Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
13,2 (1972)

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРЕДСТАВИМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

В классической математике каждое из следующих трех условий является необходимым и достаточным для того, чтобы функция f, непрерывная на сегменте $0 \Delta 1$, была на этом сегменте представима в виде суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций: а) (S), б) (T_1) & (N) и в) f отображает множество тех точек из $0 \Delta 1$, в которых f не имеет конечную производную, в множество нулевой меры ([1], стр. 288-9,[2]). В конструктивной математике аналоги этих условий являются необходимыми, но не являются достаточными условиями названной представимости.

Действительно, функция $\varphi = \left(\frac{1}{4} \cdot f\right) * g + h_{\frac{1}{2}}$, где f и g функции и Φ покрытие из примера из [10], а

$$\forall a x\, (h_a(x) = a \cdot max\, (min\, (x, 1), 0)),$$

является возрастающей на $0 \Delta 1$, полигональна на всяком сегменте покрытия Φ, $\forall x y\, (|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|)$ и, следовательно, φ удовлетворяет условиям а - в). Вместе с тем $f * g$ и φ не являются абсолютно непрерывными и согласно теореме 2 из [10] φ нельзя представить в виде

AMS, Primary: 02E99
Secondary: 26A72

Ref. Ž. 2.644.2

суперпозиции двух (и тогда и большего числа) абсолютно непрерывных функций.

В следующем мы, не теряя общности, ограничимся рассмотрением функций f, для которых выполнено $0 \leq f \leq 1$. Такие функции будем называть функциями типа A.

В дальнейшем пользуемся обозначениями и определениями из [5 - 11].

<u>Обозначение</u>. Пусть g функция, $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ и $\{\mathfrak{N}_n\}_n \in M$. Тогда мы посредством $\sigma(g, \{\mathfrak{M}_n\}_n, \{\mathfrak{N}_n\}_n)$ обозначим: $\forall x (x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \supset g(x) \in \{\mathfrak{N}_n\}_n)$ и для почти всех КДЧ y верно

$$(y \in \{\mathfrak{N}_n\}_n \supset \exists x (x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \;\&\; g(x) = y)) .$$

<u>Замечание 1</u>. Пусть g равномерно непрерывная функция, а f абсолютно непрерывная функция.

1) Согласно [4] существуют алгорифмы $\langle S, g \rangle$ и $\langle I, g \rangle$, применимые к всякому сегменту $x \Delta y$ и выдающие по нему супремум (соотв. инфимум) множества

$$\wedge v (\exists u (u \in x \Delta y \;\&\; v = g(u))) .$$

2) Мы обозначим $\forall x y (x < y \supset (\langle \sigma, g \rangle \llcorner x \Delta y \lrcorner \rightleftharpoons \langle I, g \rangle \llcorner x \Delta y \lrcorner \Delta \langle S, g \rangle \llcorner x \Delta y \lrcorner) \;\&\; (\langle \omega, g \rangle \llcorner x \Delta y \lrcorner \rightleftharpoons |\langle \sigma, g \rangle \llcorner x \Delta y \lrcorner|))$.

3) Согласно [5] и [4] существует алгорифм $V[f]$, применимый к всякому сегменту $x \Delta y$ и выдающий по нему вариацию функции f на $x \Delta y$.

Ввиду [8] для всякого S_σ-множества $\{H_k\}_k$ ряд $\sum\limits_k V[f] \llcorner H_k \lrcorner$ сходится.

<u>Определения</u>. Пусть f функция типа A.

1) Мы обозначим $\mathcal{Y}_1(f)$, если существуют последовательности S_σ-множеств $\{\{H^q_n\}_n\}_q$ и S-множеств

$\{\mathcal{G}^q\}_q$ и последовательность абсолютно непрерывных функций $\{f^q\}_q$ такие, что выполнено

$\mathcal{Y}_1(f, \{f^q\}_q, \{\{H^q_m\}_m\}_q, \{\mathcal{G}^q\}_q)$:

для всякого НЧ q верно $\{H^{q+1}_m\}_m \subseteq \{H^q_m\}_m \subseteq 0 \triangle 1$, $\mathcal{G}^{q+1} \subseteq \mathcal{G}^q$, мера $\mathcal{G}^q$ меньше чем $\frac{1}{2^q}$ и

$$\forall x((x \in \{H^q_m\}_m \supset f(x) \in \mathcal{G}^q \,\&\, f^q(x) \in \mathcal{G}^q) \,\&$$

$$\& (\neg \exists m (\text{Э}_\lambda(H^q_m) < x < \text{Э}_m(H^q_m)) \supset f^q(x) = f(x))) \,\&$$

$$\& \forall \ell (q < \ell \supset \sum_{m=1}^{\infty} V[f^q]_{\llcorner} H^\ell_{m \lrcorner} < \frac{1}{2^\ell}) .$$

2) Мы обозначим $\mathcal{Y}_2(f)$, если существуют последовательности S-множеств $\{\mathcal{G}^q\}_q$, абсолютно непрерывных функций $\{f^q\}_q$, НЧ $\{k_q\}_q$ и элементов пространства M - $\{\{\mathfrak{M}^q_m\}_m\}_q$ такие, что выполнено

$\mathcal{Y}_2(f, \{f^q\}_q, \{k_q\}_q, \{\mathcal{G}^q\}_q, \{\{\mathfrak{M}^q_m\}_m\}_q)$:

для всякого НЧ q мера $\mathcal{G}^q$ меньше чем $\frac{1}{2^q}$, $\mu(\{\mathfrak{M}^q_m\}_m) < \frac{1}{2^q}$, $\mathcal{G}^{q+1} \subseteq \mathcal{G}^q$, $\{\mathfrak{M}^{q+1}_m\}_m \subseteq \{\mathfrak{M}^q_m\}_m$, $1 < k_q < k_{q+1}$ и

$$\forall x((x \in \mathcal{G}^q \supset f(x) \in \{\mathfrak{M}^q_m\}_m \,\&\, f^q(x) \in \{\mathfrak{M}^q_m\}_m) \,\&$$

$$\& (x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^q) \supset f^q(x) =$$

$$= f(x) \,\&\, \exists u (D(u, f^q, x) \,\&\, |u| < k_q))) .$$

<u>Теорема 1</u>. Функция f типа A представима в виде $f = f_2 * f_1$, где f_1 и f_2 абсолютно непрерывные функции типа A тогда и только тогда, когда $\mathcal{Y}_1(f)$.

На основании результатов из [5] и [6] можно доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть g функция типа А, а $\{k_l\}_l$ последовательность НЧ такие, что $\forall l\, \mathcal{A}(g, l, k_l)$. Тогда

1) для всяких НЧ l и S_σ-множества $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{1}{k_{l+1}}$ существует S-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{1}{l}$ такое, что $\forall x (x \in \mathcal{G} \supset g(x) \in \mathcal{G})$;

2) для любого $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ существует $\{\mathfrak{N}_n\}_n \in M$ такое, что $\mathcal{O}(g, \{\mathfrak{M}_n\}_n, \{\mathfrak{N}_n\}_n)$, причем

а) $\forall l (\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) < \frac{1}{k_{l+1}} \supset \mu(\{\mathfrak{N}_n\}_n) < \frac{1}{l})$ и

б) если существует $\{G_n\}_n \in L_1$, для которого верно $\forall xy (0 \le x < y \le 1 \supset g(y) - g(x) = \int_x^y \{G_n\}_n)$, то
$\mu(\{\mathfrak{N}_n\}_n) \le \int_{\{\mathfrak{M}_n\}_n} |\{G_n\}_n| \,\&\, \forall l (\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) < \frac{1}{k_{l+1}} \supset \int_{\{\mathfrak{M}_n\}_n} |\{G_n\}_n| < \frac{1}{l})$.

<u>Лемма 2</u>. Пусть f функция, d РЧ, а $\mathcal{G}$ S_σ-множество такие, что

$$0 \le d \,\&\, \forall x (x \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg (f(x) \in \mathcal{G}) \supset \neg\neg \exists u (D(u, f, x) \,\&\, |u| \le d))$$

Тогда

(1) $\forall xy (|f(x) - f(y)| \le d \cdot |x - y| + |\nu_1 \langle \mathcal{G} \rangle (f(x)) - \nu_1 \langle \mathcal{G} \rangle (f(y))|)$.

