Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

12,4 (1971)

О СКОЛЬЗЯЩИХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ 1-го, 2-го и 3-го ПОРЯДКОВ РЕБРИСТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ, ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЙ ПАРАЛЛЕЛЬЮ

Н.Г. ПЕРЛОВА, Ростов-на-Дону

Бесконечно малые изгибания ребристых поверхностей вращения впервые рассматривал С.Э. Кон-Фоссен [1], а позже Б.А. Вублик [3], В.И. Шимко [4], Г.Н. Чернис [5].

В настоящей работе изучаются бесконечно малые изгибания ребристых поверхностей вращения, при которых граничная параллель поверхности скользит по коаксиальному с ней конусу, плоскости или цилиндру.

1. Рассмотрим ребристую поверхность вращения $\bar{r} = u\bar{e} + r(u)\bar{a}(v)$, где

$$r(u) = \begin{cases} \alpha_1 u, & 0 \le u \le a_1, \\ \alpha_2(u-a_1) + a_1\alpha_1, & a_1 \le u \le a_1 + a_2, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \alpha_m\left(u - \sum\limits_{i=1}^{m-1} a_i\right) + \sum\limits_{i=1}^{m-1} a_i\alpha_i, & \sum\limits_{i=1}^{m-1} a_i \le u \le \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = a, \ r(a) > 0, \end{cases}$$

и назовем ее E_m.

Как следует из [6], бесконечно малое изгибание 1-го порядка поверхности E_m определяется векторным полем

AMS, Primary 53A05 Ref. Ž. 3.934.14

$$
\underset{(1)}{\bar{z}}_k(u,v)=\begin{cases}
\overset{(1)}{\underset{(1)}{\bar{z}}}_k(u,v), & u\in[0,a_1],\\[2ex]
\overset{(2)}{\underset{(1)}{\bar{z}}}_k(u,v), & u\in[a_1,a_2+a_2],\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\overset{(m)}{\underset{(1)}{\bar{z}}}_k(u,v), & u\in\left[\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i,\ \sum\limits_{i=1}^{m}a_i\right]
\end{cases}
$$

при натуральном $k \geq 2$, где

$$
\overset{(j)}{\underset{(1)}{\bar{z}}}_k(u,v)=[\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k(u)e^{ikv}+\overset{(j)}{\underset{(1)}{\bar{\varphi}}}_k(u)e^{-ikv}]\bar{e}+
$$

$$
+[\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k(u)e^{ikv}+\overset{(j)}{\underset{(1)}{\bar{\psi}}}_k(u)e^{-ikv}]\bar{a}(v)+
$$

$$
+[\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k(u)e^{ikv}+\overset{(j)}{\underset{(1)}{\bar{\chi}}}_k(u)e^{-ikv}]\bar{a}'(v),
$$

$$
(1)\quad\begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k(u)=-\alpha_j\dfrac{(k^2-1)}{ik}\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k(u)-\dfrac{1}{ik}r_j(u)\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}'_k=\\[2ex]
\qquad\qquad=ik[\overset{(j)}{\underset{(1)}{c}}(k)\alpha_j(u-\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i)+\sum\limits_{i=1}^{j-1}\overset{(i)}{\underset{(1)}{c}}(k)a_i\alpha_i],\\[2ex]
\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k(u)=-ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k(u),\\[2ex]
\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k(u)=\overset{(j)}{\underset{(1)}{c}}(k)(u-\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i)+\sum\limits_{i=1}^{j-1}\overset{(i)}{\underset{(1)}{c}}(k)a_i,
\end{cases}
$$

$$
(2)\quad\begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(1)}{c}}(k)=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_i\alpha_i}\sum\limits_{i=1}^{j-1}\overset{(i)}{\underset{(1)}{c}}(k)a_i[(k^2-1)(\alpha_i-\alpha_j)+\alpha_i]\ (j=2,3,\dots,m),\\[2ex]
\overset{(1)}{\underset{(1)}{c}}(k)=1.
\end{cases}
$$

Для того, чтобы граничная параллель $u = a$ поверхности E_m при бесконечно малом изгибании $\underset{(1)}{\bar{z}}_k$ скользила по конусу, плоскости или цилиндру с нормалью $\bar{m}(v) = \cos\eta\,\bar{e}+$

$+ \sin \eta\, \bar{a}(v)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\underset{(1)}{\bar{z}}{}_k \cdot \bar{m}|_{u=a} = 0$$

или, что то же,

$$(3) \qquad \overset{(n)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}_k(a) \cos \eta + \overset{(n)}{\underset{(1)}{\psi}}{}_k(a) \sin \eta = 0 \,.$$

Отсюда и из формул (1) следует

Теорема 1. Для того, чтобы односвязная ребристая поверхность вращения E_n допускала нетривиальное бесконечно малое изгибание 1-го порядка, при котором граничная параллель поверхности скользит по коаксиальному с нею конусу, плоскости или цилиндру с нормалью $\bar{m}(v) = \cos \eta\, \bar{e} + \sin \eta\, \bar{a}(v)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \overset{(i)}{\underset{(1)}{c}}(k) a_i (\alpha_i \cos \eta - \sin \eta) = 0$$

имело натуральный корень $k \geq 2$.

