

Werk

Label: Article

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?316342866_0012|log60

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ
ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

В классической математике всякая функция ограниченной вариации на сегменте J почти всюду на J дифференцируема и ее производная является интегрируемой по Лебегу [1]. В конструктивной математике аналогичное утверждение неверно. В [7] построена возрастающая на $0 \Delta 1$ функция, не являющаяся дифференцируемой ни в одной точке сегмента $0 \Delta 1$. В настоящей работе показано, что свойство α ([9]) является необходимым и достаточным для того, чтобы конструктивная функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ была в определенном ниже смысле дифференцируемой почти всюду на $0 \Delta 1$.

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [4 - 5], [8 - 9]. Напомним, что для любой функции f - $\alpha(f) \equiv \forall a \exists n \text{ Var}(u, f - h_n, 0 \Delta 1)$, где $\forall a x (h_a(x) = a \cdot \max(\min(x, 1), 0))$.

Определения. Пусть f функция, G ступенчатый остов, $\{F_m\}_m$ последовательность ступенчатых остовов, $\mathcal{F}$ $\mathcal{S}$ -многообразие, μ и ν НЧ, μ и ν КДЧ, $0 \leq \nu$.

1) $D(f, \{F_m\}_m, \mu, \mathcal{F}, \nu)$ обозначает: мера $\mathcal{F}$ меньше чем $\frac{1}{3\nu}$ и выполнено

AMS, Primary 02E99
Secondary 26A24, 26A45

Ref. Ž. 2.644

$$\begin{aligned} \forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{F})) \supset \exists x (P(x, \{F_m\}_m, x) \& \\ \& \forall y (|x - y| < \frac{1}{b} \supset \\ \supset |f(y) - f(x) - x \cdot (y - x)| \leq \frac{1}{3^n} \cdot |y - x|)) . \end{aligned}$$

2) $D(f, \{F_m\}_m)$ обозначает: существуют последовательности S -множеств $\{\mathcal{F}^k\}_k$ и НЧ $\{b_k\}_k$ такие, что $\forall k D(f, \{F_m\}_m, k, \mathcal{F}^k, b_k)$.

3) $G \tau u \cong G \tau 0 \tau 1 \sigma u$, $\{F_m\}_m - u \cong \{F_m \tau u\}_m$
и $\lambda(u, v) \cong \max(\min(u, v), -v)$.

Замечание 1. Пусть для $i = 1, 2$ — f_i функция, $\{F_m^i\}_m$ последовательность ступенчатых остовов, $\mathcal{U}^i$ S -множество, λ_i и t НЧ, $\{\mathcal{F}^k\}_k$ последовательность S -множеств, и $\{b_k\}_k$ последовательность НЧ.

1) Пусть $\forall k D(f_i, \{F_m^i\}_m, k, \mathcal{F}^k, b_k)$.

Согласно замечанию 1 из [6] существует S -множество $\mathcal{F}$ меры меньше чем $\frac{1}{3^{t-1}}$, являющееся объединением S -множеств $\mathcal{F}^k$ ($t \leq k$). Выполнено

$$\begin{aligned} \forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{F})) \supset \exists x (P(x, \{F_m^1\}_m, x) \& \\ \& \forall k y (t \leq k \& |y - x| < \frac{1}{b_k} \supset |f_1(y) - f_1(x) - \\ - x \cdot (y - x)| \leq \frac{1}{3^k} \cdot |y - x|)) . \end{aligned}$$

Таким образом, f_1 является равномерно дифференцируемой на множестве $\wedge x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{F}))$.

2) Если $D(f_1, \{F_m^1\}_m)$, то согласно 1) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\exists x (P(x, \{F_m^1\}_m, x) \& D(x, f_1, x))$.

3) По определению, функция f_1 сингулярна тогда и только тогда, когда $D(f_1, \{0\gamma 1\sigma 0\}_m)$ и f_1 функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ ([10]).

4) Если для $i = 1, 2$ верно $D(f_i, \{F_m^i\}_m, t+1, \mathcal{U}^i, \lambda_i)$, то существует S -множество $\mathcal{U}$ меры меньшей чем $\frac{1}{3^t}$, являющееся объединением $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{U}^2$ и выполнено

$$D(f_1 + f_2, \{F_m^1\}_m + \{F_m^2\}_m, t, \mathcal{U}, \max(\lambda_1, \lambda_2)).$$

5) Если для $i = 1, 2$ верно $D(f_i, \{F_m^i\}_m)$, то $D(-f_1, \{0\gamma 1\sigma 0\}_m - \{F_m^1\}_m) \& D(f_1 + f_2, \{F_m^1\}_m + \{F_m^2\}_m)$.

Теорема 1. Пусть f функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$. Тогда выполнено $\alpha(f)$ в том и только том случае, если существует $\{F_m\}_m \in S$ такое, что $D(f, \{F_m\}_m)$.

Теорема 2. Пусть $\{F_m\}_m \in L_1$. Тогда существует последовательность S -множеств $\{\mathcal{U}^n\}_n$ и возрастающая последовательность НЧ $\{\delta_n\}_n$ такие, что для всякого НЧ μ мера $\mathcal{U}^n$ меньше чем $\frac{1}{3^n}$, $\mathcal{U}^{n+1} \subseteq \mathcal{U}^n$ и выполнено

$$\begin{aligned} & \forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{U}^n) \supset \exists u (P(u, \{F_m\}_m, x) \& \\ & \& \forall k, y (n \leq k \& |y - x| \leq \frac{1}{\delta_k} \supset \\ & \supset \int_{\min(x, y)}^{\max(x, y)} |\{F_m\}_m - u| \leq \frac{1}{3^k} \cdot |y - x|)) \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть

$$\forall m (F_m \mp a_0^m \gamma a_1^m \dots \gamma a_{m_m}^m \sigma \psi_1^m \gamma \psi_2^m \dots \gamma \psi_{m_m}^m).$$

Согласно [5], стр. 271-2, можно построить последовательность 1-полигональных остовов ([4]) $\{\epsilon^i\}_m G_m$ и последовательность S -множеств $\{\mathcal{U}^{i, n}\}_n$ такие, что для всякого НЧ μ мера $\mathcal{U}^{i, n}$ меньше чем $\frac{1}{3^n}$, $\mathcal{U}^{i, n+1} \subseteq \mathcal{U}^{i, n}$

и выполнено

$$\begin{aligned} & \forall x (x \in 0_{\Delta 1} \& \neg (x \in \mathcal{U}^{0, n}) \supset \forall l (! \tilde{\mathcal{P}}_{F_l} (x) \& \\ & \& (n \leq l \supset \tilde{\mathcal{P}}_{F_l} (x) = \tilde{\mathcal{R}}_{\langle 1 \rangle G_l} (x))) \& \\ & \& \forall x \& (1 \leq n \leq m_n \& x \int_{0_{\Delta 1} \Delta 0_{\Delta 1}} |\tilde{\mathcal{P}}_{F_n} - \tilde{\mathcal{R}}_{\langle 1 \rangle G_n}| \supset \\ & \supset x < \frac{1}{m_n \cdot 3^{n+1}}) . \end{aligned}$$

Тогда ввиду $\{F_m\}_m \in L_1$ верно

$$(1) \quad \forall n x (x \int_{0_{\Delta 1}} |\tilde{\mathcal{P}}_{\langle 1 \rangle G_n} - \tilde{\mathcal{R}}_{\langle 1 \rangle G_{n+1}}| \supset x < \frac{1}{2^{n-1}}) .$$

