Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

13,2 (1972)

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДВОЙСТВЕННО НОРМАЛИЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В.В. ГОЛЬДБЕРГ, А.В. ЧАКМАЗЯН, Ереван

1. Рассмотрим двумерную поверхность V_2 четырехмерного проективного пространства P_4. К каждой точке V_2 присоединим проективный репер, образованный 5 аналитическими точками A_u (u = 0, 1, 2, 3, 4). Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями:

(1) $$d A_u = \omega_u^v A_v \ ,$$

где ω_u^v - формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства P_4 :

(2) $$d\omega_u^v = \omega_u^w \wedge \omega_w^v \quad (u, v, w = 0, 1, 2, 3, 4) .$$

Пусть точка A_0 описывает V_2 ; A_1 и A_2 - ее преобразования Лапласа вдоль линий единственной сопряженной сети V_2 , $A_0 A_3 A_4$ - осевая плоскость V_2 в точке A_0 (пересечение соприкасающихся гиперплоскостей кривых сопряженной сети в точке A_0 [1]), $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$ - преобразования Лапласа прямых $A_0 A_1$ и $A_0 A_2$ соответственно

AMS, Primary: 53A20 Ref. Ž. 3.931.53

в направлениях $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$. При таком выборе вершин репера мы должны иметь:

$$
(3)\begin{cases}
(dA_0, A_0, A_1, A_2) = 0, \quad (dA_1, A_0, A_1, A_4) = 0, \\
(dA_2, A_0, A_2, A_3) = 0, \quad (dA_1, A_1, A_4) \equiv 0 \, (mod\, \omega^2), \\
(dA_2, A_2, A_3) \equiv 0 \, (mod\, \omega^1), \; (dA_4, A_0, A_1, A_3, A_4) \equiv 0 \, (mod\, \omega^2), \\
(dA_3, A_0, A_2, A_3, A_4) \equiv 0 \, (mod\, \omega^1).
\end{cases}
$$

Из (3), пользуясь (1) и (2), получаем

$$
(4) \quad \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = \omega_2^4 = \omega_4^2 = 0,
$$

$$
(5)\begin{cases}
\omega_1^4 = a_1^4 \omega^1, \quad \omega_2^0 = a_2^0 \omega^1, \quad \omega_4^3 = a_4^3 \omega^1, \\
\omega_2^3 = b_2^3 \omega^2, \quad \omega_1^0 = b_1^0 \omega^2, \quad \omega_3^4 = b_3^4 \omega^2
\end{cases}
$$

Внешнее дифференцировабие (4) и применение леммы Картана приводит еще к четырем пфаффовым уравнениям:

$$
(6)\begin{cases}
\omega_3^2 = a_3^2 \omega^1 + b_3^2 \omega^2, \quad \omega_4^1 = a_4^1 \omega^1 + b_4^1 \omega^2, \\
\omega_4^0 = -a_4^3 b_3^2 \omega^1 + b_4^0 \omega^2, \quad \omega_3^0 = a_3^0 \omega^1 - b_3^4 a_4^1 \omega^2 .
\end{cases}
$$

Внешнее дифференцирование (5) и (6) с учетом (2),(4),(5),(6) дает:

$$
(7)\begin{cases}
\Delta a_1^4 \wedge \omega^1 = 0, \quad \Delta a_2^0 \wedge \omega^1 = 0, \quad \Delta a_4^3 \wedge \omega^1 = 0, \\
\Delta b_2^3 \wedge \omega^2 = 0, \quad \Delta b_1^0 \wedge \omega^2 = 0, \quad \Delta b_3^4 \wedge \omega^2 = 0, \\
\Delta a_3^2 \wedge \omega^1 + \Delta b_3^2 \wedge \omega^2 = 0, \quad \Delta a_4^1 \wedge \omega^1 + \Delta b_4^1 \wedge \omega^2 = 0, \\
-a_4^3 \Delta b_3^2 \wedge \omega^1 + \Delta b_4^0 \wedge \omega^2 = 0, \quad \Delta a_3^0 \wedge \omega^1 - b_3^4 \Delta a_4^1 \wedge \omega^2 = 0,
\end{cases}
$$

где

$$\Delta a_1^4 = da_1^4 + a_1^4(\omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_4^4),\quad \Delta a_4^3 = da_4^3 + a_4^3(\omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_3^3 - \omega_4^4),$$

$$\Delta a_2^0 = da_2^0 + a_2^0(2\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2),\quad \Delta a_3^2 = da_3^2 + a_3^2(\omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3),$$

$$\Delta a_4^1 = da_4^1 + a_4^1(\omega_0^0 - \omega_4^4) - b_4^0\omega^2 ,$$

$$\Delta a_3^0 = da_3^0 + a_3^0(2\omega_0^0 - \omega_2^2 - \omega_4^4) + a_4^1(a_4^3 b_3^4 - b_1^0)\omega^2 ,$$

а формы Δb_2^3, Δb_4^0, Δb_3^2, Δb_3^4, Δb_4^1, Δb_4^0 получаются из выписанных заменой

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & b \end{pmatrix} .$$

2. Говорят, что в P_4 <u>задана двумерная гиперполоса</u>, если к каждой точке двумерной поверхности V_2 присоединена касательная гиперплоскость, называемая главной гиперплоскостью полосы [2] .