Нетрудно доказать существование при любом $n \geq 2$ поверхности E_n ,удовлетворяющей условию теоремы 1. Этим однако мы заниматься не будем, т.к. существование поверхностей E_n ,допускающих скользящие бесконечно малые изгибания 1-го порядка, несколько иным путем установила Г.Н. Чернис [5]. Перейдем поэтому к исследованию бесконечно малых изгибаний 2-го порядка таких поверхностей.

2. Продолжение 2-го порядка бесконечно малого изгибания $\underset{(1)}{\bar{z}}{}_k$ поверхности E_n определяется векторным полем

$$\overset{=}{\underset{(2)}{x}}_k(u,v) = \begin{cases} \overset{(1)}{\overset{=}{\underset{(2)}{x}}}_k(u,v), & u \in [0, a_1], \\ \overset{(2)}{\overset{=}{\underset{(2)}{x}}}_k(u,v), & u \in [a_1, a_1+a_2], \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \overset{(n)}{\overset{=}{\underset{(2)}{x}}}_k(u,v), & u \in [\sum_{i=1}^{n-1} a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i], \end{cases}$$

где

$$\overset{(j)}{\overset{=}{\underset{(2)}{x}}}_k(u,v) = [\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}_{2k}(u)e^{2ikv} + \overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}_0(u) + \overset{(j)}{\underset{(2)}{\bar{\varphi}}}_{2k}(u)e^{-2ikv}]\bar{e} +$$

$$+ [\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k}(u)e^{2ikv} + \overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_0(u) + \overset{(j)}{\underset{(2)}{\bar{\psi}}}_{2k}(u)e^{-2ikv}]\bar{a}(v) +$$

$$+ [\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k}(u)e^{2ikv} + \overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_0(u) + \overset{(j)}{\underset{(2)}{\bar{\chi}}}_{2k}(u)e^{-2ikv}]\bar{a}'(v),$$

$$(5)\begin{cases} \overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}_{2k}(u) = \dfrac{\alpha_j}{2\kappa_j(u)}[-k^2\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(u) + (k^2-1)^2\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k(u)] - \\ \qquad - \alpha_j\dfrac{(4k^2-1)}{2ik}\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k}(u) - \dfrac{1}{2ik}\kappa_j(u)\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}{}'_{2k} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2}[-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}'_k \cdot \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k(u) + (k^2-1)\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}'_k \cdot \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k(u)], \\ \overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k}(u) = -\dfrac{1}{2\kappa_j(u)}[-k^2\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(u) + (k^2-1)^2\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k(u)] - 2ik\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k}(u), \\ \overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k}(u) = \overset{(j)}{\underset{(2)}{C}}_{2k}(u - \sum_{i=1}^{j-1} a_i) + \sum_{i=1}^{j-1}\overset{(i)}{\underset{(2)}{C}}_{2k} a_i, \end{cases}$$

$$(6)\quad \overset{(j)}{\underset{(2)}{C}}_{2k} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i\alpha_i}\sum_{i=1}^{j-1}\overset{(i)}{\underset{(2)}{C}}_{2k} a_i[(4k^2-1)(\alpha_i - \alpha_j) + \alpha_i] +$$

$$+ \frac{ik}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i\alpha_i}\sum_{s=2}^{j}[-\frac{(\alpha_s - \alpha_{s-1})}{\sum_{i=1}^{s-1} a_i\alpha_i}k^2\overset{(s)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(\sum_{i=1}^{s-1} a_i) - (\overset{(s)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}'_k - \overset{(s-1)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}'_k)\overset{(s)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k(\sum_{i=1}^{s-1} a_i)]$$

$(j = 2, 3, \ldots, n)$,

$\overset{(1)}{\underset{(2)}{C}}_{2k}$ - произвольная постоянная;

$$
(7)\quad \begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}{}_0(u) = \dfrac{\alpha_j}{r_j(u)}\left[-k^2 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(u) + (k^2-1)^2 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k(u)\right] + \\
\quad + \displaystyle\sum_{s=2}^{j} \dfrac{(\alpha_s - \alpha_{s-1})}{\sum_{i=1}^{s-1} a_i \alpha_i}\left[k^2 \overset{(s)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k\Big(\sum_{i=1}^{s-1} a_i\Big) - (k^2-1)^2 \overset{(s)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k\Big(\sum_{i=1}^{s-1} a_i\Big)\right] - \\
\quad - \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}'^2_k (k^2\alpha_j^2 + k^2 + 1)u + \displaystyle\sum_{s=2}^{j}\Big(\sum_{i=1}^{s-1} a_i\Big)\Big[\overset{(s)}{\underset{(1)}{\chi}}{}'^2_k (k^2\alpha_s^2 + \\
\quad + k^2 + 1) - \overset{(s-1)}{\underset{(1)}{\chi}}{}'^2_k (k^2\alpha_{s-1}^2 + k^2 + 1) + \overset{(1)}{\underset{(2)}{c}}{}_0 \quad , \\
\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}{}_0(u) = -\dfrac{1}{r_j(u)}\left[-k^2 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}^2_k(u) + (k^2-1)^2 \overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}^2_k(u)\right], \\
\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}{}_0(u) = r_j(u)\, \overset{(0)}{\underset{(2)}{c}}{}_0 \quad ,
\end{cases}
$$

$\overset{(0)}{\underset{(2)}{c}}{}_0$ и $\overset{(1)}{\underset{(2)}{c}}{}_0$ - произвольные постоянные.

