Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

12,4 (1971)

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Александер КРАТОХВИЛ, Индржих НЕЧАС, Прага

В работе [1] И. Нечас установил дискретность спектра первой краевой задачи для нелинейного оператора Штурма - Лиувилля (Ш.Л.) второго порядка. Аналогичная задача для линейного оператора Ш.Л. четвертого порядка была решена Янчевским [3]. Целью настоящей работы является изучение спектра и собственных функций однородной первой краевой задачи для нелинейного оператора Ш.Л. четвертого порядка.

Пусть $C^{(k),\mu}$ пространство Шаудера функций на отрезке $[0, 1]$, имеющих непрерывные по Гельдеру с показателем μ производные до порядка k. Норму в этом пространстве будем обозначать $\| u \|_{(k),\mu}$. В случае $\mu = 0$ в место $C^{(k),0}$ будем писать $C^{(k)}$. Кроме того обозначим через $\| u \|_{2,p}$ норму в пространстве Соболева $W_p^{(2)}(0,1)$, т.е.

$$\| u \|_{2,p} = \{ \int_0^1 (|u''|^p + |u'|^p + |u|^p)\, dx \}^{\frac{1}{p}}$$

и

$$\overset{\circ}{W}{}_p^{(2)} = \{ u \in W_p^{(2)};\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \} .$$

AMS: Primary 47H15, 47H99 Ref. Ž. 7.978.5

Пусть

$p \ge 2,\ a \in C^{(1)},\ a(x) > 0,\ b \in C^{(0)},\ b(x) \ge 0, c \in C^{(0)}, c(x) > 0.$

Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(2)}$, $u \not\equiv 0$ является собственной функцией, а λ соответствующим собственным значением нелинейного однородного уравнения Ш.Л. четвертого порядка

$$(a|u''|^{p-2}u'')'' + (b - \lambda c)\ |u|^{p-2}u = 0 ,$$

если для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(2)}$ имеет место равенство

$$(1)\left\{\begin{array}{l}\int_0^1 \{a(x)\,|u''(x)|^{p-2}u''(x)\,v''(x)\ + \\ +\,(b(x) - \lambda c(x))\,|u(x)|^{p-2}u(x)\,v(x)\}\,dx = 0\ .\end{array}\right.$$

Из работ [1] и [2] следует, что для нашей задачи существует счетное множество собственных значений $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$, причем $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. Заметим, что λ_m могут не состовлять все множество собственных значений. Мы покажем, что их существует точно счетное множество.

Из теорем вложения немедленно следует, что существует первое собственное значение $\lambda_1 > 0$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты $c(x)$ и $b(x)$ удовлетворяют условию

(2) $\quad \lambda_1 c(x) - b(x) > 0 \qquad$ при $x \in [0, 1]$

и будем рассматривать только нормированные собственные функции, т.е. $\|u\|_{2,p} = 1$, соответствующие собственным значениям $\lambda \le N$, где N - некоторое фиксированное число.

Лемма 1. Пусть $u(x)$ произвольный собственный элемент, соответствующий собственному значению λ, тогда существуют такие постоянные A и B, что для почти всех x из $[0,1]$ имеет место формула

$$(3)\quad \begin{cases} M(x) \equiv a(x)\,|u''(x)|^{p-2}u''(x) + \\ + \int_0^x (x-\xi)(b(\xi)-\lambda c(\xi))\,|u(\xi)|^{p-2}u(\xi)\,d\xi = \\ = Ax+B \,. \end{cases}$$

Доказательство. Из формулы (1) немедленно следует, что

$$(4)\qquad \int_0^1 (M(x)+Ax+B)\,v''(x)\,dx = 0 \,.$$

Выберем постоянные A и B так, чтобы выполнялись условия

$$(5)\quad \begin{cases} \int_0^1 (M(x)+Ax+B)\,dx = 0 \,, \\ \int_0^1 (M(x)+Ax+B)x\,dx = 0 \,. \end{cases}$$

Пусть g произвольный элемент из пространства L_p, тогда функция

$$(6)\qquad v(x) = \int_0^x (x-\xi)(g(\xi)+C\xi+D)\,d\xi \,,$$

где постоянные C и D такие, что $v(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_p^{(2)}$

Подставляя в формулу (4) функцию $v(x)$ определенную равенством (6) получим в силу условий (5)

$$\int_0^1 (M(x)+Ax+B)\,g(x)\,dx = 0 \,.$$

Так как $g(x)$ произвольная функция из L_p, а $M(x)$ принадлежит сопряженному пространству, то $M(x) + Ax+B = 0$ почти всюду.