Пусть поверхность V_2 нормализована так, как указано в п. 1. Для того, чтобы дополнить ее до гиперполосы, зададим инвариантную касательную гиперплоскость Π точками A_0 , A_1 , A_2 , $A_3 + x A_4$. Условие ее инвариантности имеет вид $\delta\Pi = \theta\Pi$, или

$$(9)\qquad \delta x + x(\pi_4^4 - \pi_3^3) = 0 ,$$

где θ - линейная форма, через δ , как обычно, обозначен символ дифференцирования, а через π_u^v - значения форм ω_u^v при закрепленных главных параметрах (т.е. при $\omega^1 = \omega^2 = 0$). Если же главные параметры не фиксированы, то вместо (9) имеем:

$$dx + x(\omega_4^4 - \omega_3^3) = x_i\,\omega^i \qquad (i = 1, 2)\,. \tag{10}$$

Будем предполагать, что $x \neq 0$. Случай $x = 0$ будет исследован отдельно.

Гиперполоса называется <u>двойственно нормализованной</u>, если в каждой точке ее опорной поверхности V_2 нормаль первого рода проходит через характеристику определяющих данную гиперполосу главных гиперплоскостей [2] .

Найдем условие, при котором наша гиперполоса будет двойственно нормализованной. Для нахождения характеристики главных гиперплоскостей заметим, что

$$\begin{cases} d\Pi \equiv \omega^2 [A_0, A_1, A_4, -x b_2^3 A_3 - (x_2 + b_3^4) A_2] + \varphi_2 \Pi \ (\mathrm{mod}\ \omega^1), \\ d\Pi \equiv \omega^1 [A_0, A_2, A_4, -a_1^4 A_3 + (x_1 - x^2 a_4^3) A_1] + \varphi_1 \Pi \ (\mathrm{mod}\ \omega^2). \end{cases} \tag{11}$$

Поскольку характеристика есть пересечение с Π бесконечно близких главных гиперплоскостей, достаточно найти пересечение с Π бесконечно близких главных гиперплоскостей в направлениях $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$. Из (11) вытекает, что характеристика определяется точкой A_0 и точкой

$$M = \frac{x^2 a_4^3 - x_1}{a_1^4} A_1 + \frac{x_2 + b_3^4}{x\, b_2^3} A_2 + A_3 + x A_4 \quad .$$

Для того, чтобы характеристика лежала в нормали первого рода V_2 - осевой плоскости $A_0\ A_3\ A_4$, необходимо и достаточно выполнение равенств:

(12) $$x_1 = x^2 a_4^3, \qquad x_2 = -b_3^4 .$$

С учетом (12) уравнение (10) принимает вид

(13) $$dx + x(\omega_4^4 - \omega_3^3) = x^2 a_4^3 \omega^1 - b_3^4 \omega^2 .$$

Внешнее дифференцирование (13), если использовать (7) и (13), в силу независимости форм ω^1 и ω^2 и неравенства $x \neq 0$, дает:

(14) $$a_1^4 b_4^1 + a_3^2 b_2^3 = 0 .$$

Укажем теперь, почему мы считали $x \neq 0$.
Если $x = 0$, то в каждой точке V_2 главной гиперплоскостью служит плоскость $A_0 A_1 A_2 A_3$, т.е. касательная гиперплоскость, проходящая через ось $A_0 A_3$ сопряженной сети V_2 (пересечение соприкасающей гиперплоскости линии $\omega^1 = 0$ и соприкасающейся плоскости линии $\omega^2 = 0$ [1]).Если искать характеристику такого семейства главных гиперплоскостей, то легко получим, что это будет прямая $[A_0, b_2^3 A_3 - b_3^4 A_2]$. Эта характеристика лежит в осевой плоскости тогда и только тогда, если $b_3^4 = 0$, но тогда, как легко видеть из сравнений

$$dA_0 \equiv \omega_0^0 A_0 + \omega^2 A_2 (mod\,\omega^1), \; dA_2 \equiv \omega_2^2 A_2 + b_2^3 \omega^2 A_3 (mod\,\omega^1),$$
$$dA_3 \equiv \omega_3^3 A_3 + \omega^2 [b_3^2 A_2 + b_3^4 (A_4 - a_4^1 A_0)] (mod\,\omega^1),$$

кривая $\omega^1 = 0$ - плоская (она лежит в плоскости $A_0 A_2 A_3$), и потому в этом случае нельзя построить осевую плоскость.