Для того, чтобы при бесконечно малом изгибании 2-го порядка $\underset{(2)}{\bar{z}}{}_k$ поверхности E_m ее граничная параллель $u = a$ скользила по конусу, плоскости или цилиндру с нормалью $\bar{m}(v)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$
\underset{(2)}{\bar{z}}{}_k \cdot \bar{m}\big|_{u=a} = 0 ,
$$

которое равносильно двум следующим:

$$
(8)\quad \overset{(m)}{\underset{(2)}{\varphi}}{}_{(2-2h)k}(a)\cos\eta + \overset{(m)}{\underset{(2)}{\psi}}{}_{(2-2h)k}(a)\sin\eta = 0 \quad (h = 0, 1) .
$$

При $h = 1$ и при дополнительном предположении $\cos\eta \neq 0$ (т.е. случай скольжения по цилиндру исключается) условие (8) может быть выполнено за счёт выбора постоянной $\overset{(1)}{\underset{(2)}{c}}{}_0$, входящей аддитивно в выражение $\overset{(m)}{\underset{(2)}{\varphi}}{}_0(a)$.

При $k = 0$ условие (8), как следует из формул (5) - (6), представляет собой линейное неоднородное уравнение относительно постоянной $\overset{(1)}{\underset{(2)}{c}}{}_{2k}$, коэффициент при которой равен

$$(9) \qquad 2ik \sum_{i=1}^{n} \overset{(i)}{\underset{(1)}{c}}(2k) a_i (\alpha_i \cos\eta - \sin\eta) .$$

Если рассматриваемое нами значение k не является корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{(i)}{\underset{(1)}{c}}(2k) a_i (\alpha_i \cos\eta - \sin\eta) = 0 ,$$

т.е. если поверхность E_n одновременно с бесконечно малым изгибанием скольжения $\underset{(1)}{\bar{z}}{}_k$ 1-го порядка не допускает бесконечно малого изгибания скольжения $\underset{(1)}{\bar{z}}{}_{2k}$ 1-го порядка, то условие (8) при $k = 0$ может быть выполнено за счет выбора постоянной $\overset{(1)}{\underset{(2)}{c}}{}_{2k}$. Так как поверхность E_n может допускать лишь конечное число линейно независимых скользящих бесконечно малых изгибаний (степень уравнения (4) относительно $k^2 - 1$ не выше $n - 1$), то по крайней мере одно ее бесконечно малое изгибание $\underset{(1)}{\bar{z}}{}_k$ (например, соответствующее наибольшему корню уравнения (4)) обладает указанным свойством. Таким образом доказана

<u>Теорема 2</u>. Если односвязная ребристая поверхность вращения E_n допускает бесконечно малое изгибание скольжения по конусу или плоскости 1-го порядка, то она допускает бесконечно малое изгибание и 2-го порядка, обладающее тем же свойством.

В то же время справедлива

<u>Теорема 3</u>. Всякая односвязная ребристая поверхность

вращения обладает жесткостью 2-го порядка в отношении бесконечно малых изгибаний, при которых ее граничная параллель скользит по поверхности коаксиального цилиндра.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим бесконечно малое изгибание скольжения по цилиндру, 1-го порядка, общего вида

$$(10) \qquad \underset{(1)}{\bar z} = \underset{(1)}{\bar z}_0 + \underset{(1)}{\bar z}_1 + \sum_{k \geq 2} \underset{(1)}{\bar z}_k ,$$

где суммирование ведется по тем значениям $k \geq 2$ которые являются корнями уравнения (3) при $\cos\eta = 0$. В этом случае условие (8) при $\cos\eta = 0$ имеет вид [1] :

$$(11) \qquad \frac{1}{\varkappa_m(a)} \left[-\sum_{k \geq 1} k^2 \underset{(1)}{\overset{(m)}{\varphi}}{}^2_k (a) + \frac{1}{2} C_0^2 \varkappa_m^2 (a) \right] = 0 .$$

Предположим, что условие (11) выполняется. Тогда $\underset{(1)}{\overset{(m)}{\varphi}}_k (a) = 0$ при $k \geq 1$. Так как при этом $\underset{(1)}{\overset{(m)}{\chi}}_k (a) = 0$, то из (1_1) получаем:

$$\underset{(1)}{\overset{(m)}{\chi}}{}'_k = 0 , \quad \underset{(1)}{\overset{(m)}{\varphi}}{}'_k = 0 ,$$

а потому

$$\underset{(1)}{\overset{(m-1)}{\varphi}}_k \Big(\sum_{i=1}^{m-1} a_i \Big) = 0 , \quad \underset{(1)}{\overset{(m-1)}{\chi}}_k \Big(\sum_{i=1}^{m-1} a_i \Big) = 0 .$$

Повторяя рассуждения, после m шагов получим, что

$$\underset{(1)}{\varphi}_k (u) \equiv 0 , \quad \underset{(1)}{\chi}_k (u) \equiv 0$$

при $k \geq 1$.