<u>Доказательство</u>. Определение $\nu_1 \langle \mathcal{G} \rangle$ приведено в [11]. Допустим, что (1) неверно. Тогда согласно теореме Г.С. Цейтина и {18} из [3] и принципу А.А. Маркова существуют РЧ a и b, $0 < a < b < 1$, и НЧ m такие, что

$$|f(a) - f(b)| > (d + \frac{1}{m}) \cdot (b - a) + |\nu_1 \langle \mathcal{G} \rangle (f(a)) - \nu_1 \langle \mathcal{G} \rangle (f(b))|.$$

Пусть, например, $f(b) < f(a)$. Можно построить последовательность рациональных интервалов $\{H_k\}_k$ и алгорифм $\mathcal{C}$ такие, что всякий сегмент последовательности $\mathcal{G}$

содержится в определенном интервале из $\{H_k\}_k$, $f(a)\in H_1$ & & $f(b)\in H_2$, ряд $\sum\limits_k |H_k|$ сходится, $\mathcal{C}$ применим к всякому сегменту $x\Delta y$ и выдает по нему сумму ряда $\sum\limits_k (max(min(Э_m(H_k),y),x)-max(min(Э_л(H_k),y),x))$ и выполнено $|f(a)-f(b)|>(d+\frac{1}{m})\cdot(b-a)+\mathcal{C}\llcorner f(b)\Delta f(a)\lrcorner$.

Заметим, что $\mathcal{C}$ является неотрицательной аддитивной функцией сегментов.

Мы определим $a_1 \rightleftharpoons a$, $b_1 \rightleftharpoons b$.

Пусть m НЧ и пусть уже построены РЧ a_m и b_m такие, что

(2) $0<a_1\leq a_m<b_m\leq b_1<1\ \&\ f(b_m)<f(a_m)\ \&$

$\&\ f(a_m)-f(b_m)>(d+\frac{1}{m})\cdot(b_m-a_m)+\mathcal{C}\llcorner f(b_m)\Delta f(a_m)\lrcorner$.

Существуют РЧ c и слово P, для которых верно

$$a_m<c<b_m\ \&\ f(b_m)+\frac{1}{3}\cdot(f(a_m)-f(b_m))<f(c)<$$

$$<f(b_m)+\frac{2}{3}\cdot(f(a_m)-f(b_m))\ \&\ (P\mathrel{\underline{\overline{\mathrm{I}}}}\Lambda\supset f(a_m)-$$

$$-f(c)>(d+\frac{1}{m})\cdot(c-a_m)+\mathcal{C}\llcorner f(c)\Delta f(a_m)\lrcorner)\ \&$$

$$\&\ (\neg(P\mathrel{\underline{\overline{\mathrm{I}}}}\Lambda)\supset f(c)-f(b_m)>(d+\frac{1}{m})\cdot(b_m-c)+$$

$$+\mathcal{C}\llcorner f(b_m)\Delta f(c)\lrcorner).$$

Мы определим $(P\mathrel{\underline{\overline{\mathrm{I}}}}\Lambda\supset(a_{m+1}\rightleftharpoons a_m)\ \&$
$\&\ (b_{m+1}\rightleftharpoons c))\ \&\ (\neg(P\mathrel{\underline{\overline{\mathrm{I}}}}\Lambda)\supset(a_{m+1}\rightleftharpoons c)\ \&\ (b_{m+1}\rightleftharpoons b_m))$.

Итак, мы построили последовательность сегментов $\{a_m\Delta b_m\}_m$ такую, что для всякого НЧ m верно (2), $a_{m+1}\Delta b_{m+1}\subseteq a_m\Delta b_m$ и $0<f(a_{m+1})-f(b_{m+1})<$ $<\frac{2}{3}\cdot(f(a_m)-f(b_m))$ и, следовательно, $|a_m\Delta b_m|\xrightarrow[m\to\infty]{}$ $\xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Существует КДЧ x, являющееся общим пределом последовательностей $\{a_m\}_m$ и $\{b_m\}_m$. Ясно, что $0 < x < 1$.

Допустим, что $f(x) \in \mathcal{G}$. Тогда $\exists k(f(x) \in H_k)$ и, следовательно, ввиду непрерывности функций ([3]) можно построить НЧ m, для которого верно $f(a_m) - f(b_m) \leq \leq \mathcal{C}_\llcorner f(b_m) \Delta f(a_m)_\lrcorner$, что противоречит (2).

Итак, $\neg(f(x) \in \mathcal{G})$ и по нашему предположению не может не существовать КДЧ u такое, что

(3) $$D(u, f, x) \mathbin{\&} |u| \leq d \quad .$$

Пусть u КДЧ, для которого верно (3). Тогда существует НЧ m такое, что $f(a_m) - f(b_m) \leq (|u| + \frac{1}{m}).(b_m - a_m) \leq \leq (d + \frac{1}{m}).(b_m - a_m)$, что ввиду (2) невозможно.

<u>Теорема 2</u>. Пусть Ψ_0 возрастающая на $0 \Delta 1$ абсолютно непрерывная функция типа А. Тогда существует неубывающая функция Ψ типа А такая, что $\forall x((x \in 0 \Delta 1 \supset \supset \Psi(\Psi_0(x)) = x) \mathbin{\&} (x \leq \Psi_0(0) \supset \Psi(x) = 0) \mathbin{\&} (\Psi_0(1) \leq x \supset \Psi(x) = 1))$.

Ψ является абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда существуют последовательности S -множеств $\{\mathcal{G}^q\}_q$ и НЧ $\{k_q\}_q$ такие, что для всякого НЧ q мера $\mathcal{G}^q$ меньше чем $\frac{1}{2^q}$ и

(4) $$\forall x(x \in 0 \Delta 1 \mathbin{\&} \neg(x \in \mathcal{G}^q) \supset \exists u(D(u, \Psi_0, x) \mathbin{\&} \frac{1}{k_q} \leq u)) .$$

<u>Доказательство</u>. Мы ограничимся установлением достаточности приведенного условия. Согласно замечанию 6 из [11] выполнено $\alpha(\Psi)$. Ввиду [8] нам нужно доказать $a(\Psi)$.

Пусть q НЧ. Без ограничения общности можно предположить, что $0 \in \mathcal{G}^q \mathbin{\&} 1 \in \mathcal{G}^q$. Ввиду (4) и теоремы о производной обратной функции верно $\forall y(y \in 0 \Delta 1 \mathbin{\&} \neg(\Psi(y) \in \in \mathcal{G}^q) \supset \exists v(D(v, \Psi, y) \mathbin{\&} D(\frac{1}{v}, \Psi_0, \Psi(y)) \mathbin{\&} v \leq k_q))$.

Пусть $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{s}$ система сегментов такая, что $0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \dots \le a_s < b_s \le 1 \,\&\, \sum_{i=1}^{s} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{2q \cdot k_q}$.

Мы получаем ввиду леммы 2 и монотонности функции Ψ

$$\sum_{i=1}^{s} |\Psi(a_i) - \Psi(b_i)| \le \sum_{i=1}^{s} (k_q \cdot (b_i - a_i) +$$

$$+ |\nu_1 \langle \mathcal{G}^q \rangle (\Psi(b_i)) - \nu_1 \langle \mathcal{G}^q \rangle (\Psi(a_i))| < \frac{1}{2q} +$$

$$+ \nu_1 \langle \mathcal{G}^q \rangle (1) - \nu_1 \langle \mathcal{G}^q \rangle (0) < \frac{1}{2q} + \frac{1}{2^q} \le \frac{1}{q} \quad .$$

<u>Замечание 2</u>. Теорема из [2], стр. 202, в конструктивной математике неверна. Это показано на примере в замечании 7 из [11].

<u>Лемма 3</u> . Пусть f функция типа А, $\mathcal{Y}_1(f)$. Тогда существуют неубывающая абсолютно непрерывная функция $\varkappa$ и функция g типа А такие, что $\forall x y (|\varkappa(x) - \varkappa(y)| \le \le |x - y|) \,\&\, g * \varkappa = f \,\&\, \varkappa(0) = 0 \,\&\, \mathcal{Y}_2(g)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{\{H_m^q\}_m\}_q$ последовательность S_σ-множеств, $\{\mathcal{G}^q\}_q$ последовательность S-множеств, $\{f^q\}_q$ последовательность абсолютно непрерывных функций, а $\{\{F_m^q\}_m\}_q$ последовательность элементов L_1 такие, что

$$\mathcal{Y}_1(f, \{f^q\}_q, \{\{H_m^q\}_m\}_q, \{\mathcal{G}^q\}_q) \,\&$$

$$\& \forall q x y (0 \le x < y \le 1 \supset f^q(y) - f^q(x) = \int_x^y \{F_m^q\}_m)$$

(теорема 2 из [5]).