Лемма 2. Если u произвольный собственный элемент, то

$$u \in C^{(2),\frac{1}{p-1}} \,,\quad (a\,|u''|^{p-2}u'')' \in C^{(0)} \quad \text{и}$$

$$(7)\qquad \|u\|_{(2),\frac{1}{p-1}} \le c \,,$$

где постоянная c зависит только от N.

<u>Доказательство</u>. Из леммы 1 непосредственно вытекает

$$(8)\quad \begin{cases} |u''(x)| = \\ = \left| \dfrac{\int_0^x (x-\xi)(\lambda c(\xi)-b(\xi))|u(\xi)|^{p-2}u(\xi)d\xi + Ax + B}{a(x)} \right|^{\frac{1}{p-1}} \end{cases}$$

и

$$(a(x)|u''(x)|^{p-2}u''(x))' =$$

$$= \int_0^x (\lambda c(\xi) - b(\xi))|u(\xi)|^{p-2}u(\xi)d\xi + A .$$

<u>Лемма 3</u>. Если в некоторой точке $x_0 \in [0,1]$ имеет место равенство

$$u''(x_0) = 0 ,$$

то

$$(a(x)|u''(x)|^{p-2}u''(x))'_{x=x_0} \neq 0 .$$

<u>Доказательство</u>. Предположим, что существует такая точка $x_0 \in [0,1]$, в которой

$$(9)\quad \begin{cases} u''(x_0) = 0 , \\ \text{и} \\ (a(x)|u''(x)|^{p-2}u''(x))'_{x=x_0} = 0 . \end{cases}$$

Тогда из леммы 1 следует, что

$$(10)\quad \begin{cases} a(x)|u''(x)|^{p-2}u''(x) = \\ = \int_{x_0}^x (x-\xi) \quad (\lambda c(\xi)-b(\xi))|u(\xi)|^{p-2}u(\xi)d\xi + Ax + B . \end{cases}$$

Из (9) получаем $A = B = 0$.

Рассмотрим теперь следующие случаи:

α) Пусть $u(x_0) > 0$, $u'(x_0) > 0$; тогда из непрерывности функций u, u' и формул (2),(10) немедленно следует, что $u(1) > 0$, $u'(1) > 0$, чего не может быть, так как $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(2)}$.

β) Если $u(x_0) > 0$, $u'(x_0) < 0$ аналогично получаем $u(0) > 0$, $u'(0) < 0$.

γ) Если $u(x_0) > 0$, $u'(x_0) = 0$, или $u(x_0) = 0$, $u'(x_0) > 0$, то $u(1) > 0$, $u'(1) > 0$.

δ) Пусть $u(x_0) = u'(x_0) = 0$. По лемме 2

$$|u(x)| \le c_1 |x - x_0|^2$$

при $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \cap \langle 0, 1 \rangle$.

Подставляя эту оценку в формулу (10) имеем

$$|u(x)| \le c_1 c_2 |x - x_0|^4 .$$

Повторяя эту операцию k раз получаем

$$|u(x)| \le c_1 c_2^k |x - x_0|^{2k+2} .$$

Пусть $\delta < c_2^{-1}$. Тогда устремляя k к бесконечности, получим, что $u(x) = 0$ при $x \in \langle 0, 1 \rangle \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ откуда легко следует, что $u(x) \equiv 0$ на отрезке $[0, 1]$.

Таким образом лемма доказана.

<u>Замечание 1</u>. Также как в случае α) доказательства леммы 3 можно показать, что $u''(0) \neq 0$.