Таким образом предположение о нежесткости 2-го порядка привело к заключению, что изгибающее поле 1-го порядка $\underset{(1)}{\bar z}$ тривиально. Следовательно, поверхность E_m обладает жесткостью 2-го порядка в отношении изгибаний скольжения по цилиндру.

Перейдем к исследованию бесконечно малых изгибаний скольжения по конусу или плоскости 3-го порядка.

3. Продолжение 3-го порядка бесконечно малого изгибания $\underset{(1)}{\bar{z}}_k$ поверхности E_m определяется векторным полем

$$\underset{(3)}{\bar{z}}_k(u,v)=\begin{cases} \overset{(1)}{\underset{(3)}{\bar{z}}}_k(u,v), & u\in[0,a_1],\\ \overset{(2)}{\underset{(3)}{\bar{z}}}_k(u,v), & u\in[a_1,a_1+a_2],\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ \overset{(n)}{\underset{(3)}{\bar{z}}}_k(u,v), & u\in[\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i], \end{cases}$$

где

$$\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar{z}}}_k(u,v)=[\overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}_{3k}(u)e^{3ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}_k(u)e^{ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar{\varphi}}}_k(u)e^{-ikv}+$$
$$+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar{\varphi}}}_{3k}(u)e^{-3ikv}]\bar{e}+[\overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}_{3k}(u)e^{3ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}_k(u)e^{ikv}+$$
$$+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar{\psi}}}_k(u)e^{-ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar{\psi}}}_{3k}(u)e^{-3ikv}]\bar{a}(v)+[\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{3k}(u)e^{3ikv}+$$
$$+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_k(u)e^{ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar{\chi}}}_k(u)e^{-ikv}+\overset{(j)}{\underset{(3)}{\bar{\chi}}}_{3k}(u)e^{-3ikv}]\bar{a}'(v),$$