Согласно [5], [6] и теореме 2 существуют последовательности элементов L_1 $\{\{P_m^k\}_m\}_k$ и $\{\{G_m^k\}_m\}_k$, возрастающих на $0 \Delta 1$ абсолютно непрерывных функций типа А

$\{\varkappa^k\}_k$ и неубывающих абсолютно непрерывных функций типа А $\{\eta^k\}_k$ такие, что для всякого НЧ k

а) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $(x \in \{H_m^k\}_m \supset P(\frac{1}{2}, \{P_m^k\}_m, x)) \& (\neg(x \in \{H_m^k\}_m) \supset P(1, \{P_m^k\}_m, x))$,

б) $\{G_m^1\}_m = \{P_m^1\}_m$ и $\{G_m^{k+1}\}_m = \{G_m^k\}_m \cdot \{P_m^{k+1}\}_m$,

в) $\forall x\, (0 \le x \le 1 \supset \varkappa^k(x) = \int_0^x \{G_m^k\}_m)$ и, следовательно, для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$\exists u\, (D(u, \varkappa^k, x) \& \frac{1}{2^k} \le u \le 1)$,

г) $\forall x ((x \in 0 \Delta 1 \supset \eta^k(\varkappa^k(x)) = x) \& (x \le \varkappa^k(0) \supset \eta^k(x) = 0) \& (\varkappa^k(1) \le x \supset \eta^k(x) = 1))$ и, следовательно,

д) $|\{G_m^k\}_m - \{G_m^{k+1}\}_m| = \{G_m^k\}_m \cdot (\{0 \gamma 1 \delta 1\}_m - \{P_m^{k+1}\}_m)$ и

$$\int_0^1 |\{G_m^k\}_m - \{G_m^{k+1}\}_m| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \int_{H_m^{k+1}} \{G_m^k\}_m \le \frac{1}{2^{k+1}} .$$

Таким образом, существует неубывающая абсолютно непрерывная функция $\varkappa$, являющаяся пределом $\{\varkappa^k\}_k$, для которой для всякого НЧ k верно $|\varkappa - \varkappa^k| \le \frac{1}{2^k}$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено

$$\exists u\, (D(u, \varkappa, x) \& (x \in \{H_m^k\}_m \supset 0 \le u \le \frac{1}{2^k}) \& (\neg(x \in \{H_m^k\}_m) \supset \frac{1}{2^{k-1}} \le u \le 1))$$

и, следовательно, ряд $\sum_m (\varkappa(\mathfrak{Э}_m(H_m^k)) - \varkappa(\mathfrak{Э}_л(H_m^k)))$ сходится к КДЧ, которое не больше чем $\frac{1}{2^k}$, и $\forall xy\, (|\varkappa(x) - \varkappa(y)| \le |x - y|)$.

Пусть φ функция,

$\forall x\, (\varphi(x) = max\,(min\,(x, \varkappa(1)), \varkappa(0)))$.

Пусть t и m НЧ. Тогда по нашим предположениям и [8] существуют НЧ k, s_0 и s такие, что

(5) $k = t + m \& \mathfrak{a}(f^k, 3m, s_0) \& \mathfrak{a}(f^t, 3m, s_0) \& s = 2^k \cdot s_0$.

Пусть x КДЧ, а ℓ НЧ, $s \leq \ell$. Тогда не может не существовать КДЧ u такое, что

(6) $$0 \leq u \leq 1 \ \& \ \varkappa(u) = \varphi(x).$$

Пусть u КДЧ, для которого верно (6). Тогда

$$0 \leq \varkappa(u) \leq \varkappa^{\ell}(u) \leq 1 \ \& \ |\varkappa(u) - \varkappa^{\ell}(u)| \leq \frac{1}{2^{\ell}} < \frac{1}{s}.$$

Множество $\mathcal{H} \rightleftharpoons \Lambda z\, (\eta^{\ell}(\varkappa(u)) \leq z \leq \eta^{\ell}(\varkappa^{\ell}(u))\ \& \ \neg (z \in \{H_n^{k}\}_n))$ является измеримым и, следовательно, существуют $\{\mathcal{H}_n^1\}_n \in M$ и $\{\mathcal{H}_n^2\}_n \in M$ такие, что $\mathcal{O}(\varkappa^{\ell}, \{\mathcal{H}_n^1\}_n, \{\mathcal{H}_n^2\}_n)$ и для почти всех КДЧ v верно $v \in \mathcal{H} \equiv v \in \{\mathcal{H}_n^1\}_n$.

Ввиду того, что для почти всех КДЧ v из $\mathcal{H}$ выполнено $\exists w\, (D(w, \varkappa^{\ell}, v) \ \& \ \frac{1}{2^{k}} \leq w)$, имеет место

$$\frac{1}{2^{k}} \cdot \mu(\{\mathcal{H}_n^1\}_n) \leq \mu(\{\mathcal{H}_n^2\}_n) \leq \varkappa^{\ell}(u) - \varkappa(u) < \frac{1}{s}$$

и, следовательно, согласно лемме 1 $\int_{\{\mathcal{H}_n^1\}_n} |\{F_n^{k}\}_n| < \frac{1}{2m}$ и $\int_{\{\mathcal{H}_n^1\}_n} |\{F_n^{t}\}_n| < \frac{1}{2m}$.

Таким образом, мы по лемме 1 получаем

$$|f(u) - f * (\eta^{\ell} * \varphi)(x)| = |f * \eta^{\ell}(\varkappa^{\ell}(u)) - f * \eta^{\ell}(\varkappa(u))| \leq \int_{\{\mathcal{H}_n^1\}_n} |\{F_n^{k}\}_n| + \nu_1 \langle \varphi^{k} \rangle (1) - \nu_1 \langle \varphi^{k} \rangle (0) < \frac{1}{m}$$

и $$|f^t(u) - f^t * (\eta^{\ell} * \varphi)(x)| = |f^t * \eta^{\ell}(\varkappa^{\ell}(u)) - f^t * \eta^{\ell}(\varkappa(u))| \leq \sum_{m=1}^{\infty} V[f^t]_{\llcorner} H_{n \lrcorner}^{k} + \int_{\{\mathcal{H}_n^1\}_n} |\{F_n^{t}\}_n| < \frac{1}{m}.$$

Итак, для всякого НЧ t существуют функции g и $g^{1,t}$, являющиеся пределами равномерно сходящихся последовательностей функций $\{f * \eta^{\ell} * \varphi\}_{\ell}$ и $\{f^t * \eta^{\ell} * \varphi\}_{\ell}$. Выполнено $g * \varkappa = f \ \& \ g^{1,t} * \varkappa = f^t$. Ввиду абсолютной непрерывности функций f^t и $\varkappa$ для всякого РЧ a функция $f^t - a\cdot\varkappa$ является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ ([8] и замечание 1 из [9]). Но тогда и $g^{1,t} - h_a$ является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$. Итак, верно $\alpha(g^{1,t})$.

Пусть m НЧ, а k, s_0 и s НЧ такие, что (5). Мы докажем $a(g^{1,t}, m, s)$. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{2\tau}$ система РЧ такая, что

$$0 \le a_1 < a_2 \le a_3 < a_4 \le \ldots \le a_{2\tau-1} < a_{2\tau} \le 1 \,\&\, \sum_{j=1}^{\tau} |a_{2j-1} \Delta a_{2j}| < \frac{1}{s}.$$

Тогда ввиду $g^{1,t} = g^{1,t} * \varphi$ не могут не существовать неубывающая система КДЧ $\{\alpha_i\}_{i=1}^{2\tau}$, $\{\mathcal{H}_m\}_m \in M$ и $\{\mathcal{H}^1_m\}_m \in M$ такие, что

$$\forall i\,(1 \le i \le 2\tau \supset \varkappa(\alpha_i) = \varphi(a_i)) \,\&\, \mathcal{O}(\varkappa, \{\mathcal{H}_m\}_m, \{\mathcal{H}^1_m\}_m)$$

и для почти всех КДЧ x верно

$$((\neg\neg \exists j\,(1 \le j \le \tau \,\&\, \alpha_{2j-1} \le x \le \alpha_{2j}) \,\&\, \neg(x \in \{H^k_m\}_m)) \equiv$$

$$\equiv x \in \{\mathcal{H}_m\}_m) \,\&\, (x \in \{\mathcal{H}_m\}_m \supset \exists u\,(D(u, \varkappa, x) \,\&\, \frac{1}{2^k} \le u)).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2^k}\cdot\mu(\{\mathcal{H}_m\}_m) \le \mu(\{\mathcal{H}^1_m\}_m) \le \sum_{j=1}^{\tau} |\varphi(a_{2j}) - \varphi(a_{2j-1})| <$$

$$< \frac{1}{s} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\tau} |g^{1,t}(a_{2j}) - g^{1,t}(a_{2j-1})| = \sum_{j=1}^{\tau} |g^{1,t}(\varkappa(\alpha_{2j})) -$$

$$- g^{1,t}(\varkappa(\alpha_{2j-1}))| = \sum_{j=1}^{\tau} |f^t(\alpha_{2j}) - f^t(\alpha_{2j-1})| \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} V[f^t]_{\llcorner} H^k_{m\lrcorner} + \int_{\{\mathcal{H}_m\}_m} |\{F^t_m\}_m| < \frac{1}{m}.$$

Ввиду этого, $\alpha(g^{1,t})$ и [8] $g^{1,t}$ является абсолютно непрерывной функцией.