<u>Лемма 4</u>. Если $u''(x_0) = 0$, то в окрестности точки x_0

$$\left\{\begin{aligned} & c_1 |x - x_0|^{\frac{1}{p-1}} \le |u''(x)| \le \\ & \le c_2 |x - x_0|^{\frac{1}{p-1}} . \end{aligned}\right. \tag{11}$$

<u>Доказательство</u>. Обозначим правую часть равенства (10) через $R(x)$. Так как $R(x_0) = 0$, то по предыдущей

лемме $R'(x_0) \neq 0$. По этому в окрестности точки x_0

$$c_1 |x - x_0| \leq |R(x)| \leq c_2 |x - x_0|$$

и из соотношения

$$|u''(x)| = \left|\frac{R(x)}{a(x)}\right|^{\frac{1}{p-1}}$$

вытекает утверждение леммы.

Рассмотрим теперь линейную задачу, которая получается с помощью дифференцирования в смысле Фреше предыдущей задачи.

Для каждого фиксированного собственного элемента u нелинейной задачи определяем пространство Гильберта $W^{(2)}_{2,\varphi}$ где вес $\varphi(x) = |u''(x)|^{p-2}$, с нормой

$$\|h\|_{2,2,\varphi} = \left(\int_0^1 (\varphi(x)|h''(x)|^2 + |h'(x)|^2 + |h(x)|^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

<u>Лемма 5</u>. Если $1 \leq q < 2\,\dfrac{p-1}{2p-3}$, то $W^{(2)}_{2,\varphi} \subset W^{(2)}_{q}$ алгебраически и топологически.

<u>Доказательство</u>.

$$\int_0^1 |h''(x)|^q dx \leq \left(\int_0^1 |h''(x)|^2 |u''(x)|^{p-2} dx\right)^{\frac{q}{2}} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_0^1 |u''(x)|^{-\frac{p-2}{2-q}q} dx\right)^{\frac{2-q}{2}} \leq c\,\|h\|^q_{2,2,\varphi},$$

так как в окрестности точки x_0, где $u(x_0) = 0$ по лемме 4 справедливо неравенство

$$|u''(x)|^{-\frac{p-2}{2-q}q} \leq c\,|x - x_0|^{-\frac{p-2}{p-1}\frac{q}{2-q}}$$

и

$$\frac{p-2}{p-1}\,\frac{q}{2-q} < 1 .$$

Будем говорить, что функция $h \in \overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,\varphi}$, $h \not\equiv 0$ является собственным элементом, а λ соответствующим собственным значением задачи Ш.Л. в вариациях

$$(a|u''|^{p-2}h'')'' + (b-\lambda c)|u|^{p-2}h = 0 ,$$

если для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,\varphi}$ имеет место равенство

$$(12)\quad \begin{cases} \int_0^1 (a(x)\,|u''(x)|^{p-2}h''(x)\,v''(x) + \\ + (b(x)-\lambda c(x))|u(x)|^{p-2}h(x)v(x))\,dx = 0 . \end{cases}$$

Лемма 6. Если h собственный элемент задачи Ш.Л. в вариациях, то функция h'' непрерывна по Гельдеру с показателем $\frac{p-2}{p-1}$ в окрестности тех точек, где $u''(x) \neq 0$. Если $u''(x_0) = 0$, то в окрестности x_0

$$(13)\quad |h''(x)| \leq c\,|x-x_0|^{-\frac{p-2}{p-1}} .$$

Кроме того функция

$$(a(x)|u''(x)|^{p-2}h''(x))' \in C^{(0)} .$$

Доказательство. Полагая

$$N(x) \equiv a(x)|u''(x)|^{p-2}h''(x) + \\ + \int_0^x (x-\xi)(b(\xi) - \lambda c(\xi))|u(\xi)|^{p-2}h(\xi)\,d\xi ,$$

получаем из (12)

$$(14)\quad \int_0^1 (N(x) + Cx + D)\,v''(x)\,dx = 0$$

для любой $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,\varphi}$, где C и D любые постоянные.

