

Werk

Label: Article

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?316342866_0012|log6

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

REGULARISATION POUR LES PROBLÈMES À OPÉRATEURS MONOTONES ET
LA MÉTHODE DE GALERKINE

Stefan CRUCEANU, Bucuresti

L'objet de cette Note est l'étude d'une méthode de régularisation pour les équations à opérateurs monotones (non-potentiels).

L'idée du départ c'est d'employer en tant que facteur régularisant un opérateur monotone de type potentiel.

Ainsi on peut, outre les concepts topologiques usités d'habitude pour assurer l'existence des solutions des équations à opérateurs monotones, utiliser aussi des concepts variationnels qui permettent la localisation d'une solution de l'équation initiale vers laquelle converge dans la norme la suite des solutions régularisantes.

Le critère de régularité par rapport auquel on justifie l'applicabilité de la méthode - c'est la résolution par la méthode de Galerkin.

1. Préliminaires

On va d'abord établir les notations et on va rappeler certaines définitions.

Soit X un espace de Banach réel et soit X^* son dual. La dualité entre les deux espaces sera notée par \langle , \rangle .

AMS, Primary 47H05, 47H15, 49D15
Secondary 47H10

Ref.Ž. 7.978.4

On utilisera les symboles " \rightarrow " et " \rightharpoonup " pour désigner la convergence forte et faible dans X .

Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de sous-espaces de dimensions finies de X , ainsi que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X$ et soit $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ la suite des projecteurs correspondants ($P_n \in L(X)$, $P_n^2 = P_n$ et $P_n(X) = X_n$) ainsi que $\|P_n\| \leq C$ ($\forall n=1,2,\dots$).

Si P_n^* est l'adjoint de l'opérateur P_n , on notera par $Y_n = P_n^*(X^*)$.

Le quadruple de suites $\Gamma_n = (\{X_n\}, \{Y_n\}; \{P_n\}, \{P_n^*\})$ s'appelle "schéma d'approximation Galerkin" ([2], [8]).

Soit l'application $T: X \rightarrow X^*$. L'équation

$$Tx = f; f \in X^*$$

s'appelle résoluble par approximation ([8]) (faiblement résoluble par approximation) par rapport à Γ_n si elle admet une solution unique x_0 et si pour chaque $n \in \mathbb{N}$ l'équation

$$P_n^* Tx = P_n^* f; x \in X_n$$

admet une solution unique $x_n \in X_n$ ainsi que $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \rightarrow x_0$) lorsque $n \rightarrow \infty$.

L'opérateur $T: X \rightarrow X^*$ s'appelle monotone si

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0 \quad (\forall x, y \in X).$$

Si dans l'inégalité en haut on a le signe $>$ pour tous les $x \neq y$ alors l'opérateur T s'appelle strictement monotone.

S'il y a la fonction $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, monotone avec $\omega(0) = 0$ ainsi que

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \omega(\|x - y\|) \quad (\forall x, y \in X)$$

alors l'opérateur T s'appelle uniformément monotone.

Une fonctionnelle $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ s'appelle strictement convexe si

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(y) \quad (\forall) x, y \in X, x \neq y.$$

S'il y a une fonction $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, monotone avec $\omega(0) = 0$ ainsi que

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(y) - \omega(\|x-y\|) \quad (\forall) x, y \in X$$

alors la fonctionnelle g s'appelle uniformément convexe.

Si la fonctionnelle g est différentiable Gâteaux à gradient G alors sa convexité stricte est équivalente à la monotonie stricte de l'opérateur G et sa convexité uniforme est équivalente à la monotonie uniforme de l'opérateur G ([7]).

2. Hypothèses

Soit D un ensemble convexe borné et fermé de l'espace de Banach réel, reflexif et séparable X . On suppose que $\theta \in \text{int } D$.

Soit $T: X \rightarrow X^*$ un opérateur monotone, continu qui satisfait à la condition:

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad (\forall) x \in \partial D \quad (\text{la frontière de } D).$$

Quoique dans les hypothèses en haut l'équation

$$(1) \quad Tx = \theta$$

admet dans D (cf.[6]) au moins une solution, pourtant en général elle n'est pas résolvable par l'approximation.