$$\begin{cases} \overset{(j)}{\underset{(3)}{\varphi}}_{(3-2h)k}(u)=-\dfrac{\alpha_j}{r_j(u)}\overset{(j)}{\underset{(3)}{R}}_{(3-2h)k}(u)-\\ \quad-\alpha_j\dfrac{[(3-2h)^2k^2-1]}{(3-2h)ik}\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}(u)-\dfrac{r_j(u)}{(3-2h)ik}\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}(u)+\\ \quad+\dfrac{1}{(3-2h)ik}\overset{(j)}{\underset{(3)}{Q}}_{(3-2h)k}(u), \\ \overset{(j)}{\underset{(3)}{\psi}}_{(3-2h)k}(u)=\dfrac{1}{r_j(u)}\overset{(j)}{\underset{(3)}{R}}_{(3-2h)k}(u)-(3-2h)ik\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}(u), \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\underset{(3)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}(u) = {} & \frac{3(3-2h)^{-1}}{2}\Big\{\alpha_j^2 k^4 \Big[\sum_{i=1}^{j-1}\Big(\underset{(1)}{\overset{(i)}{c}}(k) - {} \\
& - \underset{(1)}{\overset{(j)}{c}}(k)\Big) a_i \alpha_i\Big]^2 + (k^2-1)^2 \Big[\sum_{i=1}^{j-1}\Big(\alpha_j \underset{(1)}{\overset{(i)}{c}}(k) - {} \\
& - \alpha_i \underset{(1)}{\overset{(j)}{c}}(k)\Big) a_i\Big]^2\Big\}\Big\{\frac{1}{\alpha_j^3 r_j(u)} \underset{(1)}{\overset{(j)}{c}}(k)(k^2\alpha_j^2 + k^2 - 1) + {} \\
& + \frac{1}{3\alpha_j^3 r_j^2(u)}\Big[k^2\alpha_j^2 \sum_{i=1}^{j-1}\Big(\underset{(1)}{\overset{(i)}{c}}(k) - \underset{(1)}{\overset{(j)}{c}}(k)\Big) a_i \alpha_i + {} \\
& + (k^2-1)\sum_{i=1}^{j-1}\Big(\alpha_j \underset{(1)}{\overset{(i)}{c}}(k) - \alpha_i \underset{(1)}{\overset{(j)}{c}}(k)\Big) a_i\Big]\Big\} + {} \\
& + \underset{(3)}{\overset{(j)}{c}}{}_{(3-2h)k}\Big(u - \sum_{i=1}^{j-1} a_i\Big) + \sum_{i=1}^{j-1} \underset{(3)}{\overset{(i)}{c}}{}_{(3-2h)k}\, a_i \quad ,
\end{aligned}
\right.
\tag{12}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\underset{(3)}{\overset{(j)}{c}}{}_{(3-2h)k} = {} & \frac{1}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum_{i=1}^{j-1} \underset{(3)}{\overset{(i)}{c}}{}_{(3-2h)k}\, a_i \Big\{\big[(3-2h)^2 k^2 - {} \\
& - 1\big](\alpha_i - \alpha_j) + \alpha_i\Big\} - {} \\
& - \frac{(3-2h)ik}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum_{i=2}^{j} \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})\cdot}{\sum_{s=1}^{i-1} a_s \alpha_s} \underset{(3)}{\overset{(i)}{R}}{}_{(3-2h)k}\Big(\sum_{s=1}^{i-1} a_s\Big) - {} \\
& - \frac{[(3-2h)^2 k^2 - 1]}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum_{i=2}^{j} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sum_{s=2}^{i-1} \Big\{\Big[\underset{(3)}{\overset{(s)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\Big]\Big(\sum_{i=1}^{s} a_i\Big) - {} \\
& - \Big[\underset{(3)}{\overset{(s)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\Big]\Big(\sum_{i=1}^{s-1} a_i\Big)\Big\} + \sum_{i=2}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{i-1} a_s \alpha_s}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum_{s=2}^{i-1} \Big\{\Big[\underset{(3)}{\overset{(i-1)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\Big]' \cdot \\
& \qquad \cdot \Big(\sum_{s=1}^{i-1} a_s\Big) - \Big[\underset{(3)}{\overset{(i)}{\chi}}{}_{(3-2h)k}\Big]' \Big(\sum_{s=1}^{i-1} a_s\Big)\Big\} - {} \\
& - \frac{1}{\sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum_{i=2}^{j} \Big\{\underset{(3)}{\overset{(i-1)}{Q}}{}_{(3-2h)k}\Big(\sum_{s=1}^{i-1} a_s\Big) - \underset{(3)}{\overset{(i)}{Q}}{}_{(3-2h)k}\Big(\sum_{s=1}^{i-1} a_s\Big)\Big\} \quad ,
\end{aligned}
\right.
\tag{13}
$$

$$
(14)\begin{cases}
\overset{(j)}{\underset{(3)}{R}}_{3k}(u)=2k^2\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}_{2k}-(ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k)(2ik\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k}-\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k}),\\[2ex]
\overset{(j)}{\underset{(3)}{R}}_{k}(u)=2k^2\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}_{2k}-(ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k)(2ik\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k}-\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k})+\\[1ex]
\qquad+(ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k)\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_0,\\[2ex]
\overset{(j)}{\underset{(3)}{Q}}_{3k}(u)=-2ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}'_k\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}_{2k}-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}{}'_k(2ik\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k}-\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k})-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}'\times\\[1ex]
\qquad\times(2ik\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k}+\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k})-ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}{}'_{2k}-(ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k)\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}{}'_{2k},\\[2ex]
\overset{(j)}{\underset{(3)}{Q}}_{k}(u)=2ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}'_k\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}_{2k}+\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}{}'_k(2ik\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k}-\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k})+\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}{}'_k\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_0-\\[1ex]
\qquad-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}'_k(2ik\overset{(j)}{\underset{(2)}{\chi}}_{2k}+\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_{2k})-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}{}'_k\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}_0-ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}{}'_{2k}-\\[1ex]
\qquad-ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\varphi}}_k\overset{(j)}{\underset{(2)}{\varphi}}{}'_0-(ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k)\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}{}'_{2k}-(ik\overset{(j)}{\underset{(1)}{\psi}}_k-\overset{(j)}{\underset{(1)}{\chi}}_k)\overset{(j)}{\underset{(2)}{\psi}}{}'_0,
\end{cases}
$$

через $[\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}]$ обозначена нелинейная часть функции $\overset{(j)}{\underset{(3)}{\chi}}_{(3-2h)k}$; $\overset{(1)}{\underset{(3)}{c}}_{(3-2h)k}$ $(h=0,1)$ – прозвольные постоянные.