Пусть Φ покрытие, $\langle 1 \rangle G_0$ 1-полигональный остов
и для всякого НЧ n - φ_n функции такие, что $\tilde{\mathcal{R}}_{\langle 1 \rangle G_0} = 0$
и

$$\begin{aligned} \forall y (\varphi_n (y) = \frac{2}{|\Phi_n|^2} \cdot (|y - \exists n (\Phi_n)| + |y - \exists m (\Phi_m)| - \\ - |2y - \exists n (\Phi_n) - \exists m (\Phi_m)|)) . \end{aligned}$$

Мы построим 2-функцию $\langle 2 \rangle \psi$ и для любого НЧ q 2-функцию $\langle 2 \rangle \psi_q$
таким, что для любой 2-точки $x \square y$ выполнено

$$\begin{aligned} \langle 2 \rangle \psi (x \square y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\mathcal{R}}_{\langle 1 \rangle G_n} (x) - \tilde{\mathcal{R}}_{\langle 1 \rangle G_{n+1}} (x)) \cdot \varphi_n (y) \quad \text{и} \\ \langle 2 \rangle \psi_q (x \square y) &= \sum_{n=1}^q (\tilde{\mathcal{R}}_{\langle 1 \rangle G_n} (x) - \tilde{\mathcal{R}}_{\langle 1 \rangle G_{n+1}} (x)) \cdot \varphi_n (y) . \end{aligned}$$

Тогда $\forall q (L_2 (\langle 2 \rangle \psi_q) \& \forall x (0 \leq x \leq 1 \supset L_1 (\langle 2 \rangle \psi_q)_{x \square}) \& \\ \tilde{\mathcal{R}}_{\langle 1 \rangle G_q} (x) \int_{0_{\Delta 1}} (\langle 2 \rangle \psi_q)_{x \square})$ и ввиду (1) и 7) из [4] выполне-
но

$$\forall q x (x \int_{0_{\Delta 1} \square 0_{\Delta 1}} |\langle 2 \rangle \psi_q - \langle 2 \rangle \psi_{q+1}| \supset x < \frac{1}{2^{q-1}}) .$$

Согласно 12) из [4] верно

$$L_2 (\langle 2 \rangle \psi) \& \forall q x (x \int_{0_{\Delta 1} \square 0_{\Delta 1}} |\langle 2 \rangle \psi - \langle 2 \rangle \psi_q| \supset x \leq \frac{1}{2^{q-2}}) .$$

Заметим, что для любых НЧ n и КДЧ x и u ,

$x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{U}^{0,r}) \& L_1(\widehat{\psi_{x0}}^{123}) \& \mu \int_{0\Delta 1} \widehat{\psi_{x0}}^{123}$,
имеет место $\tilde{R}_{\{1\}0_{\mathbb{N}}}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$ и, следовательно,
 $P(\mu, \{F_m\}_m, x)$.

Согласно теореме 3.1 из монографии Интегралы Лебега и Римана и понятие измеримости функций в конструктивной математике, которая готовится к печати, существуют возрастающая последовательность НЧ $\{m_n\}_n$ и последовательность S -множеств $\{\mathcal{F}^n\}_n$ такие, что для всякого НЧ n мера $\mathcal{F}^n$ меньше чем $\frac{1}{3^{n-1}}$, $\mathcal{F}^{n+1} \subseteq \mathcal{F}^n$ и выполнено

$$\begin{aligned} & \forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{F}^n) \supset L_1(\widehat{\psi_{x0}}^{123}) \& \\ & \& \forall k \forall n \forall x (n < k \& n \leq x \leq k \& 0 < k - n \leq \frac{1}{m_n} \& \\ & \& x \int_{n \Delta k \cap 0 \Delta 1} |\widehat{\psi}^{123} - \widehat{\psi_{x0}}^{123}| \supset x \leq \frac{1}{3^{k+1}} \cdot (k - n)) \end{aligned}$$

Для всякого НЧ n мы определим $b_n \equiv m_{n+3}$ и обозначим посредством $\mathcal{U}^n$ объединение S -множеств $\mathcal{U}^{0,n+2}$ и $\mathcal{F}^{n+2}$.

Пусть n НЧ. Тогда мера $\mathcal{U}^n$ меньше чем $\frac{1}{3^n}$ и $\mathcal{U}^{n+1} \subseteq \mathcal{U}^n$. Пусть l НЧ, x , n и w КДЧ, $x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{U}^n) \& n \leq l \& n \leq x \leq w \& 0 < w - n \leq \frac{1}{b_l}$.

Тогда $L_1(\widehat{\psi_{x0}}^{123})$ и существует КДЧ μ такое, что $P(\mu, \{F_m\}_m, x) \& \mu \int_{0\Delta 1} \widehat{\psi_{x0}}^{123}$. Пусть q НЧ, x , ξ , η_1 и η_2 КДЧ и $\{\partial e_i\}_{i=1}^{m_2}$ системы КДЧ, для которых выполнено $\frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{3^{l+3}} \cdot (w - n) \& (x \int_{n \Delta w \cap 0 \Delta 1} |\widehat{\psi}^{123} - \widehat{\psi_{x0}}^{123}| \& \& (\xi \int_{0 \Delta 1 \cap 0 \Delta 1} |\widehat{\psi}^{123} - \widehat{\psi_{\xi}}^{123}| \&$

$$\begin{aligned} & \& (\eta_1 \int_{v \Delta w, 0 \Delta 1} |\psi_2 - \widehat{\psi_{x0}}|) \& (\eta_2 \int_{v \Delta w} |\tilde{R}_{\psi_1 G_2} - \mu|) \& \\ & \& \forall i (1 \leq i \leq m_2 \supset \alpha_i \int_{v \Delta 1} \alpha_i^2 |\tilde{R}_{F_2} - \tilde{R}_{\psi_1 G_2}|) . \end{aligned}$$

Тогда мы имеем $x \leq \frac{1}{3l+1} \cdot (w-v)$, $\xi < \frac{1}{3l+2} \cdot (w-v)$, $\eta_2 \leq \eta_1 \leq \xi + z$
 (7) из [4], $\sum_{i=1}^{m_2} \alpha_i < \frac{1}{3l+3} \cdot (w-v)$, $\int_0^1 |F_m \xi_m - F_2| \leq$
 $\leq \frac{1}{2^{2-1}} < \frac{1}{3l+3} \cdot (w-v)$ (лемма 1 из [5]) и, следова-

тельно,

$$\int_v^w |F_m \xi_m - \mu| \leq \int_0^1 |F_m \xi_m - F_2| + \sum_{i=1}^{m_2} \alpha_i + \xi + z < \frac{1}{3l} \cdot (w-v) .$$

На основании доказанного и теоремы 2 из [5] мы получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть g функция, а $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что $\forall x, y (0 \leq x < y \leq 1 \supset g(y) - g(x) = \int_x^y \{G_m\}_m)$. Тогда $D(g, \{G_m\}_m)$.

Для всякой абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$ функции g существует $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что $\forall x, y (0 \leq x < y \leq 1 \supset g(y) - g(x) = \int_x^y \{G_m\}_m)$ и, следовательно, $D(g, \{G_m\}_m)$.

Замечание 2. Согласно теореме 2 для любого $\{F_m\}_m \in L_1$ почти все точки из $0 \Delta 1$ являются точками Лебега (ср. [1], стр. 275).

Замечание 3. 1) Пусть $\{G_m\}_m \in L_1$, $\{H_m\}_m \in S$, ν КДЧ, а q НЧ, $0 \leq \nu \leq q$. Тогда $\{\lambda_0(G_m, \nu)\}_m \in L_1$ & $\{\lambda_0(H_{m+q+1}, \nu)\}_m \in L_1$.