Ясно, что $\forall k x\,((\neg\neg \exists n\,(\varkappa(\ni_n(H^k_m)) \le x \le \varkappa(\ni_n(H^k_m))) \supset$ $\supset g(x) \in \mathcal{G}^k \,\&\, g^{1,k}(x) \in \mathcal{G}^k) \,\&\, (\neg \exists n\,(\varkappa(\ni_n(H^k_m)) \le$

$\leq x \leq \varkappa(\mathfrak{I}_n(H_n^k))) \supset g(x) = g^{1,k}(x)) \,\&\, (\varkappa(1) \leq x \supset$

$\supset g(x) = g(\varkappa(1)) = g^{1,k}(\varkappa(1)) = g^{1,k}(x)))$.

Можно построить возрастающую последовательность НЧ $\{s_k\}_k$ такую, что $\forall k\, \mathcal{A}(g^{1,k}, 2^{k+2}, s_k)$ ([8]).

Согласно [5], теореме 5.4 из [4] и лемме 1 для всякого НЧ k существуют равномерно непрерывная функция φ^k, НЧ l_k, S-множества $\mathcal{S}^{1,k}$ и $\mathcal{S}^{2,k}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{s_k+2}}$ и S-множество $\mathcal{Y}^{1,k}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{k+1}}$ такие, что

$$\forall x (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{S}^{1,k}) \supset D(\varphi^k(x), g^{1,k}, x)) \,\&$$

$$\& \, |\varphi^k| < l_k \,\&\, \forall x n ((\varkappa(\mathfrak{I}_l(H_n^k)) - \frac{1}{2^{s_k+4+n}} \leq x \leq$$

$$\leq \varkappa(\mathfrak{I}_l(H_n^k)) \vee \varkappa(\mathfrak{I}_n(H_n^k)) \leq x \leq$$

$$\leq \varkappa(\mathfrak{I}_n(H_n^k)) + \frac{1}{2^{s_k+4+n}}) \supset x \in \mathcal{S}^{2,k}) \,\&$$

$$\& \, \forall x (\neg\neg (x \in \mathcal{S}^{1,k} \vee x \in \mathcal{S}^{2,k}) \supset g^{1,k}(x) \in \mathcal{Y}^{1,k}) .$$

Ввиду выше сказанного и [6] существуют последовательности S-множества $\{\mathcal{S}^q\}_q$ и $\{\mathcal{Y}^q\}_q$ и последовательность элементов M $\{\{\mathfrak{M}_n^q\}_n\}_q$ такие, что для всякого НЧ q меры $\mathcal{S}^q$ и $\mathcal{Y}^q$ меньше чем $\frac{1}{2^q}$,

$$(\mathcal{S}^{q+1} \subseteq \mathcal{S}^q) \,\&\, (\mathcal{Y}^{q+1} \subseteq \mathcal{Y}^q) \,\&$$

$$\& \forall x ((\neg\neg(\exists k (q < k \,\&\, (x \in \mathcal{S}^{1,k} \vee x \in \mathcal{S}^{2,k})) \vee \exists n (\varkappa(\mathfrak{I}_l(H_n^{q+1})) \leq$$

$$\leq x \leq \varkappa(\mathfrak{I}_n(H_n^{q+1})))) \equiv x \in \mathcal{S}^q) \,\&$$

$$\& (\neg\neg(\exists k (q+1 \leq k \,\&\, x \in \mathcal{Y}^{1,k}) \vee x \in \mathcal{Y}^{q+1}) \supset x \in \mathcal{Y}^q) \,\&$$

$\& (x \in \mathcal{Y}^{q} \supset x \in \{\mathfrak{M}_m^{q}\}_m))$

и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $x \in \{\mathfrak{M}_m^{q}\}_m \supset$ $\supset x \in \mathcal{Y}^{q}$. Тогда выполнено $\mathcal{Y}_2(g, \{g^{q}\}_q, \{k_q\}_q, \{\mathcal{S}^{q}\}_q,$ $\{\{\mathfrak{M}_m^{q}\}_m\}_q) \& f = g * æ$, где

$\forall q ((g^{q} \rightleftharpoons g^{1,q+1}) \& (k_q \rightleftharpoons 1 + \sum_{i=1}^{q+1} l_i))$.

Согласно [5] и [6] для любого S_6-множества $\mathcal{S}$ почти все точки x, $x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{S})$, являются точками разрешения измеримого множества $\wedge y (y \in \mathcal{S})$. На основании этохо легко доказать следующие утверждения.

<u>Лемма 4</u>. Пусть f и g функции, а $\mathcal{S}$ S_6-множество такие, что $\forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{S}) \supset f(x) = g(x)) \&$ $\& \forall x y (|g(x) - g(y)| \leq |x - y|)$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $(\neg (x \in \mathcal{S}) \supset \exists u \, D(u, f, x))$.

Тогда для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $(\neg (x \in \mathcal{S}) \supset \exists u (D(u, g, x) \& D(u, f, x)))$.

<u>Лемма 5</u>. Пусть f и g функции, а $\mathcal{S}$ S_6-множество такие, что $\forall x (\neg (x \in \mathcal{S}) \supset f(x) = g(x))$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $(\neg (x \in \mathcal{S}) \supset \exists u v (D(u, f, x) \& D(v, g, x)))$. Тогда для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено

$(\neg (x \in \mathcal{S}) \supset \exists u (D(u, f, x) \& D(u, g, x)))$.

<u>Лемма 6</u>. Пусть f и g функции типа А, а $æ$ неубывающая абсолютно непрерывная функция такие, что $g * æ =$ $= f \& æ(0) = 0 \& \forall x y (|æ(x) - æ(y)| \leq |x - y|) \& \mathcal{Y}_2(g)$.

Тогда существуют абсолютно непрерывные функции типа А Ψ_0, Ψ и φ такие, что Ψ_0 возрастает на $0 \Delta 1$, Ψ является неубывающей, $f = \Psi * \varphi$ и выполнено

$\varphi = \psi_0 * f \,\&\, \forall xy(|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x-y|)\,\&$

$\&\, \forall x((x \in 0\Delta 1 \supset \psi(\psi_0(x)) = x)\,\&$

$\&(x \leq \psi_0(0) \supset \psi(x) = 0)\,\&\,(\psi_0(1) \leq x \supset \psi(x) = 1))$.

Доказательство. Пусть $\{g^q\}_q$ последовательность абсолютно непрерывных функций, $\{\varkappa_q\}_q$ последовательность НЧ, $\{\mathcal{G}^q\}_q$ последовательность S -множеств, $\{\{\mathfrak{M}^q_m\}_m\}_q$ последовательность элементов M такие, что $\mathcal{U}_2(g, \{g^q\}_q,$ $\{\varkappa_q\}_q, \{\mathcal{G}^q\}_q, \{\{\mathfrak{M}^q_m\}_m\}_q)$. Ряд $\frac{1}{\varkappa_1}\cdot\chi[\{0\gamma 1\}_m \setminus \{\mathfrak{M}^1_m\}_m] + \sum_q \frac{1}{\varkappa_{q+1}}\cdot\chi[\{\mathfrak{M}^q_m\}_m \setminus \{\mathfrak{M}^{q+1}_m\}_m]$ сходится в L_1 . Следовательно, существуют $\{F_m\}_m \in L_1$ и абсолютно непрерывная функция Ψ_0 такие, что $\{F_m\}_m$ является суммой этого ряда в L_1 и $\forall x(0 \leq x \leq 1 \supset \Psi_0(x) =$ $= \int_0^x \{F_m\}_m)$. Согласно [5] для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$ выполнено $\exists u(D(u, \Psi_0, x)\,\&\, 0 < u < 1)$ и, следовательно, Ψ_0 возрастает на $0\Delta 1$ и

$\Psi_0(1) < 1 \,\&\, \forall xy(|\psi_0(x) - \psi_0(y)| \leq |x-y|)$.