Положим

(15) $$v(x) = \int_0^x (x-\xi)(N(\xi)+A\xi+B)\,d\xi ,$$

где постоянные A и B такие, что $v(1) = v'(1) = 0$.

Пусть $C = A$ и $D = B$, тогда подставляя (15) в (14) получаем $0 = \int_0^1 (N(x)+Ax+B)^2\,dx$.

Поэтому почти всюду

(16) $$\begin{cases} a(x)|u''(x)|^{p-2}h''(x) = R(x) , \quad \text{где} \\ R(x) = \int_0^x (x-\xi)(\lambda c(\xi) - \\ - b(\xi))|u(\xi)|^{p-2}h(\xi)\,d\xi + Ax + B . \end{cases}$$

Тогда из леммы 4 следует наше утверждение.

<u>Лемма 7</u>. Собственные значения задачи Ш.Л. в вариациях простые.

<u>Доказательство</u>. Пусть h_1 и h_2 два собственных элемента соответствующие собственному значению λ. Рассмотрим

$$h = c_1 h_1 + c_2 h_2 , \quad h \in \overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,\varphi}$$

Так как $u''(0) \neq 0$ (замечание 1), то из леммы 6 следует, что h'' непрерывна по Гельдеру в окрестности 0.

Постоянные c_1, c_2 возможно избрать таким образом, что $h''(0) = 0$.

Рассмотрим следующие случаи.

α) Если $(a(x)|u''(x)|^{p-2}h''(x))'_{x=0} > 0$, то

$$a(x)|u''(x)|^{p-2}h''(x) > 0$$

для $0 < x \leq \delta$ при δ достаточно малом, следовательно $h''(x) > 0$ при $0 < x \leq \delta$ и из (16) получаем $h(1) > 0$, что невозможно;

β) Пусть теперь

$$(a(x)|u''(x)|^{p-2}h''(x))'_{x=0} = 0 ;$$

тогда постоянные A и B в формуле (16) равны нулю и следовательно

$$h(x) = \int_0^{\xi} K(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi ,$$

где

$$K(x,\xi) = \int_{\xi}^{x} dt \int_{\xi}^{t} \frac{(\tau-\xi)(\lambda c(\xi) - b(\xi))|u(\xi)|^{p-2}}{a(\tau)|u''(\tau)|^{p-2}}\, d\tau .$$

Отсюда, учитывая (11), получаем, что h удовлетворяет однородному интегральному уравнению Вольтерра с непрерывным ядром. Тогда $h \equiv 0$ и поэтому функции h_1, h_2 линейно зависимы.

Теперь вернемся к решению нелинейной задачи.

<u>Лемма 8</u>. Если u и $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие собственные элементы, что $\| u_1 - u_n \|_{2,p} \leq c_1$, то

(17) $$|\lambda - \lambda_n| \leq c_2 \| u - u_n \|_{2,2}^2 .$$

<u>Доказательство</u>. λ и u являются собственным значением и собственной функцией тогда и только тогда когда для функционала

(18) $$\Phi(u) = \frac{\int_0^1 (a(x)|u''(x)|^p + b(x)|u(x)|^p)\, dx}{\int_0^1 c(x)|u(x)|^p\, dx}$$

выполнены условия $\Phi(u) = \lambda$ и $D\Phi(u,v) = 0$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(2)}$.

Так как функционал Φ два раза непрерывно дифференцируемый по Фреше, то

$$\lambda_m - \lambda = \Phi(u_m) - \Phi(u) =$$
$$= \int_0^1 D\Phi(u + t(u_m - u), u_m - u)\, dt =$$
$$= \int_0^1 (D\Phi(u + t(u_m - u), u_m - u) - D\Phi(u, u_m - u))dt =$$
$$= \int_0^1 t dt \int_0^1 D^2\Phi(u + \tau t(u_m - u), u_m - u, u_m - u)\, d\tau \quad ,$$

откуда в силу леммы 2 следует неравенство (17).

<u>Теорема</u>. У нелинейного уравнения Ш.Л. четвертого порядка точно счетное множество собственных значений

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

причем $\lim\limits_{m \to \infty} \lambda_m = + \infty$.