2) Пусть g абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция. Тогда согласно теореме из [9] и [5] $\alpha(q)$ & $a(q)$ и существует $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что

$\forall x, y (0 \leq x < y \leq 1 \supset g(y) - g(x) = \int_x^y \{G_n\}_n)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \forall x (0 \leq x \leq 1 \supset V\langle g, u \rangle(x) &= \int_0^x |\{G_n\}_n - u| & & \\ &\& V^+\langle g, u \rangle(x) = \int_0^x (\{G_n\}_n - u)^+ & & \\ &\& V^-\langle g, u \rangle(x) = \int_0^x (\{G_n\}_n - u)^- & & \\ &\& (0 \leq u \supset g_{(u)}(x) = g(0) + & & \\ &\& + \int_0^x \{\lambda_0(G_n, u)\}_n). \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть f функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$, а $\{F_n\}_n \in S$ такие, что $D(f, \{F_n\}_n)$. Тогда $\alpha(f)$.

Доказательство. Пусть w КЧ, $\{f^{1,n}\}_n$ последовательность S -множеств и $\{s_{1,n}\}_n$ последовательность НЧ такие, что

$$\forall n (w, f, 0 \Delta 1) \& \forall n D(f, \{F_n\}_n, n, f^{1,n}, s_{1,n}).$$

Пусть a РЧ. Согласно замечанию 3, теореме 1 из [5] и следствию теоремы 2 $\{\lambda_0(F_{n+|a|+2}, |a|)\}_n \in L_1$ и существуют абсолютно непрерывная функция g и последовательности S -множеств $\{f^{2,n}\}_n$ и НЧ $\{s_{2,n}\}_n$, для которых выполнено $\alpha(g) \& a(g) \& \forall x, y (0 \leq x < y \leq 1 \supset g(y) - g(x) = \int_x^y \{\lambda_0(F_{n+|a|+2}, |a|)\}_n) \& \forall n D(g, \{\lambda_0(F_{n+|a|+2}, |a|)\}_n, n, f^{2,n}, s_{2,n})$.

Мы докажем

$$(2) \forall n (w - V\langle g, 0 \rangle(0 \Delta 1) + V\langle g, a \rangle(0 \Delta 1), f - h_a, 0 \Delta 1).$$

Пусть $\{c_i\}_{i=0}^\infty$ В-система РЧ, а m НЧ, $|a| < m$. Ввиду $a(g)$ можно построить НЧ t такое, что $6m \leq t$ и для любой системы неперекрывающихся рациональных сегментов

$$\{d_i \Delta e_i\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{верно}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |d_i \Delta e_i| \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |g(e_i) - g(d_i)| < \frac{1}{12m}\right).$$

Существует $\mathcal{S}$ -многообразие $\mathcal{F}$ меры меньше чем $\frac{2}{3^{t+1}}$, являющееся объединением $\mathcal{F}^{1,t+1}$ и $\mathcal{F}^{2,t+1}$, и НЧ q такое, что

$$\begin{aligned} & \rho_{1,t+1} + \rho_{2,t+1} \leq q \text{ \& } \forall i (0 \leq i \leq r \Rightarrow \exists j (\frac{j}{q} = c_i)) \& \\ & \& V \langle g, 0 \rangle (0 \Delta 1) - \frac{1}{6m} < W(g, \{\frac{j}{q}\}_{j=0}^q) \& \\ & \& V \langle g, a \rangle (0 \Delta 1) - \frac{1}{12m} < W(g - h_a, \{\frac{j}{q}\}_{j=0}^q) \& \\ & \& w - \frac{1}{12m} < W(f, \{\frac{j}{q}\}_{j=0}^q). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1.3 из [2] и замечанию 2 из [10] существуют дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и системы КДЧ $\{f_j\}_{j \in \mathcal{E}_1}$ и $\{n_j\}_{j \in \mathcal{E}_1}$ для которых выполнено

$$\begin{aligned} & \forall j ((1 \leq j \leq q \Rightarrow (j \in \mathcal{E}_1 \vee j \in \mathcal{E}_2)) \& \\ & \& (j \in \mathcal{E}_1 \Rightarrow \nu \langle \mathcal{F} \rangle (\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}) < |\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}| \& \frac{j-1}{q} < f_j < \\ & < \frac{j}{q} \& \neg (f_j \in \mathcal{F}) \& P(n_j, \{F_m\}_m, f_j)) \& (j \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot |\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}| < \nu \langle \mathcal{F} \rangle (\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q})) \& \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \sum_{j \in \mathcal{E}_2} |\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}| \leq \frac{3}{2} \cdot \sum_{j \in \mathcal{E}_2} \nu \langle \mathcal{F} \rangle (\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}) \leq \frac{3}{2}.$$

$$\nu \langle \mathcal{F} \rangle (0 \Delta 1) < \frac{1}{3^t} \leq \frac{1}{3^{6m}} \quad \text{и, следовательно,}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_2} |g(\frac{j}{q}) - g(\frac{j-1}{q})| < \frac{1}{12m}. \quad \text{Для всякого НЧ } j, j \in \mathcal{E}_1, \text{ выполнено}$$

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{j}{Q}\right) - f\left(\frac{j-1}{Q}\right) - a \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) - (\eta_j - a) \cdot \frac{1}{Q} \right| = \\
& = \left| f\left(\frac{j}{Q}\right) - f\left(\frac{j-1}{Q}\right) - \eta_j \cdot \frac{1}{Q} \right| \leq \frac{1}{3^{t+1}} \cdot \frac{1}{Q} < \frac{1}{6m} \cdot \frac{1}{Q}, \\
& \left| g\left(\frac{j}{Q}\right) - g\left(\frac{j-1}{Q}\right) - a \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) - (\lambda(\eta_j, |a|) - a) \cdot \frac{1}{Q} \right| = \\
& = \left| g\left(\frac{j}{Q}\right) - g\left(\frac{j-1}{Q}\right) - \lambda(\eta_j, |a|) \cdot \frac{1}{Q} \right| < \frac{1}{6m} \cdot \frac{1}{Q}, \\
& |\eta_j - a| = |\eta_j| - |\lambda(\eta_j, |a|)| + |\lambda(\eta_j, |a|) - a|.
\end{aligned}$$