Si $\Gamma_m = (\{X_m\}, \{Y_m\}; \{P_m\}, \{P_m^*\})$ est un schéma d'approximation Galerkin, alors tout ce qu'on peut affirmer sur la résolubilité par approximation de l'équation (1) est que l'équation approximante

$$P_m^* Tx = \theta \quad m = 1, 2, \dots \quad x \in X_m$$

admet une solution (en général pas unique) dans l'ensemble $D_m = D \cap X_m$, et lorsque $m \rightarrow \infty$ toute sous-suite faible-

ment convergente formée des solutions des équations approximantes a pour limite une solution de l'équation (1) ([5]).

Pour construire une solution de l'équation (1) on lui rattachera une famille d'équations dépendantes d'un paramètre $\epsilon > 0$ ainsi que chacune des équations de la famille soit résolvable par approximation par rapport à Γ_m .

On démontrera que lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ la suite des solutions des équations de la famille convergera fortement vers une certaine solution de l'équation initiale.

Soit q une fonctionnelle strictement convexe, différentiable Fréchet à gradient G . On suppose que G est continu et borné (applique les ensembles bornés de X dans des ensembles bornés de X^*) et $G\theta = \theta$ (si la fonctionnelle q ne satisfait pas à cette dernière condition alors elle peut être remplacée par la fonctionnelle $q(x) - \langle G\theta, x \rangle$).

3. La résolubilité par approximation des équations régularisantes

Pour chaque $\epsilon > 0$ on considère l'équation régularisante:

$$(2) \quad Tx + \epsilon Gx = \theta .$$

Théorème 1. a) Pour chaque $\epsilon > 0$ l'équation (2) est faiblement résolvable par approximation.

b) Si la fonctionnelle q est uniformément convexe, alors l'équation (2) est résolvable par approximation.

Démonstration: a) Pour $(\forall) x \in \partial D$ on a

$$(3) \quad \langle Tx + \epsilon Gx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle + \epsilon \langle Gx - G\theta, x - \theta \rangle > 0 .$$

Soit $D_m = D \cap X_m$. De la relation (3) il résulte pour $x \in \partial D_m$

$$(4) \quad \langle P_m^* T x + \varepsilon P_m^* G x, x \rangle = \langle T x + \varepsilon G x, P_m x \rangle = \langle T x + \varepsilon G x, x \rangle \geq 0.$$

En identifiant les espaces finies dimensionnels X_m et Y_m de l'inégalité (4) (cf. [6], p.127) il résulte qu'il existe l'élément $x_m^\varepsilon \in D_m$ ainsi que

$$(4a) \quad P_m^* T x_m^\varepsilon + \varepsilon P_m^* G x_m^\varepsilon = \theta.$$

L'opérateur $P_m^* T + \varepsilon P_m^* G$ étant strictement monotone sur X_m il résulte que x_m^ε est la solution unique dans X_m de l'équation $P_m^* T x + \varepsilon P_m^* G x = \theta$.

La suite $\{x_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ étant incluse dans l'ensemble borné D de l'espace reflexif X , contient une sous-suite $\{x_{m_k}^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$ qui tend dans la topologie faible vers un certain élément x^ε .

L'ensemble D étant faiblement fermé (il est convexe et fermé) on trouve que $x^\varepsilon \in D$.

On montrera que x^ε est la solution de l'équation (2).

De la monotonie de l'opérateur $T^\varepsilon = T + \varepsilon G$ on a:

$$\langle T^\varepsilon P_{m_k} x - T^\varepsilon x_{m_k}^\varepsilon, P_{m_k} x - x_{m_k}^\varepsilon \rangle \geq 0 \quad (\forall) x \in X$$

c'est à dire

$$(5) \quad \langle P_{m_k}^* T^\varepsilon P_{m_k} x - P_{m_k}^* T^\varepsilon x_{m_k}^\varepsilon, x - x_{m_k}^\varepsilon \rangle \geq 0.$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, $x_{m_k}^\varepsilon \rightarrow x^\varepsilon$, et parce que T^ε est continu on aura (cf. [2]) $P_{m_k}^* T^\varepsilon P_{m_k} x \rightarrow T x$.