Поэтому гиперполоса, для которой главные гиперплоскости проходят через одну из осей сети V_2, не может быть двойственно нормализована, если в качестве нормалей первого рода V_2 выбраны осевые плоскости V_2.

Дифференцирование (14) дает:

$$a_1^4 \Delta b_4^1 + b_4^1 \Delta a_1^4 = a_3^2 \Delta b_2^3 + b_2^3 \Delta a_3^2 . \tag{15}$$

Для системы (4),(5),(6),(7),(14),(15) имеем:

$$q = 11 , \; S_1 = 10 , \; S_2 = 1 , \; N = Q = 12 .$$

Таким образом, двойственно нормализованная гиперполоса, у которой в качестве нормали первого рода опорной поверхности V_2 выбрана осевая плоскость, определяется с произволом одной функции двух аргументов.

3. Укажем один класс поверхностей V_2, для которых условие (14) удовлетворено тождественно. Для этого определим уравнение фокусной кривой осевой плоскости. Пусть тогда $F = x^0 A_0 + x^3 A_3 + x^4 A_4$ - фокус осевой плоскости. Тогда при некотором смещении $\omega^1 - t\,\omega^2$ мы имеем:

$$(d(x^0 A_0 + x^3 A_3 + x^4 A_4), A_0, A_3, A_4) \equiv 0 \; (mod\, \omega^1 - t\omega^2) . \tag{16}$$

Из (16) получим:

$$\begin{cases} x^0 + x^4 (a_4^1 t + b_4^1) = 0 , \\ x^0 + x^3 (a_3^2 t + b_3^2) = 0 . \end{cases}$$

Исключая из этой системы t , получаем:

(17) $x^3x^4(a_4^1 b_3^2 - a_3^2 b_4^1) + b_3^2 x^3 x^0 + a_4^1 x^4 x^0 + a_4^1 x^4 x^0 + (x^0)^2 = 0$.

Таким образом, фокусная кривая есть кривая второго порядка. Условием ее распадения является обращение в нуль дискриминанта кривой, который равен

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a_4^1 b_3^2 - a_3^2 b_4^1) & \frac{1}{2} b_3^2 \\ \frac{1}{2}(a_4^1 b_3^2 - a_3^2 b_4^1) & 0 & \frac{1}{2} a_4^1 \\ \frac{1}{2} b_3^2 & \frac{1}{2} a_4^1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(a_4^1 b_3^2 - a_3^2 b_4^1) a_3^2 b_4^1 \ .$$

Все случаи распадения этой кривой исследованы в [1], правда, при несколько другой канонизации репера. Один из этих случаев, который характеризуется равенствами

(18) $$a_3^2 = b_4^1 = 0 \ ,$$

приводит к тождественному выполнению условий (14). Напомним, что геометрически этот случай характеризуется тем, что

1) обе линии сопряженной сети V_2 трехмерны,

2) кривая (17) распадается в пару прямых $x^0 + a_4^1 x^4 = 0$ и $x^0 + b_3^2 x^3 = 0$, которые получаются как пересечение осевой плоскости с бесконечно близкими при смещениях соответственно в направлениях $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$ (при всех остальных смещениях в качестве фокуса получается точка пересечения этих прямых).

Произвол существования поверхностей (18), как нетрудно видеть, равен 10 функциям одного аргумента.

Таким образом, поверхность V_2 , определяемая (18), характеризуется еще и тем, что любая гиперполоса (кроме тех, главные гиперплоскости которых проходят через одну из осей V_2), для которой такая V_2 служит опорной поверхностью, будет двойственно нормализованной, если в качестве нормалей первого рода V_2 выбраны ее осевые плоскости.

Заметим, что такое же утверждение, конечно, справедливо и для поверхностей, определяемых (14).

Авторы выражают искреннюю благодарность Ю. Агабекяну за замечания по работе.

Литература

[1] ГОЛЬДБЕРГ В.В.: Семейство осевых плоскостей двумерной поверхности четырехмерного проективного пространства и некоторые задачи, связанные с этим семейством, Сибирский матем.журн.т.1,№ 4(1960),559-577.

[2] ЧАКМАЗЯН А.В.: Двойственная нормализация, ДАН Арм.ССР, т.28,№ 4(1959),151-157.

Московский институт стали и сплавов
Ереванский государственный университет
Ереван, СССР

(Oblatum 9.2. 1972)