Таким образом, обозначив для $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\xi_i & \equiv \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \left| f\left(\frac{j}{Q}\right) - f\left(\frac{j-1}{Q}\right) - a \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) - (\eta_j - a) \cdot \frac{1}{Q} \right| + \\
& + \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \left| g\left(\frac{j}{Q}\right) - g\left(\frac{j-1}{Q}\right) - a \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) - (\lambda(\eta_j, |a|) - a) \cdot \frac{1}{Q} \right|,
\end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in \mathbb{N}_2} \left| f\left(\frac{j}{Q}\right) - f\left(\frac{j-1}{Q}\right) - a \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) - (\eta_j - a) \cdot \frac{1}{Q} \right| \leq \xi_2 + 2 \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}_2} \left| g\left(\frac{j}{Q}\right) - \right. \\
& \quad \left. - g\left(\frac{j-1}{Q}\right) \right| < \xi_2 + \frac{1}{6m}, \\
& \sum_{j \in \mathbb{N}_2} \left| f\left(\frac{j}{Q}\right) - f\left(\frac{j-1}{Q}\right) - a \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) \right| \geq \xi_2 - 2 \cdot |a| \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}_2} \frac{1}{Q} > \\
& > \xi_2 - \frac{2m}{36m} > \xi_2 - \frac{1}{6m}, \\
& \sum_{j \in \mathbb{N}_1} \left| f\left(\frac{j}{Q}\right) - f\left(\frac{j-1}{Q}\right) - a \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) \right| < \frac{1}{6m} + \sum_{j \in \mathbb{N}_1} |\eta_j - a| \cdot \\
& \quad \cdot \frac{1}{Q} = \frac{1}{6m} + \sum_{j \in \mathbb{N}_1} |\eta_j| \cdot \frac{1}{Q} - \sum_{j \in \mathbb{N}_1} |\lambda(\eta_j, |a|)| \cdot \frac{1}{Q} + \\
& + \sum_{j \in \mathbb{N}_1} |\lambda(\eta_j, |a|) - a| \cdot \frac{1}{Q} \leq \frac{1}{6m} + \xi_1 + \sum_{j \in \mathbb{N}_1} \left| f\left(\frac{j}{Q}\right) - \right. \\
& \quad \left. - f\left(\frac{j-1}{Q}\right) - \eta_j \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) \right| + \sum_{j \in \mathbb{N}_1} \left| g\left(\frac{j}{Q}\right) - g\left(\frac{j-1}{Q}\right) - \right. \\
& \quad \left. - \lambda(\eta_j, |a|) \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) \right| + \sum_{j \in \mathbb{N}_1} \left| g\left(\frac{j}{Q}\right) - g\left(\frac{j-1}{Q}\right) - \right. \\
& \quad \left. - a \cdot \left(\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q}\right) - (\lambda(\eta_j, |a|) - a) \cdot \frac{1}{Q} \right| < \xi_1 + \frac{4}{6m}
\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\sum_{j \in \tau_1} |f(\frac{j}{Q}) - f(\frac{j-1}{Q}) - a \cdot (\frac{j}{Q} - \frac{j-1}{Q})| > \sum_{j \in \tau_2} |\eta_j - a| \cdot \frac{1}{Q} - \frac{1}{6m} > \xi_1 - \frac{4}{6m}.$$

Следовательно, верно

$$\begin{aligned} W(f - h_a, \{c_i\}_{i=0}^{\tau}) &\leq W(f - h_a, \{\frac{j}{Q}\}_{j=0}^{\tau}) < \\ &< W(f, \{\frac{j}{Q}\}_{j=0}^{\tau}) - W(g, \{\frac{j}{Q}\}_{j=0}^{\tau}) + W(g - h_a, \{\frac{j}{Q}\}_{j=0}^{\tau}) + \\ &+ \frac{5}{6m} < w - V(g, 0)(0 \Delta 1) + \\ &+ V(g, a)(0 \Delta 1) + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} W(f - h_a, \{\frac{j}{Q}\}_{j=0}^{\tau}) &> W(f, \{\frac{j}{Q}\}_{j=0}^{\tau}) - W(g, \{\frac{j}{Q}\}_{j=0}^{\tau}) + \\ &+ W(g - h_a, \{\frac{j}{Q}\}_{j=0}^{\tau}) - \frac{5}{6m} > w - \\ &- V(g, 0)(0 \Delta 1) + V(g, a)(0 \Delta 1) - \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Итак, мы для любого НЧ a доказали (2) и тогда выполнено $\alpha(f)$.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{F}$ — множество, τ — целое число, $0 \leq \tau$ и Q, K и ρ НЧ, для которых верно $1 \leq \rho \leq 3^\tau Q$ и $\rho > \langle \mathcal{F} \rangle (\frac{\rho-1}{3^\tau} \Delta \frac{\rho}{3^\tau}) < \frac{1}{3^\tau} \cdot \frac{1}{3^\tau}$. Тогда существует НЧ σ_0 такое, что для любого НЧ σ , $\sigma_0 \leq \sigma$, можно построить дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, для которых выполнено

$$\begin{aligned} \forall i ((\rho-1) \cdot 3^\sigma + 1 \leq i \leq \rho \cdot 3^\sigma \Rightarrow (i \in \mathcal{L}_1 \vee i \in \mathcal{L}_2)) &\& \\ \& (i \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \rho > \langle \mathcal{F} \rangle (\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{\tau+\sigma}}) < \frac{1}{3^\tau} \cdot \frac{1}{3^{\tau+\sigma}}) &\& \\ \& \sum_{i \in \mathcal{L}_2} |\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{\tau+\sigma}}| \leq \frac{1}{3^\tau} \cdot \frac{1}{3^\tau}. \end{aligned}$$

Обозначение. Для всяких сегментов $a \Delta b$ и $c \Delta d$ обозначим $|a \Delta b \cap c \Delta d| \cong \max(\min(b, d), c) - \max(\min(a, d), c)$.

Доказательство. Пусть S -множество $\mathcal{F}$ образовано последовательностью сегментов $\{P_m\}_m$; а t НЧ такое, что $\nu < \mathcal{F} < (\frac{b-1}{3^t} \Delta \frac{b}{3^t}) < (\frac{1}{3^t} - \frac{1}{3^{t+1}}) \cdot \frac{1}{3^t}$.

Тогда существуют НЧ m_0 и σ_0 такие, что

$$\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |P_n| < \frac{1}{3^{k+t+2}} \cdot \frac{1}{3^t} \quad \text{и для любого НЧ } \sigma, \sigma_0 \leq \sigma, \text{ верно}$$

$$\sum_{n=1}^{m_0} \sum_{B_{\sigma}(i,n)} \left| \frac{i-1}{3^{t+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{t+\sigma}} \right| > \sum_{n=1}^{m_0} |P_n \cap \frac{b-1}{3^t} \Delta \frac{b}{3^t}| - \frac{1}{3^{k+t+2}} \cdot \frac{1}{3^t},$$

где

$$\forall m i (B_{\sigma}(i, m) \Rightarrow ((b-1) \cdot 3^{\sigma} + 1 \leq i \leq b \cdot 3^{\sigma} \&$$

$$\& \left| \frac{i-1}{3^{t+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{t+\sigma}} \right| = |P_m \cap \frac{i-1}{3^{t+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{t+\sigma}}|)).$$

Пусть σ НЧ, $\sigma_0 \leq \sigma$. Согласно теореме 1.3 из [2] существуют дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ такие, что

$$\begin{aligned} \forall i (((b-1) \cdot 3^{\sigma} + 1 \leq i \leq b \cdot 3^{\sigma} \Rightarrow (i \in \mathcal{K}_0 \vee i \in \mathcal{K}_1 \vee i \in \mathcal{K}_2)) \& \\ \& (i \in \mathcal{K}_0 \Rightarrow \exists m (1 \leq m \leq m_0 \& B_{\sigma}(i, m))) \& \\ \& (i \in \mathcal{K}_1 \Rightarrow \nu < \mathcal{F} < (\frac{i-1}{3^{t+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{t+\sigma}}) < \frac{1}{3^t} \cdot \frac{1}{3^{t+\sigma}}) \& (i \in \mathcal{K}_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{3^{k+1}} \cdot \frac{1}{3^{t+\sigma}} < \nu < \mathcal{F} < (\frac{i-1}{3^{t+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{t+\sigma}}))) . \end{aligned}$$

Тогда выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{K}_0} \left| \frac{i-1}{3^{t+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{t+\sigma}} \right| \leq \nu < \mathcal{F} < (\frac{b-1}{3^t} \Delta \frac{b}{3^t}) < \\ < (\frac{1}{3^t} - \frac{1}{3^{t+1}}) \cdot \frac{1}{3^t}, \\ \frac{1}{3^{k+1}} \cdot \sum_{i \in \mathcal{K}_2} \left| \frac{i-1}{3^{t+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{t+\sigma}} \right| \leq \sum_{i \in \mathcal{K}_2} \nu < \mathcal{F} < (\frac{i-1}{3^{t+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{t+\sigma}}) < \frac{1}{3^{k+t+1}} \cdot \frac{1}{3^t} \\ \text{и, следовательно, } \sum_{i \in \mathcal{K}_2} \left| \frac{i-1}{3^{t+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{t+\sigma}} \right| < \frac{1}{3^t} \cdot \frac{1}{3^t}. \end{aligned}$$

Итак, для завершения доказательства достаточно определить $\mathcal{L}_1 \Leftarrow \mathcal{K}_1$ и обозначить посредством $\mathcal{L}_2$ возраста-

ющую систему НЧ, складываемую объединением $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_2$.