Предположим, что поверхность E_n допускает бесконечно малое изгибание 2-го порядка $\underset{(2)}{\bar{z}}_k$ скольжения по конусу или плоскости с нормалью $\bar{m}(v)$. Для того, чтобы при бесконечно малом изгибании $\underset{(3)}{\bar{z}}_k$ граничная параллель $u=a$

скользила по конусу или плоскости с нормалью $\bar{n}(v)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\underset{(3)}{\bar{z}}_k \cdot \bar{n}|_{u=a} = 0 ,$$

которое равносильно двум следующим:

$$(15)\quad \overset{(n)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_{(3-2h)k}(a)\cos\eta + \overset{(n)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}(a)\sin\eta = 0 \quad (h=0,1).$$

Подставляя в (15) выражения $\overset{(n)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_{(3-2h)k}$ и $\overset{(n)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_{(3-2h)k}$ из (12), получим при каждом h линейное неоднородное уравнение относительно постоянной $\overset{(1)}{\underset{(3)}{c}}{}_{(3-2h)k}$, коэффициент при которой равен

$$(16)\quad (3-2h)ik\sum_{i=1}^{n}\overset{(i)}{\underset{(1)}{c}}[(3-2h)k]\,a_i(\alpha_i\cos\eta-\sin\eta) .$$

При $h=0$ выражение (16) отлично от нуля, если рассматриваемое нами значение k не является корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\overset{(i)}{\underset{(1)}{c}}(3k)\,a_i(\alpha_i\cos\eta-\sin\eta) = 0 .$$

В этом случае условие (15) при $h=0$ может быть выполнено за счет выбора постоянной $\overset{(1)}{\underset{(3)}{c}}{}_{3k}$.

При $h=1$ выражение (16) заведомо равно нулю, т.к. k удовлетворяет уравнению (4). Условие (15) при $h=1$ не содержит поэтому произвольной постоянной и представляет собой соотношение между параметрами поверхности E_n, необходимое для того, чтобы скользящее бесконечно малое изгибание $\underset{(2)}{\bar{z}}_k$ 2-го порядка допускало продолжение в скользящее бесконечно малое изгибание $\underset{(3)}{\bar{z}}_k$ 3-го порядка.

Таким образом доказана

<u>Теорема 4</u>. Если односвязная ребристая поверхность вращения E_n допускает бесконечно малое изгибание $\underset{(2)}{\bar{z}}_k$ 2-го порядка, при котором граничная параллель поверхности скользит

по конусу или плоскости с нормалью $\bar{m}(v) = \cos\eta\,\bar{e} +$
$+ \sin\eta\,\bar{a}(v)$, то для того, чтобы это изгибание можно было продолжить в бесконечно малое изгибание 3-го порядка, обладающее тем же свойством, необходимо, а в случае, когда k не является корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{(i)}{\underset{(1)}{c}}(3k)a_i(\alpha_i\cos\eta - \sin\eta) = 0 ,$$

и достаточно, чтобы k удовлетворяло уравнению

$$\overset{(n)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_k(a)\cos\eta + \overset{(n)}{\underset{(3)}{\psi}}{}_k(a)\sin\eta = 0$$

(не содержащему произвольной постоянной).

4. Естественно возникает вопрос, существуют ли поверхности E_n , удовлетворяющие условиям теоремы 4 и, следовательно, допускающие скользящие бесконечно малые изгибания 3-го порядка.

На этот вопрос отчасти дает ответ

<u>Теорема 5</u>. Существует и притом выпуклая ребристая поверхность вращения E_2 , допускающая бесконечно малое изгибание 3-го порядка, при котором ее граничная параллель скользит в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим однопараметрическое семейство поверхностей $E_2(\alpha_2)$ с меридианами вида

$$r = \begin{cases} u, & 0 \le u \le 1, \\ \alpha_2(u-1)+1, & 1 \le u \le 1+a_2,\ 0 < a_2 = -\dfrac{1}{\alpha_2(4-3\alpha_2)} < -\dfrac{1}{\alpha_2}. \end{cases}$$

Единственное скользящее бесконечно малое изгибание $\underset{(1)}{\tilde{z}}{}_2$ 1-го порядка доставляют поверхности семейства следующие функции:

$$
(17)\begin{cases}
\overset{(1)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}_2(u) = 2iu, \\[2ex]
\overset{(1)}{\underset{(1)}{\psi}}{}_2(u) = -2iu, \\[2ex]
\overset{(1)}{\underset{(1)}{\chi}}{}_2(u) = u,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\overset{(2)}{\underset{(1)}{\varphi}}{}_2(u) = 2i[(4-3\alpha_2)\alpha_2(u-1)+1], \\[2ex]
\overset{(2)}{\underset{(1)}{\psi}}{}_2(u) = -2i[(4-3\alpha_2)(u-1)+1], \\[2ex]
\overset{(2)}{\underset{(1)}{\chi}}{}_2(u) = (4-3\alpha_2)(u-1)+1.
\end{cases}
$$