Donc à la limite pour $k \rightarrow \infty$, puisque

$$P_{m_k}^* T^\varepsilon x_{m_k}^\varepsilon = \theta, \quad \text{la relation (5) devient}$$

$$(6) \quad \langle T^\varepsilon x, x - x^\varepsilon \rangle \geq 0 \quad (\forall) x \in X$$

ce qui représente une condition suffisante ([1]) pour que

$$T^\varepsilon x^\varepsilon = \theta .$$

Parce que l'opérateur $T^\varepsilon = T + \varepsilon G$ est strictement monotone l'équation (2) n'admet pour solution que x^ε . Donc toute sous-suite faiblement convergente de la suite $\{x_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ a pour limite l'élément x^ε .

Ainsi $x_n^\varepsilon \rightarrow x^\varepsilon$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

b) L'opérateur G étant le gradient d'une fonctionnelle uniformément convexe on aura

$$\langle T^\varepsilon P_n x^\varepsilon - T^\varepsilon x_n^\varepsilon, P_n x^\varepsilon - x_n^\varepsilon \rangle \geq \varepsilon \omega(\|P_n x^\varepsilon - x_n^\varepsilon\|) \geq 0$$

ou puisque $P_n x_n^\varepsilon = x_n^\varepsilon$:

$$(7) \langle P_n^* T^\varepsilon P_n x^\varepsilon - P_n^* T^\varepsilon x_n^\varepsilon, x^\varepsilon - x_n^\varepsilon \rangle \geq \varepsilon \omega(\|P_n x^\varepsilon - x_n^\varepsilon\|) \geq 0 .$$

Mais $T_n^\varepsilon x_n^\varepsilon = \theta$, et lorsque $n \rightarrow \infty$ il résulte $x_n^\varepsilon \rightarrow x^\varepsilon$ et $P_n^* T^\varepsilon P_n x^\varepsilon \rightarrow T^\varepsilon x^\varepsilon = \theta$.

Donc le premier membre de l'inégalité (7) tend vers zéro.

On déduit que $\omega(\|P_n x^\varepsilon - x_n^\varepsilon\|) \rightarrow 0$

c'est à dire $P_n x^\varepsilon - x_n^\varepsilon \rightarrow \theta$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

D'autre part

$$P_n x^\varepsilon \rightarrow x^\varepsilon$$

donc $x_n^\varepsilon \rightarrow x^\varepsilon$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Q.E.D.

4. Le théorème de convergence

Soit

$$U^* = \{x / x \in D; Tx = \theta\}$$

comme on l'a déjà remarqué l'ensemble U^* est non-vide.

Étant inclus dans l'ensemble D , l'ensemble U^* est borné. Parce que l'opérateur T est continu et monotone il

résulte que l'ensemble U^* est convexe et fermé ([1]).
Ainsi la fonctionnelle q réalise son minimum sur U^*
dans un point (unique) x_{min}^*

$$q(x_{min}^*) = \min_{x \in U^*} q(x) .$$

Par suite la suivante proposition sera nécessaire:

Lemme 1 (Demjanov et Rubinov [4]). L'élément $x_{min}^* \in U^*$ réalise le minimum de la fonctionnelle q sur l'ensemble U^* si et seulement si

$$(8) \quad \langle G x_{min}^*, x - x_{min}^* \rangle \geq 0 \quad (\forall) x \in U^* .$$

Le théorème qui suit établit la liaison qui existe entre les solutions x^ε de la famille d'équations régularisantes (2) et les solutions de l'équation (1).

Théorème 2. a) Si $\varepsilon \rightarrow 0$ alors $x^\varepsilon \rightarrow x_{min}^*$.

b) Si la fonctionnelle q est uniformément convexe alors de $\varepsilon \rightarrow 0$ il résulte $x^\varepsilon \rightarrow x_{min}^*$.

Démonstration: De la réflexivité de l'espace X et du fait que la famille $\{x^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est bornée (est incluse dans D) il résulte l'existence d'un élément $x_0 \in D$ et d'une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($\varepsilon_n > 0$) ainsi que

$$x^{\varepsilon_n} \rightarrow x_0 .$$

On démontrera que $x_0 \in U^*$. Pour cela il suffit de montrer que

$$(9) \quad \langle Tx, x - x_0 \rangle \geq 0 \quad (\forall) x \in X .$$

Soit $x \in X$. De la monotonie de l'opérateur T on a

$$\langle Tx - Tx^{\varepsilon_n}, x - x^{\varepsilon_n} \rangle \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Parce que

$$Tx^{\varepsilon_n} + \varepsilon_n Gx^{\varepsilon_n} = \theta$$

l'inégalité en haut devient

$$(10) 0 \leq \langle Tx + \varepsilon_n Gx^{\varepsilon_n}, x - x^{\varepsilon_n} \rangle = \langle Tx, x - x^{\varepsilon_n} \rangle + \varepsilon_n \langle Gx^{\varepsilon_n}, x - x^{\varepsilon_n} \rangle.$$