Лемма 3. Пусть ψ — неубывающая функция, $\alpha(\psi)$, $\mathcal{F}$ — множество, k — целое число, $0 \leq k$, и n и b НЧ такие, что

$$1 \leq b \leq 3^k, \quad \psi\left(\frac{b}{3^k}\right) - \psi\left(\frac{b-1}{3^k}\right) + \\ + \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{3^k} - 2 \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \nu(\mathcal{F}) \left(\frac{b-1}{3^k} \Delta \frac{b}{3^k}\right) \leq \\ \leq V\left(\psi; \frac{1}{3^{2n+1}}\right) \left(\frac{b-1}{3^k} \Delta \frac{b}{3^k}\right) \\ \text{и } \nu(\mathcal{F}) \left(\frac{b-1}{3^k} \Delta \frac{b}{3^k}\right) < \frac{1}{3^{n+6}} \cdot \frac{1}{3^k}.$$

Тогда можно построить НЧ λ_0 , $n+5 < \lambda_0$, такое, что для любого НЧ ℓ , $\lambda_0 \leq \ell$, существует возрастающая система НЧ $\mathcal{C}$, для которой выполнено

$$(3) \quad \forall i (i \in \mathcal{C} \supset (b-1) \cdot 3^\ell + 1 < i < b \cdot 3^\ell \& \\ \& \forall j (i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi\left(\frac{j}{3^{k+\ell}}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{3^{k+\ell}}\right) < \\ < \frac{1}{3^{2n+6}} \cdot \frac{1}{3^{k+\ell}})) \& \sum_{i \in \mathcal{C}} \left| \frac{i-1}{3^{k+\ell}} \Delta \frac{i}{3^{k+\ell}} \right| = \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right) \cdot \frac{1}{3^k} \\ \text{и } \forall i (i \in \mathcal{C} \supset \nu(\mathcal{F}) \left(\frac{i-1}{3^{k+\ell}} \Delta \frac{i}{3^{k+\ell}}\right) < \frac{1}{3^{n+7}} \cdot \frac{1}{3^{k+\ell}}).$$

Доказательство. Согласно доказательству леммы 3 из [10], где мы перейдем от n к $n+1$, и лемме 2, где $\tau \geq k$, $q \geq n+6$, $r \geq n+7$, существует НЧ ℓ_0 и b_0 , $n+5 < \ell_0$, такие, что для любого НЧ ℓ , $\max(\ell_0, b_0) \leq \ell$, можно построить возрастающую систему НЧ $\mathcal{C}$, которая содержится в пересечении построенных описанным способом систем $\mathcal{C}_0$ и $\mathcal{L}_1$ и которая удовлетворяет условиям, описанным в утверждении настоящей леммы. Мы определим $\lambda_0 \geq \max(\ell_0, b_0)$.

Замечание 4. Формула (3) совпадает с (10) из [10].

Лемма 4. Пусть ψ — неубывающая функция, t — НЧ, а $\mathcal{G}$ — S -множество меры меньше чем $\frac{1}{3^{t+2}}$ также, что

$$\alpha(\psi) \& \forall a, b, z (0 \leq a < b \leq 1 \& 0 \leq z \leq 1 \supset \psi \langle \psi, z \rangle (a \Delta b) \geq \psi(b) - \psi(a) + z \cdot (b - a) - 2z \cdot \nu \langle \mathcal{G} \rangle (a \Delta b)) .$$

Тогда существует НЧ n_t и S -множество $\mathcal{U}$, для которых выполнено $\Pi(\psi, \{0, 1\}^{\sigma_0}, t+1, \mathcal{U}, n_t)$.

Доказательство. 1) Согласно лемме 3, где $k_1 \neq 0$, $n_1 \neq t+1$ и $b \neq 1$, существуют НЧ λ_1 , $t+6 < \lambda_1$, и возрастающая система НЧ a_1 также, что

$$\begin{aligned} & \forall i (i \in a_1 \supset 1 < i < 3^{\lambda_1} \& \forall j (i-1 \leq j \leq i+1 \supset \\ & \supset \psi(\frac{j}{3^{\lambda_1}}) - \psi(\frac{j-1}{3^{\lambda_1}}) < \frac{1}{3^{2t+10}} \cdot \frac{1}{3^{\lambda_1}}) \& \sum_{i \in a_1} |\frac{i-1}{3^{\lambda_1}} \Delta \frac{i}{3^{\lambda_1}}| \geq \\ & \geq (1 - \frac{1}{3^{t+2}}) \& \forall i (i \in a_1 \supset \nu \langle \mathcal{G} \rangle (\frac{i-1}{3^{\lambda_1}} \Delta \frac{i}{3^{\lambda_1}}) < \\ & < \frac{1}{3^{t+8}} \cdot \frac{1}{3^{\lambda_1}}) . \end{aligned}$$

В $\mathcal{U}$ мы на этом шаге включим все сегменты $\frac{i-1}{3^{\lambda_1}} \Delta \frac{i}{3^{\lambda_1}}$, $1 \leq i \leq 3^{\lambda_1} \& \neg (i \in a_1)$, и определим $k_2 \neq k_1 + \lambda_1$.

2) Пусть m — НЧ, $1 < m$, пусть уже построены НЧ k_m и возрастающая система НЧ a_{m-1} также, что сегменты системы $\{\frac{b-1}{3^{k_m}} \Delta \frac{b}{3^{k_m}}\}_{b \in a_{m-1}}$ не перекрываются с сегментами пока включенными в $\mathcal{U}$ и вместе с ними покрывают $0 \Delta 1$, выполнено

$$\forall i (i \in a_{m-1} \supset 1 < i < 3^{k_m} \& \forall j (i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi(\frac{j}{3^{k_m}}) -$$

$$-\psi\left(\frac{j-1}{3^{k_m}}\right) < \frac{1}{3^{2t+2m+6}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}}) \& \sum_{i \in A_{m-1}} \left| \frac{i-1}{3^{k_m}} \Delta \frac{i}{3^{k_m}} \right| \geq 1 - \\ - \frac{3^{m-1}-1}{2 \cdot 3^{t+m}} \& \forall i (i \in A_{m-1} \supset \nu(\varphi) \left(\frac{i-1}{3^{k_m}} \Delta \frac{i}{3^{k_m}} \right) < \frac{1}{3^{2t+m+6}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}}).$$

Мы определим $k_m \cong t+m$. Для всякого НЧ λ , $\lambda \in A_{m-1}$, мы применим к ψ , k_m , k_m и λ лемму 3 и лемму 4 из [10]. Мы получим НЧ λ_m , $t+m+5 < k_m$, и для всякого НЧ $\lambda \in A_{m-1}$ два непересекающиеся возрастающие системы НЧ $\mathcal{E}_{m,\lambda,1}$ и $\mathcal{E}_{m,\lambda,2}$ такие, что

$$\begin{aligned} & \forall i (i \in \mathcal{E}_{m,\lambda,1} \supset (\lambda-1) \cdot 3^{k_m} + 1 \leq i \leq \lambda \cdot 3^{k_m} \& \\ & \& \forall j (i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi\left(\frac{j}{3^{k_{m+1}}}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{3^{k_{m+1}}}\right) < \frac{1}{3^{2t+2m+8}} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{3^{k_{m+1}}}) \& \forall x, y \left(\frac{\lambda-2}{3^{k_m}} \leq x \leq \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} < \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \leq y \leq \right. \\ & \leq \frac{\lambda+1}{3^{k_m}} \supset 0 \leq \psi(y) - \psi(x) < \frac{1}{3^{t+m}} \cdot (y-x)) \& \\ & \& \nu(\varphi) \left(\frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \right) < \\ & < \frac{1}{3^{t+m+8}} \cdot \frac{1}{3^{k_{m+1}}} \& \\ & \& \sum_{i \in \mathcal{E}_{m,\lambda,2}} \left| \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \right| = \frac{1}{3^{t+m+1}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}} \& \\ & \& \forall i ((\lambda-1) \cdot 3^{k_m} + 1 \leq i \leq \lambda \cdot 3^{k_m} \equiv \\ & \equiv (i \in \mathcal{E}_{m,\lambda,1} \vee i \in \mathcal{E}_{m,\lambda,2})), \end{aligned}$$