Мы определим $\varphi_1 \rightleftharpoons \psi_0 * g$ и $\varphi \rightleftharpoons \varphi_1 * \varkappa$.

а) Для всякого НЧ q существуют согласно [5], [6] и леммам 1 и 5 S -множества $\mathcal{L}^{0,q}$, $\mathcal{L}^{1,q}$ и $\mathcal{L}^{2,q}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^q}$ такие, что

$\forall x((x \in \mathcal{L}^{0,q} \supset g^q(x) \in \mathcal{L}^{1,q})\,\&\,(x \in \{\mathfrak{M}^q_m\}_m \supset x \in \mathcal{L}^{1,q})\,\&\,(x \in \mathcal{L}^{1,q} \supset$

$\supset \psi_0(x) \in \mathcal{L}^{2,q}))\,\&\,\forall x(x \in 0\Delta 1\,\&\,\neg(x \in \mathcal{L}^{1,q}) \supset \exists u(D(u, \Psi_0, x)\,\&$

(7) $\&\, \frac{1}{\varkappa_q} \leq u < 1\,\&\,(\neg(x \in \{\mathfrak{M}^1_m\}_m)\,\&\, u = \frac{1}{\varkappa_1} \vee \exists i(1 \leq i <$

$< q \,\&\, x \in \{\mathfrak{M}^i_m\}_m \,\&\, \neg(x \in \{\mathfrak{M}^{i+1}_m\}_m)\,\&\, u = \frac{1}{\varkappa_{i+1}}))))\,\&$

$\&\, \forall ix(1 \leq i \leq q \,\&\, x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^i)\,\&\,\neg(x \in \mathcal{L}^{0,q}) \supset$

$\supset \exists v (D(v, q^i, x) \,\&\, D(v, q^l, x) \,\&\, |v| < k_i))$

и, следовательно, по теореме о производной суперпозиции функций выполнено $\forall x (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (\psi_0 * q^l (x) \in \mathcal{L}^{2,l}) \supset$ $\supset \exists w (D(w, \psi_0 * q^l, x) \,\&\, |w| < 1))$ и согласно лемме 2 $\forall x y (|\psi_0 * q^l(x) - \psi_0 * q^l(y)| \leq |x - y| + \frac{1}{2^l})$.

Но тогда $\forall q\, l\, x\, y\, (q \leq l \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}^l) \,\&$

$\& \neg (y \in \mathcal{G}^l) \,\&\, 0 \leq x < y \leq 1 \supset |\varphi_1 (x) - \varphi_1 (y)| = |\psi_0 * q(x) -$

$- \psi_0 * q(y)| = |\psi_0 * q^l(x) - \psi_0 * q^l(y)| \leq |x - y| + \frac{1}{2^l})$

и, следовательно, по теореме Г.С. Цейтина [3] $\forall x y (|\varphi_1 (x) -$ $- \varphi_1(y)| \leq |x - y|)$ и ввиду $\varphi = \varphi_1 * \varkappa$ верно $\forall x y (|\varphi (x) - \varphi(y)| \leq |x - y|)$.

б) Согласно теореме 1 из [10] для всякого НЧ q функция $\psi_0 * q^l$ абсолютно непрерывна и по [5], а) и лемме 4 существует S -множество $\mathcal{Y}^l$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^l}$ и равномерно непрерывная функция $\mathcal{U}_l$ такие, что $\mathcal{G}^l \subseteq \mathcal{Y}^l$ и

$\forall x (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{Y}^l) \supset D(\mathcal{U}_l(x), \psi_0 * q^l, x) \,\&\, D(\mathcal{U}_l(x), \varphi_1, x))$.

Следовательно, по теореме 4 из [5] существует $\{G_n\}_n \in S$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\exists u (P(u, \{G_n\}_n, x) \,\&\, D(u, \varphi_1, x))$.

Ввиду этого, а), теоремы 3 из [7] и теоремы 1 из [10] функции φ_1 и φ абсолютно непрерывны.

в) По а) для всякого НЧ q мера $\mathcal{L}^{1,l}$ меньше чем $\frac{1}{2^l}$ и выполнено (7). Следовательно, согласно теореме 2 существует неубывающая абсолютно непрерывная функция ψ типа А такая, что

$$\forall x((x \in 0 \Delta 1 \supset \psi(\psi_0(x)) = x) \,\&\, (x \leq \psi_0(0) \supset \psi(x) = 0) \,\&$$
$$\& \,(\psi_0(1) \leq x \supset \psi(x) = 1)) \,.$$

Итак, $f = \psi * \varphi$.

При помощи леммы 1 легко доказать следующее утверждение.

Лемма 7. Пусть f абсолютно непрерывная функция типа А. Тогда $\mathcal{Y}_1(f)$.

Теорема 3 (ср. [2], стр. 214). Пусть n НЧ, а $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ система абсолютно непрерывных функций типа А. Тогда существуют абсолютно непрерывные функции типа А φ и ψ такие, что ψ является неубывающей, $\forall x y (|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|)$ и $f_n * (f_{n-1} * \ldots (f_2 * f_1) \ldots) = \psi * \varphi$.

Доказательство. Утверждение доказывается индукцией по n на основании лемм 3,6 и 7 и теорем 1 и 2 из [10].

Лемма 8. Пусть $\{H_k\}_k$ последовательность сегментов, $\varkappa$ КДЧ и φ равномерно непрерывная функция такие, что ряд $\sum_k |H_k|$ сходится и его сумма меньше чем $\varkappa$. Тогда существует S_6-множество $\{P_k\}_k$ меры меньшей чем $\varkappa$ такое, что

$$\forall n x (x \in H_n \supset x \in \{P_k\}_k) \,\&\, \forall k n (\neg(\Im_\lambda(P_k) \in H_n) \,\&$$
$$\& \,\neg(\Im_n(P_k) \in H_n)) \,\&\, \forall a b x (0 \leq a < b \leq 1 \,\&$$
$$\& \,(x = \langle I, \varphi \rangle_{\llcorner} a \Delta b_{\lrcorner} \vee x = \langle S, \varphi \rangle_{\llcorner} a \Delta b_{\lrcorner}) \supset$$
$$\supset \exists k (\Im_\lambda(P_k) < x < \Im_n(P_k)))$$

и что всякий сегмент $x \Delta y$, для которого верно $\nu_1 \langle \{P_k\}_k \rangle (y) - \nu_1 \langle \{P_k\}_k \rangle (x) < |x \Delta y|$, перекрывается с бесконечным числом сегментов последовательности $\{P_k\}_k$.

На основании [5], теоремы 3 из [7] и лемм 2 и 5 легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 9</u>. Пусть f функция, $\mathcal{U}$ равномерно непрерывная функция, $\{f_k\}_k$ последовательность абсолютно непрерывных функций, а $\{H_k\}_k$ S_σ -множество такие, что $\forall x (x \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg (x \in \{H_k\}_k) \supset D(\mathcal{U}(x), f, x))$, ряд $\sum_k |f(\Im_m(H_k)) - f(\Im_l(H_k))|$ сходится и для всякого НЧ k функция f_k не может не быть монотонной на H_k и $f_k(\Im_l(H_k)) = f(\Im_l(H_k)) \,\&\, f_k(\Im_m(H_k)) = f(\Im_m(H_k))$.

Тогда существует абсолютно непрерывная функция g, для которой выполнено $\forall k x (x \in H_k \supset g(x) = f_k(x)) \,\&$ $\&\, \forall x (\neg \exists k (\Im_l(H_k) < x < \Im_m(H_k)) \supset g(x) = f(x))$.

<u>Лемма 10</u>. Пусть ψ и φ абсолютно непрерывные функции типа А, $x_0 \Delta x_1$ сегмент, ν b и t НЧ такие, что

(8) $\forall x y (|\varphi(x) - \varphi(y)| \le |x - y|) \,\&\, x_0 \Delta x_1 \subseteq 0 \Delta 1 \,\&$
$\&\, \langle \omega, \psi * \varphi \rangle_{\llcorner} x_0 \Delta x_{1 \lrcorner} > \frac{1}{b}$.

