1 \cup e_2)$. Подставляя их в (6.3) вместо φ и используя (2.4), получим, что $0 \le u \le 1$ почти везде в Ω. Отсюда и из (6.3) следует, что u есть ограниченное решение задачи Неймана с исключительным множеством $e_1 \cup e_2 \subset e$.

Остается показать, что $u_1 \not\equiv const$. Так как $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, e_2)$ и $(p,1)-cap(e_2, Q_d) > 0$, то из леммы 6.1 работы [8] получаем

$$\|u\|_p \le C \|Du\|_p$$

Следовательно, существует такая постоянная C_1, не зависящая от u, что

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le C_1 \|Du\|_p .$$

Поскольку Ω - липшицев образ куба, существует такое продолжение v функции u на Q_d, что $v - h \in \mathring{W}_p^1(Q_d, e_1)$ и

$$\|Dv\|_{L_p(Q_d)} \le C_2 \|u\|_{W_p^1(\Omega)} .$$

Следовательно,

$$0 < (p,1)-cap(e_1, Q_d) \le \|Dv\|^p_{L_p(Q_d)} \le (C_1 C_2)^p \|Du\|_p^p$$

и $u = const$. Теорема доказана.

Литература

[1] МАЗЬЯ В.Г.: Об одном операторе вложения и функциях множества типа (p, ℓ)-емкости,

[2] МАЗЬЯ В.Г.: Об устранимых особенностях ограниченных решений квазилинейных эллиптических уравнений любого порядка, Записки научн.семин.ЛОМИ 1972,27,116-130.

[3] МАЗЬЯ В.Г.: Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения, Сб. "Теоремы вложения и их приложения" (Труды симпозиума по теоремам вложения, Баку,1966 г М.,1969,142-159.

[4] МАЗЬЯ В.Г.: О задаче Дирихле для эллиптических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях, Докл.АН СССР,1963,150,№ 6,1221-1224.

[5] J. LERAY, LIONS J.-L.: Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull.Soc.Math.France, 1965,93,97-107.

[6] GAGLIARDO E.: Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in piu variabili, Ric. di Mat.,1959,8, No 1,24-51.

[7] NIRENBERG L.: On elliptic partial differential equations (Lecture II) Ann.Scuola Norm.Sup.di Pisa, 1959, s.III,13,115-162.

[8] МАЗЬЯ В.Г.: О (p,l)-емкости,теоремах вложения и спектре само-сопряженного эллиптического оператора, Известия АН СССР

Ленинградский госуд. университет

мам.-мех. факультет

Ленинград В.О.10[я] линия 33

СССР

(Oblatum 20.6.1972)