где $k_{m+1} \cong k_m + k_m$. В $\mathcal{U}$ мы на этом шаге включим все сегменты $\frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}}$, где $\exists \lambda (\lambda \in A_{m-1} \& i \in \mathcal{E}_{m,\lambda,2})$. Сумма длин этих сегментов не больше чем

$\frac{1}{3^{t+m+1}}$ и, следовательно, если мы посредством A_m обозначим возрастающую систему НЧ, являющуюся объединением сис-

тек $\mathcal{U}_{m,0,1}$ ($\lambda \in \mathcal{A}_{m-1}$), то

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_m} \left| \frac{i-1}{3^{t+m+1}} \Delta \frac{i}{3^{t+m+1}} \right| \geq 1 - \frac{3^{m-1}-1}{2 \cdot 3^{t+m}} - \frac{1}{3^{t+m+1}} = 1 - \frac{3^m-1}{2 \cdot 3^{t+m+1}}.$$

Заметим, что сегменты пока включенные в $\mathcal{U}$ не перекрываются с сегментами системы $\left\{ \frac{i-1}{3^{t+m+1}} \Delta \frac{i}{3^{t+m+1}} : i \in \mathcal{A}_m \right\}$ и вместе с ними покрывают $0 \Delta 1$.

Итак, $\mathcal{U}$ S -множество меры меньше чем $\frac{1}{3^{t+1}}$.

Методом, описанным в конце доказательства теоремы 1 на [10] легко доказать

$$\forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{U}) \supset \forall x \forall y (x \leq x \leq y \& |y-x| < \frac{1}{3^{t+2}} \supset 0 \leq \psi(y) - \psi(x) \leq \frac{1}{3^{t+1}} \cdot (y-x)) \rangle).$$

Таким образом, верно

$$\Pi(\psi, \{0 \gamma 1 \sigma 0\}_m, t+1, \mathcal{U}, 3^{t+2}).$$

Замечание 5. Для любого S -множества $\mathcal{F}$ мы обозначим посредством $\nu_1 \langle \mathcal{F} \rangle$ функцию такую, что

$$\forall x (0 < x \leq 1 \supset \nu_1 \langle \mathcal{F} \rangle(x) = \nu \langle \mathcal{F} \rangle(0 \Delta x)).$$

Тогда, как легко показать, $\nu_1 \langle \mathcal{F} \rangle(0) = 0$, $\nu_1 \langle \mathcal{F} \rangle$

неубывающая абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция и выполнено

$$\forall x \forall y (0 \leq x < y \leq 1 \supset 0 \leq \nu_1 \langle \mathcal{F} \rangle(y) - \nu_1 \langle \mathcal{F} \rangle(x)$$

$$= \nu \langle \mathcal{F} \rangle(x \Delta y) \leq |x \Delta y|).$$

Согласно теореме 2 на [5] и отмеченным свойствам $\nu_1 \langle \mathcal{F} \rangle$ для почти всех КДЧ x на

$0 \Delta 1$ верно

$$\exists \mu (D(\mu, \nu_1 \langle \mathcal{F} \rangle, x) \& 0 \leq \mu \leq 1 \& (x \in \mathcal{F} \supset \mu = 1)).$$

Лемма 5. Пусть φ неубывающая функция, $\alpha(\varphi)$. Тогда существует $\{H_m\}_m \in S$ такое, что $\Pi(\varphi, \{H_m\}_m)$.

Доказательство. Пусть τ_0 НЧ такое, что $\varphi(1) - \varphi(0) < \tau_0$.

а) Согласно соответствующим определениям и лемме 1 из [10] для всяких КДЧ v, w и x , $0 \leq w \leq v$ & $0 \leq x$: $V^+ \langle \varphi, v \rangle$ — неубывающая функция, $\varphi_{\langle v \rangle}$ — неубывающая абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция, $\varphi_{\langle w \rangle} = \varphi(0) + \varphi_{\langle v \rangle} = \varphi(0) + V^+ \langle \varphi, 0 \rangle - V^+ \langle \varphi, v \rangle = \varphi - V^+ \langle \varphi, v \rangle$ и, следовательно, $V \langle \varphi_{\langle v \rangle}, 0 \rangle (0 \Delta 1) \leq \varphi(1) - \varphi(0) < \tau_0$; верно

$$\begin{aligned} & \alpha(V^+ \langle \varphi, v \rangle), V \langle V^+ \langle \varphi, v \rangle, x \rangle = \\ & = V^+ \langle V^+ \langle \varphi, v \rangle, x \rangle + V^- \langle V^+ \langle \varphi, v \rangle, x \rangle = V^+ \langle \varphi, v+x \rangle + \\ & + V^- \langle \varphi, v+x \rangle - V^- \langle \varphi, v \rangle = V^+ \langle \varphi, v \rangle + \\ & + h_x + 2 \cdot (V^+ \langle \varphi, v+x \rangle - V^+ \langle \varphi, v \rangle) = \\ & = V^+ \langle \varphi, v \rangle + h_x - 2 \cdot (\varphi_{\langle v+x \rangle} - \varphi_{\langle v \rangle}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & (\varphi_{\langle v \rangle})_{\langle w \rangle} = \varphi_{\langle v \rangle} - V^+ \langle \varphi - V^+ \langle \varphi, v \rangle, w \rangle = \varphi - \\ & - V^+ \langle \varphi, v \rangle - (V^+ \langle \varphi, w \rangle - V^+ \langle \varphi, v \rangle) = \varphi_{\langle w \rangle}. \end{aligned}$$

б) Пусть m — НЧ. Мы определим $q_m \approx 2^{2m+19} \cdot \tau_0$. Ввиду отмеченных в а) свойств функции $\varphi_{\langle q_m \rangle}$ и теоремы 2 из [5] существует $\{G_n^{1,m}\}_n \in L_1$ такое, что

$$(4) \forall x, y (0 \leq x < y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \varphi_{\langle q_m \rangle}(y) - \varphi_{\langle q_m \rangle}(x) = \int_x^y \{G_n^{1,m}\}_n),$$

причем $\|\{G_n^{1,m}\}_n\| = \{G_n^{1,m}\}_n$. Мы определим $V_m(G_n^m \approx \{G_n^{1,m}\}_n)$. Тогда $\{G_n^m\}_n \in L_1$,

$$(5) \quad 0 \leq \{G_n^m\}_n = \{G_n^{1,m}\}_n$$

и $\int_0^1 \{G_n^m\}_n = V \langle \varphi_{\langle q_m \rangle}, 0 \rangle (0 \Delta 1) < \tau_0$. По лемме 2 из [8] существует равномерно непрерывная функция q_m и

г) Ввиду в) и теоремы 4 из [5] существует $\{H_n\}_n \in S$ такое, что для почти всех КДЧ x на $0 \Delta 1$ верно

$$(7) \quad \exists \mu (P(\mu, \{H_n\}_n, x) \& (q_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu)) .$$