Скользящее бесконечно малое изгибание $\underset{(2)}{\bar{z}}{}_2$ 2-го порядка, являющееся продолжением изгибания $\underset{(1)}{\bar{z}}{}_2$, определяется функциями:

$$
\begin{cases}
\overset{(1)}{\underset{(2)}{\varphi}}{}_4(u) = \frac{1}{2}(3\alpha_2^2+7\alpha_2+12)u, \\[2ex]
\overset{(1)}{\underset{(2)}{\psi}}{}_4(u) = -\frac{1}{2}(3\alpha_2^2+7\alpha_2+5)u, \\[2ex]
\overset{(1)}{\underset{(2)}{\chi}}{}_4(u) = -\frac{1}{8}(3\alpha_2-5)(4+\alpha_2)iu,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\overset{(1)}{\underset{(2)}{\varphi}}{}_0(u) = 16u + \overset{(1)}{\underset{(2)}{c}}{}_0, \\[2ex]
\overset{(1)}{\underset{(2)}{\psi}}{}_0(u) = -25u, \\[2ex]
\overset{(1)}{\underset{(2)}{\chi}}{}_0(u) = 0,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\overset{(2)}{\underset{(2)}{\varphi}}{}_4(u) = \frac{\alpha_2}{2[\alpha_2(u-1)+1]}\{16[(4-3\alpha_2)\alpha_2(u-1)+1]^2 + \\[1ex]
\quad + 9[(4-3\alpha_2)(u-1)+1]^2\} + \frac{15}{32}\alpha_2(3\alpha_2-5)[5\alpha_2(4-3\alpha_2)(u-1) + \\[1ex]
\quad + \alpha_2 + 4] + \frac{5}{32}\alpha_2(3\alpha_2-5)(4-3\alpha_2)[\alpha_2(u-1)+1] + \\[1ex]
\quad + \frac{1}{2}\{4\alpha_2(4-3\alpha_2)[(4-3\alpha_2)\alpha_2(u-1)+1] + 3(4-3\alpha_2)\times \\[1ex]
\quad \times [(4-3\alpha_2)(u-1)+1]\},
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\overset{(2)}{\underset{(2)}{\psi}}_4(u) = -\dfrac{1}{2[\alpha_2(u-1)+1]}\{16[(4-3\alpha_2(u-1)+1]^2 + \\
\quad + 9[(4-3\alpha_2)(u-1)+1]^2\} - \dfrac{1}{2}(3\alpha_2-5)[5\alpha_2(4-3\alpha_2)\times \\
\quad \times(u-1)+\alpha_2+4], \\
\overset{(2)}{\underset{(2)}{\chi}}_4(u) = -\dfrac{i}{8}(3\alpha_2-5)[5\alpha_2(4-3\alpha_2)(u-1)+\alpha_2+4],
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\overset{(2)}{\underset{(2)}{\varphi}}_0(u) = \dfrac{\alpha_2}{[\alpha_2(u-1)+1]}\{16[(4-3\alpha_2)\alpha_2(u-1)+1]^2 + \\
\quad + 9[(4-3\alpha_2)\quad(u-1)+1]^2\} - (4-3\alpha_2)^2(4\alpha_2^2+5)(u-1) + \\
\quad + 16 - 25\alpha_2 + \overset{(1)}{\underset{(2)}{c}}{}_0, \\
\overset{(2)}{\underset{(2)}{\psi}}(u) = -\dfrac{1}{[\alpha_2(u-1)+1]}\{16[(4-3\alpha_2)\alpha_2(u-1)+1]^2 + \\
\quad + 9[(4-3\alpha_2)(u-1)+1]^2\}, \\
\overset{(2)}{\underset{(2)}{\chi}}_0(u) = 0.
\end{cases}
$$

Так как скользящее бесконечно малое изгибание $\underset{(1)}{\tilde{z}}{}_2$ 1-го порядка поверхности E_2 единственно, то $k = 2$ не является корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{2} \overset{(1)}{\underset{(1)}{c}}(3k)\, a_i\, \alpha_i = 0 .$$

Следовательно, по теореме 4 для того, чтобы скользящее бесконечно малое изгибание $\underset{(2)}{\tilde{z}}{}_2$ 2-го порядка можно было продолжить в скользящее бесконечно малое изгибание 3-го порядка, необходимо и достаточно выполнение условия

(18) $$\overset{(2)}{\underset{(3)}{\varphi}}{}_2(1+a_2) = 0 .$$

Представим условие (18) в развернутом виде, имея цель сделать заключение о возможности его выполнения.

Предварительно подставим в формулу (12_1) при $j = m$, $n = 1$ выражения $\underset{(3)}{\overset{(m)}{R}}_k(u)$ и $\underset{(3)}{\overset{(m)}{Q}}_k(u)$ из (14). Учитывая условия $\underset{(1)}{\overset{(m)}{\Phi}}_k(a) = 0$ и $\underset{(2)}{\overset{(m)}{\Phi}}_{2k}(a) = 0$, получим, что условие

$$\underset{(3)}{\overset{(m)}{\Phi}}_k(a) = 0$$

имеет вид

$$(19)\quad -\alpha_m \frac{(k^2-1)}{ik} \underset{(3)}{\overset{(m)}{\chi}}_k(a) - \frac{1}{ik} \varkappa_m(a) \underset{(3)}{\overset{(m)}{\chi'}}_k(a) - -\frac{ik}{\varkappa_m(a)} (k^2-1)^2 \underset{(1)}{\overset{(m)}{\chi}}{}^2_k(a) \underset{(1)}{\overset{(m)}{\chi'}}_k = 0 .$$