Множество нормированных собственных элементов изолировано. Всякому собственному значению соответствует конечное множество нормированных собственных элементов.

<u>Доказательство</u>. Существование точно счетного множества собственных элементов немедленно следует из второго утверждения, как показано в [1].

Поэтому покажем, что множество нормированных собственных элементов изолировано.

Пусть это не так. Тогда существуют собственные элементы $u_m, u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(2)}$, $u_m \neq u$, $\| u_m - u \|_{2,p} \to 0$.
Для соответствующих собственных значений в силу (17) имеем $\lambda_m \to \lambda$.

Из леммы 2 следует, что из последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность (будем обозначать ее также через $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$) такую, что

(19) $\quad \| u_n - u \|_{(2),\mu} \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$,

где

$$0 < \mu < \frac{1}{p-1} .$$

Из (1) немедленно получаем

$$(20) \quad \begin{cases} (p-1) \int_0^1 a(x) \int_0^1 | u''(x) + \tau (u_n''(x) - u''(x)) |^{p-2} d\tau \cdot \\ \cdot (u_n''(x) - u''(x)) v''(x) dx = (p-1) \int_0^1 (\lambda c(x) - \\ - b(x)) \int_0^1 | u(x) + \tau (u_n(x) - u(x)) |^{p-2} d\tau \cdot \\ \cdot (u_n(x) - u(x)) v(x) dx + \\ + (\lambda_n - \lambda) \int_0^1 c(x) | u_n(x) |^{p-2} u_n(x) v(x) dx . \end{cases}$$

Обозначим через y_i , $i = 1, 2, \dots, s$ нули функции u'' . Из леммы 3 в силу (19) получаем, что для $n \geq n_0$ u_n'' имеет то-же число нулей что u'' и что эти нули

(21) $\quad y_i^n \longrightarrow y_i$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Тогда из леммы 4 в силу формулы (20) получаем что для функций

(22) $\quad \rho_n(x) = \int_0^1 | u''(x) + \tau (u_n''(x) - u''(x)) |^{p-2} d\tau$

справедлива оценка

$$(23)\quad \begin{cases} \varphi_m(x) \geq \operatorname{Min}\,(|u''(x)|^{p-2}, |u''_m(x)|^{p-2}) \geq \\ \qquad \geq c\operatorname{Min}\,(|x-y_i|^{\frac{p-2}{p-1}}, |x-y_i^n|^{\frac{p-2}{p-1}})\ , \end{cases}$$

где постоянная c не зависит от n.

Пусть

$$(24)\qquad 1 < q_1 < q_2 < 2\,\frac{p-1}{2p-3}\ .$$

Поделим уравнение (20) на $\| u_n - u \|^2_{2,q_1}$ и, полагая

$$v(x) = u_n(x) - u(x),\ h_n(x) = \frac{u_n(x) - u(x)}{\| u_n - u \|_{2,q_1}}\ ,$$

получим с помощью формул (23),(24) и лемм 2 и 5

$$\| h_n \|^2_{2,q_2} \leq c\,\| h_n \|^2_{2,2,\varphi_m} \leq c\,\| h_n \|_{2,q_1} + \\ + c\,\frac{|\lambda_n - \lambda|}{\| u_n - u \|_{2,q_1}}\ .$$

Но в виду (7)

$$\| u_n - u \|^2_{2,2} = \int_0^1 |u''_n(x) - u''(x)|^{2-q_1} |u''_n(x) - u''(x)|^{q_1} dx \leq \\ \leq c\int_0^1 |u''_n(x) - u''(x)|^{q_1} dx \leq c\,\| u_n - u \|^{q_1}_{2,q_1}$$

и поэтому из леммы 8 вытекает

$$\| h_n \|^2_{2,q_2} \leq c_1 + c_2\,\frac{\| u_n - u \|^2_{2,2}}{\| u_n - u \|_{2,q_1}} \leq c_1 + \\ + c_2 \| u_n - u \|^{q_1 - 1}_{2,q_1} \leq c_1 + c_2 \| u_n - u \|_{2,p} \leq c\ .$$