Таким образом, $0 \leq \{H_n\}_n$ и для всякого НЧ m можно построить S -множество $\mathcal{F}^{5,m}$ меры меньшей чем $\frac{1}{3^{8+m}}$, для которого для всех КДЧ x , $x \in 0 \Delta 1$ & $\neg(x \in \mathcal{F}^{5,m})$ верно (7) и, следовательно, если $\mathcal{F}^m$ объединение S -множеств $\mathcal{F}^{4,m}$ и $\mathcal{F}^{5,m}$, то мера $\mathcal{F}^m$ меньше чем $\frac{1}{3^{m+7}}$ и выполнено

$$(8) \quad \forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{F}^m) \supset \forall i (0 \leq i \supset 0 \leq q_m(x) = q_{m+i}(x) < q_m \& P(q_m(x), \{G_n^{m+i}\}_n, x) \& P(q_m(x), \{H_n\}_n, x) \& D(\varphi_{\{q_m\}}, \{H_n\}_n, m+7, \mathcal{F}^m, \nu_m)) .$$

д) Пусть m НЧ. Согласно лемме 1 из [5], в) и г)

$$\begin{aligned} & \{\lambda_0(H_{n+q_{m+1}+1}, q_{m+1})\}_n \in L_1 \& \\ & \& \{\lambda_0(H_{n+q_{m+1}+1}, q_{m+1})\}_n = \{G_n^{m+1}\}_n . \end{aligned}$$

На основании этого, (4) и (5), где мы перейдем от m к $m+1$, [5], (6) и замечания 3 выполнено

$$(9) \quad \forall \mu, \nu (0 \leq \mu \leq 1 \& 0 \leq x < \nu \leq 1 \supset \{H_n^{(\mu)}\}_n \in L_1 \& \& \varphi_{\{q_{m+1}\}}(\nu) - \varphi_{\{q_{m+1}\}}(x) = \int_x^\nu \{H_n^{(\mu)}\}_n ,$$

где

$$\forall m, \mu (0 \leq \mu \leq 1 \supset H_n^{(\mu)} \cong \lambda_0(H_{n+q_{m+1}+1}, q_{m+1} + \mu)) .$$

Пусть x КДЧ, $0 \leq x \leq 1$. Тогда ввиду (8), (9)

и теоремы 2 из [5] для почти всех КДЧ x на $0 \Delta 1$ выпол-

нено

$$\exists v (P(v, \{H_n^{(z)}\}_n - \{H_n^{(0)}\}_n, x) \& D(v, \varphi_{\{2_m+z\}} - \varphi_{\{2_m\}}, x) \& 0 \leq v \leq x \& (\neg(x \in \mathcal{F}^m) \supset v = 0)) .$$

На основании лемм 3 и 1 из [6], теорем 1 и 2 из [5] и замечания 5 мы знаем, что существует $\{\mathcal{M}_n^m\}_n \in M$ и абсолютно непрерывная функция ψ_m такие, что

$$\chi[\{\mathcal{M}_n^m\}_n] \in L_1, \quad \forall x, y (0 \leq x < y \leq 1 \supset \\ \supset \psi_m(y) - \psi_m(x) = \int_x^y \chi[\{\mathcal{M}_n^m\}_n])$$

и для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$

$$(x \in \mathcal{F}^m \vee \neg(x \in \mathcal{F}^m)) \& (x \in \mathcal{F}^m \supset D(1, \nu_1 \langle \mathcal{F}^m \rangle, x) \& \\ \& x \in \{\mathcal{M}_n^m\}_n \& P(1, \chi[\{\mathcal{M}_n^m\}_n], x) \& D(1, \psi_m, x)) \& \\ \& (\neg(x \in \mathcal{F}^m) \supset \exists u (0 \leq u \leq 1 \& D(u, \nu_1 \langle \mathcal{F}^m \rangle, x)) \& \\ \& \neg(x \in \{\mathcal{M}_n^m\}_n) \& P(0, \chi[\{\mathcal{M}_n^m\}_n], x) \& \\ \& D(0, \psi_m, x)) .$$

$$\text{Итак, } 0 \leq \{H_n^{(z)}\}_n - \{H_n^{(0)}\}_n \leq x \cdot \chi[\{\mathcal{M}_n^m\}_n]$$

и согласно следствию теоремы 6 и теореме 2 из [5] выполнено

$$\forall x, y (0 \leq x < y \leq 1 \supset 0 \leq \varphi_{\{2_m+z\}}(y) - \\ - \varphi_{\{2_m+z\}}(x) - (\varphi_{\{2_m\}}(y) - \varphi_{\{2_m\}}(x)) \leq x \cdot (\psi_m(y) - \\ - \psi_m(x)) \leq x \cdot (\nu_1 \langle \mathcal{F}^m \rangle(y) - \nu_1 \langle \mathcal{F}^m \rangle(x)) = x \cdot \nu \langle \mathcal{F}^m \rangle(x \triangle y)) .$$

Отсюда мы на основании а) и г) получаем: $V^+ \langle \varphi, 2_m \rangle$ неубывающая функция, $\mathcal{F}^m$ S -множество меры меньше чем $\frac{1}{3^{m+1}}$ и

$$\alpha(V^+\langle\varphi, q_m\rangle) \& \forall x, y, z (0 \leq x < y \leq 1 \& 0 \leq z \leq 1 \supset V(V^+\langle\varphi, q_m, z\rangle(x \Delta y) \geq V^+\langle\varphi, q_m\rangle(x \Delta y) + z \cdot (y - x) - 2x \cdot z \langle g^m \rangle(x \Delta y)) .$$

Согласно лемме 4 существует S -множество $\varphi^{1,m}$ и НЧ n_m такие, что

$$D(V^+\langle\varphi, q_m\rangle, \{0, 1, \sigma, 0\}_{n, m+1}, \varphi^{1,m}, n_m) .$$

Пусть φ^m объединение S -множеств g^m и $\varphi^{1,m}$. Тогда ввиду (8), а) и замечания 1 выполнено

$$D(\varphi, \{H_n\}_{n, m}, \varphi^m, \max(n_m, k_m)) .$$

Итак, мы доказали $D(\varphi, \{H_n\}_{n, m})$, что и требовалось.

Доказательство теоремы 1. Из $\alpha(f)$ следует по лемме 1 и замечанию 3 из [10]

$$\alpha(V^+\langle f, 0 \rangle) \& \alpha(V^-\langle f, 0 \rangle) \& f = f(0) + V^+\langle f, 0 \rangle - V^-\langle f, 0 \rangle .$$

Как мы знаем, $V^+\langle f, 0 \rangle$ и $V^-\langle f, 0 \rangle$ неубывающие функции. Согласно лемме 5 существует $\{H_n^1\}_{n, m} \in S$ и $\{H_n^2\}_{n, m} \in S$ такие, что $D(V^+\langle f, 0 \rangle, \{H_n^1\}_{n, m}) \& D(V^-\langle f, 0 \rangle, \{H_n^2\}_{n, m})$. Выполнено

$$(\{H_n^1\}_{n, m} - \{H_n^2\}_{n, m}) \in S \quad (\text{лемма 1 из [5]}), \quad \{H_n^1\}_{n, m} + (\{0, 1, \sigma, 0\}_{n, m} - \{H_n^2\}_{n, m}) = \{H_n^1\}_{n, m} - \{H_n^2\}_{n, m} \text{ и по замечанию 1 } D(f, \{H_n^1\}_{n, m} - \{H_n^2\}_{n, m}) .$$

Ввиду этого и леммы 1 теорема 1 доказана.