Тогда существуют S_σ -множества $\{Q_k\}_k$ меры меньшей чем $|x_0 \Delta x_1|$ и $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{t+b}}$, равномерно непрерывная функция $\mathcal{U}$ и НЧ q такие, что

$$\frac{2}{q} < |x_0 \Delta x_1| \,\&\, x_0 \Delta (x_0 + \frac{1}{q}) \subseteq \{Q_k\}_k \,\&\, (x_1 - \frac{1}{q}) \Delta x_1 \subseteq$$
$$\subseteq \{Q_k\}_k \,\&\, \forall x ((x \in \{Q_k\}_k \supset x \in x_0 \Delta x_1 \,\&\, \psi * \varphi(x) \in$$
$$\in \mathcal{G}) \,\&\, (x \in x_0 \Delta x_1 \,\&\, \neg (x \in \{Q_k\}_k) \supset$$
$$\supset D(\mathcal{U}(x), \psi * \varphi, x)))$$

и ряд $\sum_k \langle \omega, \psi * \varphi \rangle_{\llcorner} Q_{k \lrcorner}$ сходится.

<u>Доказательство</u>. Согласно [5], [8], следствию теоремы 2 из [11] и лемме 1 существуют НЧ p, S -множества $\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}^2$ и $\mathcal{G}^3$ меры меньшей чем $\frac{1}{10p}$, равномерно непрерывные

функции $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}$ и НЧ m такие, что

$$\begin{aligned}(9)\quad & a(\psi, 2^{s+t+1}, p) \,\&\, \forall x (x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{G}^1) \supset \\ & \supset D(\mathfrak{A}_1(x), \varphi, x) \,\&\, \forall y (|y - x| \leq \frac{1}{m} \supset \\ & \supset |\varphi(y) - \varphi(x) - \mathfrak{A}_1(x).(y-x)| \leq \frac{1}{20p} \cdot |y - x|)) \,\& \\ & \& \forall xy (|x - y| \leq \frac{1}{m} \supset |\mathfrak{A}_1(x) - \mathfrak{A}_1(y)| < \frac{1}{10p}) \,\& \\ & \& \forall y (y \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg(y \in \mathcal{G}^2) \supset D(\mathfrak{A}_2(y), \psi, y)) \,\& \\ & \& \forall x (x \in \mathcal{G}^1 \supset \varphi(x) \in \mathcal{G}^3) \,\&\, \forall x (\mathfrak{A}(x) = \\ & = \mathfrak{A}_2(\varphi(x)) . \mathfrak{A}_1(x)) .\end{aligned}$$

Пусть $\forall i (0 \leq i \leq 2^m \supset \tau_i \rightleftharpoons x_0 + \frac{i}{2^m} \cdot (x_1 - x_0))$. Согласно теореме 1.3 из [4] существует система слов $\{P_i\}_{i=1}^{2m}$, для которой выполнено $\forall i (1 \leq i \leq 2^m \supset (P_i \boldsymbol{\mathrm{I}} \Lambda \supset \supset |\mathfrak{A}_1(\tau_i)| < \frac{1}{5p} + \frac{1}{20p}) \,\&\, (\neg(P_i \boldsymbol{\mathrm{I}} \Lambda) \supset \frac{1}{5p} < |\mathfrak{A}_1(\tau_i)|))$ и, следовательно, ввиду (9)

$$\begin{aligned}(10)\quad & \forall i x (1 \leq i \leq 2^m \,\&\, x \in \tau_{i-1} \triangle \tau_i \supset (P_i \boldsymbol{\mathrm{I}} \Lambda \supset \\ & \supset |\mathfrak{A}_1(x)| < \frac{2}{5p}) \,\&\, (\neg(P_i \boldsymbol{\mathrm{I}} \Lambda) \supset \frac{1}{10p} < |\mathfrak{A}_1(x)|)) .\end{aligned}$$

Тогда согласно лемме 2 для всякого НЧ i, $1 \leq i \leq 2^m \,\&\, P_i \boldsymbol{\mathrm{I}} \Lambda$, верно $|\langle \sigma, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \triangle \tau_{i \lrcorner}| \leq \frac{2}{5p} \cdot |\tau_{i-1} \triangle \tau_i| + \nu_1 \langle \mathcal{G}^3 \rangle (\langle S, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \triangle \tau_{i \lrcorner}) - \nu_1 \langle \mathcal{G}^3 \rangle (\langle I, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \triangle \tau_{i \lrcorner})$, где $\nu_1 \langle \mathcal{G}^3 \rangle (\langle S, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \triangle \tau_{i \lrcorner}) - \nu_1 \langle \mathcal{G}^3 \rangle (\langle I, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \triangle \tau_{i \lrcorner})$ мера пересечения $\mathcal{G}^3$ и $\langle \sigma, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \triangle \tau_{i \lrcorner}$. Следовательно, существуют НЧ q и S-множества $\mathcal{G}^4$ меры меньшей чем $\frac{3}{5p}$ и $\mathcal{G}^5$ меры меньшей чем $\frac{4}{5p}$ такие, что $\forall i x ((1 \leq i \leq 2^m \,\&\, (P_i \boldsymbol{\mathrm{I}} \Lambda \,\&\, x \in \tau_{i-1} \triangle \tau_i \vee x = \tau_i) \vee x \in \in x_0 \triangle (x_0 + \frac{1}{q}) \vee x \in (x_1 - \frac{1}{q}) \triangle x_1) \supset \varphi(x) \in \mathcal{G}^4) \,\& \,\& \forall y (\neg\neg(y \in \mathcal{G}^2 \vee y \in \mathcal{G}^3 \vee y \in \mathcal{G}^4) \supset y \in \mathcal{G}^5)$

(см. [6]).

Существуют НЧ n и возрастающая система $\{i_j\}_{j=1}^{n}$ всех НЧ i, $1 \leq i \leq 2^m \,\&\, \neg(P_i \rightleftharpoons \Lambda)$.

Мы построим, исходя от $\mathcal{G}^5$, при помощи леммы 8 S_σ-множество $\mathcal{G}^1$ меры меньшей чем $\frac{4}{5p}$, обладающее перечисленными там свойствами. Согласно теореме о производной суперпозиции функций выполнено $\forall x\,(x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg(\varphi(x) \in \mathcal{G}^1) \supset$ $\supset D(\mathcal{U}(x), \psi \text{ ж } \varphi, x))$.

Согласно теореме 1.3 из [4] и лемме 1 существуют система слов $\{P_j^1\}_{j=1}^{n}$ и S_σ-множества $\mathcal{G}^2$ меры меньшей чем $\frac{1}{p}$ и $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{s+t}}$, для которых выполнено

$$\forall j\,(1 \leq j \leq n \supset (P_j^1 \rightleftharpoons \Lambda \supset \langle \omega, \varphi\rangle_{\llcorner} \tau_{i_{j-1}} \triangle \tau_{i_j \lrcorner} <$$

$$< \frac{1}{10p \cdot 2^m} + \nu_1 \langle \mathcal{G}^1\rangle (\langle S, \varphi\rangle_{\llcorner} \tau_{i_{j-1}} \triangle \tau_{i_j \lrcorner}) -$$

$$- \nu_1 \langle \mathcal{G}^1\rangle (\langle I, \varphi\rangle_{\llcorner} \tau_{i_{j-1}} \triangle \tau_{i_j \lrcorner})) \,\&\, (\neg(P_j^1 \rightleftharpoons \Lambda) \supset$$

$$\supset \langle \omega, \varphi\rangle_{\llcorner} \tau_{i_{j-1}} \triangle \tau_{i_j \lrcorner} > \tag{11}$$

$$> \nu_1 \langle \mathcal{G}^1\rangle (\langle S, \varphi\rangle_{\llcorner} \tau_{i_{j-1}} \triangle \tau_{i_j \lrcorner}) - \nu_1 \langle \mathcal{G}^1\rangle (\langle I, \varphi\rangle_{\llcorner} \tau_{i_{j-1}} \triangle$$

$$\triangle \tau_{i_j \lrcorner}))) \,\&\, \forall y\,((\neg\neg(y \in \mathcal{G}^1 \vee \exists j x\,(1 \leq j \leq n \,\&$$

$$\&\, P_j^1 \rightleftharpoons \Lambda \,\&\, x \in \tau_{i_{j-1}} \triangle \tau_{i_j \lrcorner} \,\&\, \varphi(x) = y)) \supset$$

$$\supset y \in \mathcal{G}^2) \,\&\, (y \in \mathcal{G}^2 \supset \psi(y) \in \mathcal{G})).$$

Ввиду (8) верно $\exists j\,(1 \leq j \leq n \,\&\, \neg(P_j^1 \rightleftharpoons \Lambda))$.