Le second terme de la somme de droite tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$, car l'opérateur G étant borné on a

$$0 \leq |\langle \varepsilon_n Gx^{\varepsilon_n}, x - x^{\varepsilon_n} \rangle| \leq \varepsilon_n \sup_{z \in D} \|Gz\| \cdot \sup_{z \in D} \|x - z\| \rightarrow 0.$$

Donc, à la limite l'inégalité (10) donne

$$\langle Tx, x - x_0 \rangle \geq 0$$

c'est à dire $x_0 \in U^*$.

Soit à présent $x \in U^*$ arbitraire. Des égalités

$$Tx + \varepsilon_n Gx = \varepsilon_n Gx,$$

$$Tx^{\varepsilon_n} + \varepsilon_n Gx^{\varepsilon_n} = \theta,$$

on obtient:

$$\langle Tx - Tx^{\varepsilon_n}, x - x^{\varepsilon_n} \rangle + \varepsilon_n \langle Gx - Gx^{\varepsilon_n}, x - x^{\varepsilon_n} \rangle = \varepsilon_n \langle Gx, x - x^{\varepsilon_n} \rangle.$$

Les opérateurs T et G étant monotones il résulte

$$\langle Gx, x - x^{\varepsilon_n} \rangle \geq 0.$$

À la limite, lorsque $n \rightarrow \infty$, puisque $x^{\varepsilon_n} \rightarrow x_0$ on obtient

$$(11) \quad \langle Gx, x - x_0 \rangle \geq 0 \quad (\forall) x \in U^*.$$

L'ensemble U^* étant convexe, l'élément $x_t = (1-t)x + tx_0$, $t \in (0, 1)$ appartient lui aussi à l'ensemble U^* .

En écrivant la relation (11) pour x_t on obtient

$$(1-t) \langle Gx_t, x - x_t \rangle \geq 0 \quad \text{ou}$$

$$\langle Gx_t, x - x_0 \rangle \geq 0 .$$

À la limite lorsque $t \rightarrow 1$, l'opérateur G étant continu il résulte

$$\langle Gx_0, x - x_0 \rangle \geq 0 .$$

Du Lemme 1 on déduit que $x_0 = x_{min}^*$

Ainsi, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, toute suite faiblement convergente de la famille $\{x^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ a pour limite l'élément x_{min}^* .

Donc $x^\varepsilon \rightarrow x_{min}^*$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

b) Des égalités

$$Tx_{min}^* + \varepsilon Gx_{min}^* = \varepsilon Gx_{min}^* ,$$

$$Tx^\varepsilon + Gx^\varepsilon = \theta ,$$

on obtient:

$$\langle Tx_{min}^* - Tx^\varepsilon, x_{min}^* - x^\varepsilon \rangle + \varepsilon \langle Gx_{min}^* - Gx^\varepsilon, x_{min}^* - x^\varepsilon \rangle =$$

$$= \varepsilon \langle Gx_{min}^*, x_{min}^* - x^\varepsilon \rangle .$$

De là, l'opérateur T étant monotone, on déduit

$$0 \leq \omega(\|x_{min}^* - x^\varepsilon\|) \leq \langle Gx_{min}^* - Gx^\varepsilon, x_{min}^* - x^\varepsilon \rangle \leq$$

$$\leq \langle Gx_{min}^*, x_{min}^* - x^\varepsilon \rangle .$$

À la limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, puisque $x^\varepsilon \rightarrow x_{min}^*$ il résulte

$$\langle Gx_{min}^*, x_{min}^* - x^\varepsilon \rangle \rightarrow 0$$

et de l'inégalité précédente on déduit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\|x_{min}^* - x^\varepsilon\|) = 0 ,$$

c'est à dire:

$$\|x_{min}^* - x^\varepsilon\| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Q.E.D.

Remarques 1. Si X est un espace de Hilbert alors le procédé indiqué en haut peut être utilisé pour construire les points fixes de certaines classes d'opérateurs.