На основании теоремы 1, леммы 1 из [5], замечания 1, следствия теоремы 2, теоремы 1 из [5] и [10] легко доказать

следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть f_1 и f_2 функции, $\alpha(f_1)$ & $\alpha(f_2)$. Тогда выполнено $\alpha(f_1 + f_2)$ в том и только том случае, если $f_1 + f_2$ — функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$.

Следствие 2. Функция f представима в виде $\varphi + g$, где φ сингулярная функция, а g абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция, в том и только в том случае, если выполнено одно из двух следующих условий:

- 1) f функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ и существует $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что $D(f, \{G_n\}_n)$;
- 2) $\alpha(f)$ и существует $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что для почти всех КДЧ x на $0 \Delta 1$ верно

$$\exists u(P(u, \{G_n\}_n, x) \& D(u, f, x)) .$$

Замечание 6. Пусть φ функция такая, что φ возрастает на $0 \Delta 1$ и $0 \leq \varphi(0) < \varphi(1) \leq 1$. Тогда можно построить неубывающую функцию ψ , для которой выполнено $\forall x (0 \leq x \leq 1 \supset \psi(\varphi(x)) = x \& (0 \leq x \leq \varphi(0) \supset \psi(x) = 0) \& (\varphi(0) \leq x \leq \varphi(1) \supset \varphi(\psi(x)) = x) \& (\varphi(1) \leq x \leq 1 \supset \psi(x) = 1))$.

Если $\alpha(\varphi)$, то легко доказать

$$\forall a (\neg(a=0) \supset \text{Var}(|a| \cdot (1 - (\varphi(1) - \varphi(0)) + V\langle \varphi, \frac{1}{a} \rangle(0 \Delta 1)), \psi - h_a, 0 \Delta 1))$$

и, следовательно, выполнено $\alpha(\psi)$.

Замечание 7. Пусть μ КДЧ, $0 < \mu < 1$, а Φ покрытие такое, что $\forall k (\sum_{i=1}^k |\Phi_i| < \mu)$. Тогда согласно теореме 2.4 из [3] ряд $\sum_k |\Phi_k|$ не сходится.

Можно построить возрастающую на $0 \triangle 1$ функцию g и покрытие Ψ , для которых выполнено $g = g/\Phi$ & $\forall k (g(\exists n(\Phi_k)) = \exists n(\Psi_k) \& g(\exists n(\Phi_k)) = \exists n(\Psi_k)) \& (\sum_{i=1}^k |\Psi_i| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1)$.

Из сказанного непосредственно следует абсолютная непрерывность функции g и по теореме из [9] $\alpha(g)$. Согласно замечанию 6 существует возрастающая на $0 \triangle 1$ функция f такая, что $\forall x (0 \leq x \leq 1 \supset f(g(x)) = g(f(x)) = x)$ & $\alpha(f)$, и, следовательно, $f = f/\Psi$. Из свойств покрытий Φ и Ψ следует по теореме из [9], что f не может быть абсолютно непрерывной на $0 \triangle 1$. Согласно лемме 5 из [10] f нельзя представить в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции. Но тогда по следствию 2 теоремы 1 не существует $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ верно $\exists m (P(\mu, \{G_m\}_m, x) \& D(\mu, f, x))$.

Пример. Существуют неубывающие функции φ_1 и φ_2 такие, что $\alpha(\varphi_1) \& \alpha(\varphi_2) \& D(\varphi_1 - \varphi_2, \{0x1x0\}_m) \& \neg \alpha(\varphi_1 - \varphi_2)$ и, следовательно, функция $\varphi_1 - \varphi_2$ не является сингулярной.

Доказательство. Пусть μ КДЧ и Φ покрытие такие, что $\forall k (\sum_{i=1}^k |\Phi_i| < \mu < 1)$. Пусть Ψ покрытие, построенное на основании Φ в замечании 7, а f функция, являющаяся конструктивным аналогом функции Θ из [11, стр.232-3].

Мы построим неубывающие функции φ_1 и φ_2 такие, что

$$\forall i \& x (1 \leq i \leq 2 \& x \in \Psi_k \supset \varphi_i(x) = \frac{1}{2}.$$

$$. (\partial \mathcal{L}(\Phi_k) + |\Phi_k| \cdot f(\frac{2}{|\Psi_k|} \cdot (\alpha - \partial \mathcal{L}(\Psi_k) - \frac{i-1}{2} \cdot |\Psi_k|))) .$$

Тогда ввиду $\sum_{i=1}^k |\Psi_i| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$ нетрудно показать, что φ_1 и φ_2 сингулярные функции (см. доказательство примера из [10] и замечание 1). Следовательно, согласно замечанию 1 и лемме 1 выполнено

$$\alpha(\varphi_1) \& \alpha(\varphi_2) \& \mathcal{D}(\varphi_1 - \varphi_2, \{0 \times 1 \sigma 0\}_m) .$$

Для всякого НЧ k функция $\varphi_1 - \varphi_2$ является неубывающей на $\partial \mathcal{L}(\Psi_k) \Delta \frac{1}{2} \cdot (\partial \mathcal{L}(\Psi_k) + \partial \mathcal{M}(\Psi_k))$ и невозрастающей на $\frac{1}{2} \cdot (\partial \mathcal{L}(\Psi_k) + \partial \mathcal{M}(\Psi_k)) \Delta \partial \mathcal{M}(\Psi_k)$

$$\begin{aligned} & \text{и выполнено } \varphi_1(\partial \mathcal{L}(\Psi_k)) - \varphi_2(\partial \mathcal{L}(\Psi_k)) = \\ & = \varphi_1(\partial \mathcal{M}(\Psi_k)) - \varphi_2(\partial \mathcal{M}(\Psi_k)) = 0 \& \varphi_1(\frac{1}{2} \cdot (\partial \mathcal{L}(\Psi_k) + \\ & + \partial \mathcal{M}(\Psi_k))) - \varphi_2(\frac{1}{2} \cdot (\partial \mathcal{L}(\Psi_k) + \partial \mathcal{M}(\Psi_k))) = \\ & = \frac{1}{2} \cdot (\partial \mathcal{L}(\Phi_k) + |\Phi_k| - \partial \mathcal{L}(\Phi_k)) = \frac{1}{2} \cdot |\Phi_k| . \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\varphi_1 - \varphi_2$ является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если сходится ряд $\sum_k |\Phi_k|$. Однако согласно теореме 2.4 из [3] ряд $\sum_k |\Phi_k|$ не сходится. Следовательно, $\neg \alpha(\varphi_1 - \varphi_2)$ и $\varphi_1 - \varphi_2$ не является сингулярной функцией (лемма 2 из [10]).

Л и т е р а т у р а

- [1] НАТАНСОН И.П.: Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.
- [2] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Проблемы конструктивного направления в математике 2 (сборник работ), Труды Мат. инст. им. В.А.

Стеклова, т. LXVII (1962), стр. 385-457.

- [3] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д. и ЦЕЙТИН Г.С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, там же, стр. 458-502.
- [4] ДЕДУТ О.: Интеграл Лебега в конструктивном анализе, Записки научных семинаров Ленинградского отд. Мат. инст. им. В.А. Стеклова, т. 4 (1967), стр. 30-43.
- [5] ДЕДУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10 (1969), 261-284.
- [6] ДЕДУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10 (1969), 463-492.
- [7] ДЕДУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 10 (1969), 167-175.
- [8] ДЕДУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11 (1970), 667-690.
- [9] ДЕДУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 11 (1970), 705-726.
- [10] ДЕДУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции,

Comment.Math.Univ.Carolinae

12(1971), 587-610.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83

Praha Karlín,

Československo

(Oblatum 15.3.1971)