Пусть i НЧ такое, что $\exists j\,(1 \leq j \leq n \,\&\, i = i_j \,\&$ $\&\, \neg(P_j^1 \rightleftharpoons \Lambda))$. Тогда ввиду (10) и (9)

$$\forall \xi x\,(\xi \in \tau_{i-1} \triangle \tau_i \,\&\, x \in \tau_{i-1} \triangle \tau_i \,\&\, \neg(\varphi(\xi) \in \mathcal{G}^5) \supset$$

$$\supset |\varphi(x) - \varphi(\xi)| \geq |\mathcal{U}_1(\xi)| \cdot |x - \xi| - |\varphi(x) - \varphi(\xi) -$$

$- \mathcal{U}_1(\xi).(x-\xi)| \geq \frac{1}{20p} \cdot |x-\xi|)$

и, следовательно, для всякого КДЧ y,
$\langle I, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \Delta \tau_{i\lrcorner} < y < \langle S, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \Delta \tau_{i\lrcorner} \& \neg (y \in \mathcal{G}^5)$,
существует единственное ξ такое, что $\xi \in \tau_{i-1} \Delta \tau_i$ &
& $\varphi(\xi) = y$.

Ввиду свойств $\mathcal{G}^1$ можно построить последовательность $\{H_k^i\}_k$ всех сегментов $\mathcal{G}^1$, перекрывающихся с $\langle \sigma, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \Delta \tau_{i\lrcorner}$, причем $\langle I, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \Delta \tau_{i\lrcorner} \in H_1^i$ &
& $\langle S, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \Delta \tau_{i\lrcorner} \in H_2^i$.

Мы определим $\forall k (H_k^{i,1} \rightleftharpoons H_k^i \cap \langle \sigma, \varphi \rangle_{\llcorner} \tau_{i-1} \Delta \tau_{i\lrcorner})$ и напомним, что края сегментов последовательности $\{H_k^i\}_k$ не содержатся в $\mathcal{G}^5$. Таким образом, можно построить последовательность перекрывающихся сегментов $\{Q_k^i\}_k$ такую, что каждая из точек τ_{i-1} и τ_i является краем одного из сегментов Q_1^i и Q_2^i и для всякого НЧ k верно
$\langle \sigma, \varphi \rangle_{\llcorner} Q_{k\lrcorner}^i \mathrel{\overline{\overline{c}}} H_k^{i,1} \& Q_k^i \subseteq \tau_{i-1} \Delta \tau_i \& |Q_k^i| \leq 20p \cdot |H_k^i|$
Следовательно, ряд $\sum_k |Q_k^i|$ сходится в ввиду абсолютной непрерывности ψ и $\forall k (\langle \omega, \psi * \varphi \rangle_{\llcorner} Q_{k\lrcorner}^i = \langle \omega, \psi \rangle_{\llcorner} H_{k\lrcorner}^{i,1})$ сходится и ряд $\sum_k \langle \omega, \psi * \varphi \rangle_{\llcorner} Q_{k\lrcorner}^i$. Ввиду (11) мера $\{Q_k^i\}_k$ меньше чем $|\tau_{i-1} \Delta \tau_i|$.

Пусть $\{Q_k\}_k$ последовательность сегментов, образованная сегментами $\tau_{i-1} \Delta \tau_i$, $1 \leq i \leq 2^m \& (P_i \equiv \Lambda \vee \exists j (1 \leq j \leq$
$\leq k \& i = i_j \& P_j^1 \equiv \Lambda))$, и Q_k^i, $\exists j (1 \leq j \leq k \& i = i_j \&$
$\& \neg (P_j^1 \equiv \Lambda)) \& 1 \leq k$. Тогда $\{Q_k\}_k$ S_σ-множество меры меньшей чем $|x_0 \Delta x_1|$, которое удовлетворяет условиям, описанным в утверждении.

Замечание 3. Пусть f_1 и f_2 абсолютно непрерывные функции типа А. Тогда для всякого сегмента $x_0 \Delta x_1$, $x_0 \Delta x_1 \subseteq 0 \Delta 1$, ввиду теоремы 3, леммы 10 и $\neg\neg(\langle\omega, f_2 * f_1\rangle_{\llcorner} x_0 \Delta x_{1 \lrcorner} > 0 \vee \langle\omega, f_2 * f_1\rangle_{\llcorner} x_0 \Delta x_{1 \lrcorner} = 0)$ не может не существовать S_σ-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $|x_0 \Delta x_1|$ и равномерно непрерывная функция $\mathcal{U}$ такие, что $\forall x(x \in x_0 \Delta x_1 \& \neg(x \in \mathcal{G}) \supset \mathrm{D}(\mathcal{U}(x), f_2 * f_1, x))$ (ср.[2], стр. 211).

С другой стороны существуют абсолютно непрерывные функции g_1 и g_2 типа А такие, что $\neg \forall a b (0 \leq a < b \leq 1 \supset \supset \exists x u (x \in a \Delta b \& \mathrm{D}(u, g_2 * g_1, x)))$.

Лемма 11. Пусть ψ и φ абсолютно непрерывные функции типа А такие, что ψ является неубывающей на $0 \Delta 1$ и $\forall x y(|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|)$. Тогда $\mathcal{Y}_1(\psi * \varphi)$.

Доказательство. Мы обозначим $f \rightleftharpoons \psi * \varphi$ и для любых S_σ -множества $\{H_k\}_k$ и равномерно непрерывной функции $\mathcal{U}$ - $\mathcal{L}(\{H_k\}_k, \mathcal{U})$ значит: ряд $\sum_k \langle\omega, f\rangle_{\llcorner} H_{k \lrcorner}$ сходится и $\forall x(x \in 0 \nabla 1 \& \neg(x \in \{H_k\}_k) \supset \mathrm{D}(\mathcal{U}(x), f, x))$.

1)(a) Ввиду равномерной непрерывности f и теоремы 1.3 из [4] существуют возрастающая последовательность НЧ $\{n_l\}_l$ и слово P такие, что

$$\forall l x y(|x - y| \leq \frac{1}{2^{n_l}} \supset |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^{l+4}}) \& (\mathrm{P} \mathrel{\mathtt{I}} \Lambda \supset \supset \langle\omega, f\rangle_{\llcorner} \frac{1}{2^{n_1}} \Delta 1_{\lrcorner} < \frac{1}{2^3}) \& (\neg(\mathrm{P} \mathrel{\mathtt{I}} \Lambda) \supset \langle\omega, f\rangle_{\llcorner} \frac{1}{2^{n_1}} \Delta 1_{\lrcorner} > \frac{1}{2^4}).$$

α) Если $\mathrm{P} \mathrel{\mathtt{I}} \Lambda$, мы определим $n_0 \rightleftharpoons 0$, $\forall k(H^1_k \rightleftharpoons \frac{1}{2^{n_k}} \Delta \frac{1}{2^{n_{k-1}}})$ и посредством $\mathcal{U}^1$ обозначим нулевую функцию.

β) Если $\neg(\mathrm{P} \mathrel{\mathtt{I}} \Lambda)$, мы согласно лемме 10, где

$x_0 \Delta x_1 \rightleftharpoons \frac{1}{2^{n_1}} \Delta 1$, $s \rightleftharpoons 2^4$, $t \rightleftharpoons 3$, построим S_6-множества $\{Q_k\}_k$ и $\mathcal{G}$ и равномерно непрерывную функцию $\mathcal{U}^1$ и определим

$$\forall k\,((H^1_{2k-1} \rightleftharpoons \frac{1}{2^{n_{k+1}}} \Delta \frac{1}{2^{n_k}}) \,\&\, (H^1_{2k} \rightleftharpoons Q_k)) .$$

В случаях α) и β) очевидно выполнено $\mathcal{L}(\{H^1_k\}_k, \mathcal{U}^1)$ и существует S-множество $\mathcal{G}^1$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^2}$ такое, что $\forall x\,(x \in \{H^1_k\}_k \supset f(x) \in \mathcal{G}^1)$.