Ainsi, si $A : X \rightarrow X$ est un opérateur continu, ainsi que l'opérateur $I - A$ (I = l'opérateur identité) est monotone et si A satisfait à la condition Leray-Schauder ([3])

$$\langle Ax, x \rangle \leq \|x\|^2 \quad (\forall) x \in \partial D$$

alors pour chaque $\varepsilon > 0$ l'opérateur $A - \varepsilon G$ admet dans X un point fixe unique $x^\varepsilon \in D$. Si $\varepsilon \rightarrow 0$ alors $x^\varepsilon \rightarrow x_{min}^*$ (ou $x^\varepsilon \rightarrow x_{min}^*$ si g est une fonctionnelle uniformément convexe) où x_{min}^* est ce point fixe de l'opérateur A , qui minimise la fonctionnelle g sur l'ensemble des points fixes de A qui appartiennent à l'ensemble D . On remarque que pour le cas particulier $G = I$ (l'opérateur identité est le gradient Fréchet de la fonctionnelle uniformément convexe $\frac{1}{2} \|x\|^2$) ce résultat a été obtenu par Browder et Petryshyn ([3]) et utilisé pour obtenir les points fixes des opérateurs non-linéaires par la méthode des approximations successives.

2. Si l'opérateur monotone et continu $U : X \rightarrow X^*$ est coercif, c'est à dire

$$\frac{\langle Ux, x \rangle}{\|x\|} \rightarrow \infty \quad \text{lorsque } \|x\| \rightarrow \infty$$

alors étant donné $y \in X^*$ il existe une boule fermée

$S^\psi(\theta) = \{x \in X : \|x\| \leq R^\psi\}$ ainsi que
 $\langle Ux, x \rangle \geq \langle \psi, x \rangle$ pour $x \in \partial S^\psi(\theta)$.

En prenant $Tx = Ux - \psi$, $x \in X$ et $D = S^\psi(\theta)$ les résultats obtenus en haut peuvent être appliqués pour construire la solution de l'équation

$$Ux = \psi.$$

3. On connaît le résultat suivant, conséquence de la méthode de régularisation de Tychonov pour le problème du minimum des fonctionnelles convexes ([7]):

Si $T: X \rightarrow X^*$ est un opérateur monotone et potentiel ainsi que l'équation

$$Tx = \theta$$

admet des solutions et si G est un opérateur strictement monotone et potentiel, la fonctionnelle g étant coercive, ($g(x) \rightarrow \infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$) alors pour chaque $\varepsilon > 0$ l'équation

$$Tx + \varepsilon Gx = \theta$$

admet une solution unique x^ε . Si $\varepsilon \rightarrow 0$ alors x^ε converge dans la topologie faible de X vers cette solution de l'équation $Tx = \theta$ qui minimise la fonctionnelle g .

On peut considérer que la méthode qu'on vient d'étudier est l'équivalent non-variationnel de ce résultat.

B i b l i o g r a p h i e

- [1] F.E. BROWDER: Problèmes non-linéaires. Les Presses de l'Université de Montréal, 1966.
- [2] F.E. BROWDER: Approximation - solvability of nonlinear

- functional equations in normed linear spaces. Arch.Rat.Mech.Anal.26(1967),33-43.
- [3] F.E. BROWDER, W.V. PETRYSHYN: Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space. J.Math.Anal.Appl.20(1967),197-228.
- [4] V.E. DEMJANOV, A.M. RUBINOV: The minimization of a smooth convex functional on a convex set. SIAM J.Control 5(1967),280-294.
- [5] D.G. de FIGUEIREDO: Fixed-point theorems for nonlinear operators and Galerkin approximations. J.Diff.Eq.3(1967),271-281.
- [6] R. KAČUROVSKIJ: Nelinejnye monotennye operatory v banchevych prestranstvach. Usp.Mat.Nauk XIII (1968),121-168.
- [7] E.S. LEVITIN, B.T. POLJAK: O schedimesti minimizirujuščich posledovatel'nostej v zadačach na uslevnyj ekstremum. Dekl.Akad.Nauk SSSR 168, 5,1966.

- [8] W.V. PETRYSHYN: Projection methods in nonlinear numerical functional analysis. J.Math.Mech.17 (1967),353-372.

Centrul de Calcul Economic si Cibernetica Economica
Bucuresti
Str.M. Eminescu Nr.5-7
Romania

(Oblatum 19.8.1970)