Мы можем предполагать, что h_n слабо сходится к h в пространстве $W^{(2)}_{2,q_2}$

Мы показали, что $h_n \in \overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,\varphi_n}$, где φ_n из (22). Если мы поделим уравнение (20) на $\|u_n - u\|_{2,q_1}$ то получим, что h_n удовлетворяют уравнению

$$(25)\quad \begin{cases} (p-1)\int_0^1 (a(x)\varphi_n(x)h_n''(x)v''(x) + (b(x) - \\ - \lambda c(x))\int_0^1 |u(x) + \tau(u_n(x) - u(x))|^{p-2} d\tau \,\cdot \\ \cdot h_n(x)\cdot v(x))\,dx = \\ = \dfrac{\lambda_n - \lambda}{\|u_n - u\|_{2,q_1}} \int_0^1 c(x)|u_n(x)|^{p-2} u_n(x) v(x)\,dx \end{cases}$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,\varphi_n}$.

Точно так-же как в лемме 6 можно показать, что функции h_n'' непрерывны по Гельдеру с показателем $\dfrac{p-2}{p-1}$ в окрестности тех точек, где $\varphi_n(x) \neq 0$. Отсюда немедленно следует, что избранная $h_n''(x) \longrightarrow h''(x)$ для всех $x \in [0,1]$, $x \neq y_i$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Из неравенства Гельдера видно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (δ зависит только от ε), что для любого множества $M \subset [0,1]$, $\mu(M) < \delta$ и любого n

$$\int_M (h_n''(x))^{q_1} dx < \varepsilon \quad .$$

Из теоремы Витали следует, что $\| h_n - h \|_{2,q_1} \to 0$. По лемме Фату имеем $h \in \overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,\varphi}$, где $\varphi(x) = |u''(x)|^{p-2}$.

Полагая в (25) $v(x) = \varphi(x)$, где φ любая бесконечно дифференцируемая финитная функция, также получаем из теоремы Витали в силу плотности множества функций φ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,\varphi}$, что функция h является собственной функцией уравнения в вариациях с весом $\rho(x) = |u''(x)|^{p-2}$ соответствующей собственному значению λ. Заметим, что функция $u(x)$ также является собственной функцией той-же задачи. Поэтому из леммы 6 и 7 получаем, что почти всюду

(26) $$h(x) = c\, u(x) .$$

Нормируем функции u_m так, чтобы $\| u_m \|_{2,q_1} = \| u \|_{2,q_1} = 1$. При этом все сказанное остается в силе. Полагая $\Psi(u) = \| u \|_{2,q_1}^{q_1}$, Ψ имеет непрерывный дифференциал Фреше и

$$0 = \Psi(u_m) - \Psi(u) = d\Psi(u)(u_m - u) + \omega(u_m - u) ,$$

откуда

$$0 = d\Psi(u)h = q_1 \int_0^1 |u''(x)|^{q_1-2} u''(x) h_m''(x)\, dx .$$

Но в силу формулы (26)

$$\int_0^1 |u''(x)|^{q_1-2} u''(x) h_m''(x)\, dx = c \int_0^1 |u''(x)|^{q_1} dx = \| u \|_{2,q_1}^{q_1} = 1 .$$

Цитированная литература

[1] И. НЕЧАС: О дискретности спектра нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля.(Будет напечатано в Докл.Акад. Наук СССР.)

[2] Э.С. ЦИТЛАНАДЗЕ: Теоремы существования точек минимакса в пространствах Банаха и их приложения, Труды Моск.Мат.Общ. 2(1953),235-274.

[3] S.A. JANCZEWSKY: Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order, Ann.of Math. 29(1928),521-542.

[4] S.A. JANCZEWSKY: Oscillation theorem for the differential boundary value problems of the fourth order, II, Ann.of Math. 31(1930), 663-680.

Matematický ústav ČSAV
Žitná 25
Praha 2
Československo

(Oblatum 28. 6. 1971)