Найдем теперь для поверхности рассматриваемого семейства с помощью формул (12) и (13) $\underset{(3)}{\overset{(2)}{\chi}}_2(u)$:

$$\underset{(3)}{\overset{(2)}{\chi}}_2(u) = \frac{3.8.9}{\alpha_2^2}(\alpha_2-1)^2(\alpha_2^2+1)\{-\frac{(4\alpha_2^2+3)(4-3\alpha_2)(u-1)}{[\alpha_2(u-1)+1]} - -\frac{4(u-1)(\alpha_2-1)(\alpha_2^2+1)[\alpha_2(u-1)+2]}{[\alpha_2(u-1)+1]^2}\} + \underset{(3)}{\overset{(2)}{c}}_2(u-1) + \underset{(3)}{\overset{(1)}{c}}_2 ,$$

где

$$\underset{(3)}{\overset{(2)}{c}}_2 = \underset{(3)}{\overset{(1)}{c}}_2(4-3\alpha_2) + \frac{2(\alpha_2-1)}{\alpha_2^2}(-432\alpha_2^6 + 1233\alpha_2^5 - 1482\alpha_2^4 + + 1657\alpha_2^3 - 1278\alpha_2^2 + 540\alpha_2 - 432) .$$

Подставляя выражения $\underset{(3)}{\overset{(2)}{\chi}}_2$ и $\underset{(1)}{\overset{(2)}{\chi}}_2$ в (19), получим, что условие (18) имеет вид:

$$-\frac{4.9.9}{i\alpha_2}(\alpha_2-1)^2(\alpha_2^2+1)\{\frac{(4\alpha_2^2+3)}{\alpha_2[-\frac{1}{4-3\alpha_2}+1]} - -\frac{4(\alpha_2-1)(\alpha_2^2+1)[\frac{1}{-(4-3\alpha_2)\alpha_2}][\frac{1}{-(4-3\alpha_2)}+2]}{[\frac{1}{-(4-3\alpha_2)}+1]^2}\} -$$

$$-\frac{3\alpha_2}{2i}\overset{(1)}{\underset{(3)}{c}}{}_2-\left[-\frac{1}{4-3\alpha_2}+1\right]\frac{3.4.9}{i\alpha_2^2}(\alpha_2-1)^2(\alpha_2^2+1)\Big\{-\frac{(4\alpha_2^2+3)(4-3\alpha_2)}{-\left[-\frac{1}{4-3\alpha_2}+1\right]^2}-$$

$$-\frac{8(\alpha_2-1)(\alpha_2^2+1)}{-\left[-\frac{1}{4-3\alpha_2}+1\right]^3}\Big\}-\frac{18i}{-\left[-\frac{1}{4-3\alpha_2}+1\right]}\left[-\frac{1}{\alpha_2}+1\right]^2(4-3\alpha_2)+\overset{(2)}{\underset{(3)}{c}}{}_2\frac{3\alpha_2}{2i(4-3\alpha_2)}=0$$

или, после упрощения,

$$(20)\qquad 63\alpha_2^4-66\alpha_2^3+27\alpha_2^2-36\alpha_2-64=0.^{x)}$$

Уравнение (20) имеет, очевидно, отрицательный корень $-1<$ $<\alpha_2<0$. Соответствующая ему выпуклая поверхность E_2 допускает скользящее бесконечно малое изгибание 3-го порядка.

<u>Замечание</u>. Теорема 5 показывает, что выпуклая ребристая поверхность вращения может проявлять в отношении скользящих бесконечно малых изгибаний иные свойства, нежели сферический сегмент, который обладает жесткостью 3-го порядка относительно таких изгибаний [2].

Литература

[1] COHN-VOSSEN S.: Unstarre geschlossene Flächen, Math.Ann. 102(1929), 10-29 (или в сборнике "Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом", М., Физматгиз, 1959, стр. 87-114).

[2] REMBS E.: Über Gleitverbiegungen, Math. Ann. 111(1935), 587-595.

[3] ВУБЛИК Б.А.: Существование замкнутых поверхностей вра-

---

x) В работе [6] по вине автора допущена ошибка. Уравнение на стр. 34 в [6] должно иметь вид (20) настоящей работы.

щения, допускающих не менее двух линейно независимых бесконечно малых изгибаний, диссертация, Ростов-на-Дону, 1960.

[4] ШИМКО В.И.: Бесконечно малые изгибания ребристых поверхностей вращения, Изв.вузов, Матем.9(64)(1967), 93-98.

[5] ЧЕРНИС Г.Н.: Некоторые вопросы теории бесконечно малых изгибаний поверхностей вращения с краем, диссертация, Киев, 1969.

[6] ПЕРЛОВА Н.Г.: О бесконечно малых изгибаниях 1-го, 2-го и 3-го порядков замкнутых ребристых поверхностей вращения, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 1-35.

Кафедра математики
Ростовского гос.университета
Ростов-на-Дону 7, СССР

(Oblatum 18.3.1971)