б) Пусть n НЧ и пусть уже построены S_6-множество $\{H^n_k\}_k$, S-множество $\mathcal{G}^n$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{n+1}}$ и равномерно непрерывная функция $\mathcal{U}^n$ такие, что

$$\mathcal{L}(\{H^n_k\}_k, \mathcal{U}^n) \,\&\, \forall x\,(x \in \{H^n_k\}_k \supset f(x) \in \mathcal{G}^n) .$$

Тогда существуют НЧ k_n и дизъюнктные системы НЧ $\mathcal{C}_{n,1}$ и $\mathcal{C}_{n,2}$, для которых выполнено

$$\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \langle \omega, f \rangle \llcorner H^n_k \lrcorner < \frac{1}{2^{n+3}} \quad \text{и}$$

$$\forall k\,((1 \le k \le k_n \equiv (k \in \mathcal{C}_{n,1} \vee k \in \mathcal{C}_{n,2})) \,\&\, (k \in \mathcal{C}_{n,1} \supset \langle \omega, f \rangle \llcorner H^n_k \lrcorner < \frac{1}{k_n \cdot 2^{n+3}}) \,\&\, (k \in \mathcal{C}_{n,2} \supset \langle \omega, f \rangle \llcorner H^n_k \lrcorner > \frac{1}{k_n \cdot 2^{n+4}})) .$$

Для всякого НЧ k, $k \in \mathcal{C}_{n,2}$, мы согласно лемме 10, где $x_0 \Delta x_1 \rightleftharpoons H^n_k$, $s \rightleftharpoons 2^{n+4}$, $t \rightleftharpoons n + 3 + k_n$, получим S_6-множества $\{Q^{n,k}_\ell\}_\ell$ меры меньшей чем $|H^n_k|$ и $\mathcal{G}^{n,k}$ меры меньшей чем $\frac{1}{k_n \cdot 2^{n+3}}$, равномерно непрерывную функцию $\mathcal{U}^{n,k}$ и НЧ $q_{n,k}$, удовлетворяющие условиям перечисленным в лемме.

Существуют равномерно непрерывная функция $\mathcal{U}^{n+1}$ такая, что

$$\forall x\,((\neg \exists k\,(k \in \mathcal{C}_{n,2} \,\&\, x \in H^n_k) \supset \mathcal{U}^{n+1}(x) =$$

$= \mathfrak{A}^n(x)) \,\&\, \forall k (k \in \mathcal{C}_{n,2} \,\&\, \Im_\lambda (H_k^n) + \frac{1}{q_{n,k}} \leq x \leq$
$\leq \Im_n(H_k^n) - \frac{1}{q_{n,k}} \supset \mathfrak{A}^{n+1}(x) = \mathfrak{A}^{n,k}(x)))$,

S_6 -множество $\{H_k^{n+1}\}_k$, образованное сегментами H_k^n, $(k_n < k \vee k \in \mathcal{C}_{n,1})$, и $Q_\ell^{n,k}$, $k \in \mathcal{C}_{n,2} \,\&\, 1 \leq \ell$, и последовательность целых чисел $\{\lambda_k^n\}_k$ такую, что
$\forall k ((k_n < k \vee k \in \mathcal{C}_{n,1}) \supset H_{\lambda_k^n}^{n+1} \equiv H_k^n) \,\&\, (k \in \mathcal{C}_{n,2} \supset \lambda_k^n = 0))$.

Тогда $\mathcal{L}(\{H_k^{n+1}\}_k, \mathfrak{A}^{n+1}) \,\&\, \{H_k^{n+1}\}_k \subseteq \{H_k^n\}_k \,\&$

$$\& \sum_{(k_n < k \vee k \in \mathcal{C}_{n,1})} \langle \omega, f \rangle \llcorner H_k^n \lrcorner < \frac{1}{2^{n+2}} .$$

Можно построить S -множество $\mathcal{G}^{n+1}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{n+2}}$ такое, что $\forall x (x \in \{H_k^{n+1}\}_k \supset f(x) \in \mathcal{G}^{n+1})$.

в) Согласно замечанию 1 из [6] для всякого НЧ q существует S -множество $\mathcal{G}^q$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^q}$, для которого верно $\forall x (\neg\neg \exists n (q \leq n \,\&\, x \in \mathcal{G}^n) \equiv x \in \mathcal{G}^q)$.

2)(а) Для всяких НЧ n и k существует абсолютно непрерывная функция $g_{n,k}$ такая, что если $\lambda_k^n > 0$, то

$$\forall x (g_{n,k}(x) = f(\Im_\lambda(H_k^n)) + \frac{1}{|H_k^n|} \cdot (f(\Im_n(H_k^n)) -$$
$$- f(\Im_\lambda(H_k^n))) \cdot (max(min(x, \Im_n(H_k^n)), \Im_\lambda(H_k^n)) -$$
$$- \Im_\lambda(H_k^n))) ,$$

а если $\lambda_k^n = 0$, то $g_{n,k}(0) = f(\Im_\lambda(H_k^n))$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$

$$\exists u (D(u, g_{n,k}, x) \,\&\, ((x \in \{Q_\ell^{n,k}\}_\ell \vee \neg(x \in H_k^n)) \supset$$
$$\supset u = 0) \,\&\, (x \in H_k^n \,\&\, \neg(x \in \{Q_\ell^{n,k}\}_\ell) \supset u =$$

$$= \frac{1}{x_{n,k}} \cdot (f(\partial_m(H_k^n)) - f(\partial_\lambda(H_k^n))))) ,$$

где $|H_k^n| - x_{n,k}$ мера $\{Q_\ell^{n,k}\}_\ell$. Функция $g_{n,k}$ не может не быть монотонной и $g_{n,k}(\partial_\lambda(H_k^n)) = f(\partial_\lambda(H_k^n))$ & $g_{n,k}(\partial_m(H_k^n)) = f(\partial_m(H_k^n))$.

б) Пусть q и ℓ НЧ. Мы построим последовательности ЦЧ $\{s_k\}_k$ и абсолютно непрерывных функций $\{\varkappa_k\}_k$. Мы определим $s_1 \rightleftharpoons \lambda_\ell^q$ и $\varkappa_1 \rightleftharpoons g_{q,\ell}$. Тогда $(s_1 > 0 \supset H_\ell^q \underset{c}{=} H_{s_1}^{q+1})$. Пусть k НЧ и пусть уже построены ЦЧ s_k и функция $\varkappa_k$ и пусть $(s_k > 0 \supset H_\ell^q \underset{c}{=}$ $\underset{c}{=} H_{s_k}^{q+k})$. Мы определим $s_{k+1} \rightleftharpoons 0$ и $\varkappa_{k+1} \rightleftharpoons \varkappa_k$, если $s_k = 0$, а $s_{k+1} \rightleftharpoons \lambda_{s_k}^{q+k}$ и $\varkappa_{k+1} \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons g_{q+k, s_k}$, если $s_k > 0$.

Тогда $\forall k (\exists u (Var(u, \varkappa_k - \varkappa_{k+1}, 0 \Delta 1)$ & $u <$ $< \frac{1}{2^{q+k+1}})$ & $\varkappa_k(0) = f(\partial_\lambda(H_\ell^q)))$ и следовательно, существует абсолютно непрерывная функция f_ℓ^q, являющаяся пределом последовательности $\{\varkappa_k\}_k$ Ясно, что f_ℓ^q не может не быть монотонной и что

$$f_\ell^q(\partial_\lambda(H_\ell^q)) = f(\partial_\lambda(H_\ell^q)) \& f_\ell^q(\partial_m(H_\ell^q)) = f(\partial_m(H_\ell^q)) .$$

в) Для всякого НЧ q существует согласно лемме 9 абсолютно непрерывная функция f^q такая, что

$$\forall x ((\neg \exists k (\partial_\lambda(H_k^q) < x < \partial_m(H_k^q)) \supset f^q(x) =$$
$$= f(x)) \& \forall k (x \in H_k^q \supset f^q(x) = f_k^q(x))) .$$

Тогда выполнено

$$\mathcal{Y}_1(\psi * \varphi, \{f^q\}_q, \{\{H_k^q\}_k\}_q, \{\varphi^q\}_q) .$$

Доказательство теоремы 1. Теорема является непосредственным следствием лемм 3, 6 и 11 и теоремы 3.

Литература

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York, 1937.

[2] BARY N.: Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues I, Math.Annalen, 103(1930), 185-248.

[3] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды Мат.инст. им.В.А. Стеклова LXVII (1962),295-361.

[4] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, там же, стр. 385-457.

[5] ДЕМУТ О.: Пространства L_R и S в конструктивной математике, Comment.Math. Univ. Carolinae 10(1969),261-284.

[6] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969),463-92.

[7] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 11(1970),667-90.

[8] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math. Univ.Carolinae 11(1970),705-726.

[9] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции, Comment. Math.Univ.Carolinae 12(1971),587-610.

[10] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 12(1971),423-51.

[11] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment.Math. Univ.Carolinae 12(1971), 697-721.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, Praha 8
Československo

(Oblatum 6.9.1971)